B. G. TEUBNER'S LEHRBÜCHER
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN II

E. VON WEBER

VORLESUNGEN ÜBER DAS PFAFF'SCHE PROBLEM

Teubners Sammlung

von Lehrbüchern auf dem Gebiete der

Mathematischen Wissenschaften

mit Einschlufs ihrer Anwendungen.

Im Teubnerschen Verlage erscheint unter obigem Titel in zwangloser Folge eine längere Reihe von zusammenfassenden Werken über die wichtigsten Abschnitte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen.

Die anerkennende Beurteilung, welche der Plan, sowie die bis jetzt erschienenen Aufsätze der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften gefunden haben, die allseitige Zustimmung, welche den von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung veranlafsten und herausgegebenen eingehenden Referaten über einzelne Abschnitte der Mathematik zu teil geworden ist, beweisen, wie sehr gerade jetzt, wo man die Resultate der wissenschaftlichen Arbeit eines Jahrhunderts zu überblicken bemüht ist, sich das Bedürfnis nach zusammenfassenden Darstellungen geltend macht, durch welche die mannigfachen Einzelforschungen auf den verschiedenen Gebieten mathematischen Wissens unter einheitlichen Gesichtspunkten geordnet und einem weiteren Kreise zugänglich gemacht werden.

Die erwähnten Aufsätze der Encyklopädie ebenso wie die Referate in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung beabsichtigen in diesem Sinne in knapper, für eine rasche Orientierung bestimmter Form den gegenwärtigen Inhalt einer Disciplin an gesicherten Resultaten zu geben, wie auch durch sorgfältige Litteraturangaben die historische Entwickelung der Methoden darzulegen. Darüber hinaus aber mufs auf eine eingehende, mit Beweisen versehene Darstellung, wie sie zum selbständigen, von umfangreichen Quellenstudien unabhängigen Eindringen in die Disciplin erforderlich ist, auch bei den breiter angelegten Referaten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in welcher hauptsächlich das historische und teilweise auch das kritische Element zur Geltung kommt, verzichtet werden. Eine solche ausführliche Darlegung, die sich mehr in dem Charakter eines auf geschichtlichen und litterarischen Studien gegründeten Lehrbuches bewegt und neben den rein wissenschaftlichen auch pädagogische Interessen berücksichtigt, erscheint aber bei der raschen Entwickelung und dem Umfang des zu einem grofsen Teil nur in Monographien niedergelegten Stoffes durchaus wichtig, zumal, im Vergleiche z. B. mit Frankreich, bei uns in Deutschland die mathematische Litteratur an Lehrbüchern über spezielle Gebiete der mathematischen Forschung nicht allzu reich ist.

Die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner giebt sich der Hoffnung hin, dafs sich recht zahlreiche Mathematiker, Physiker und Astronomen, Geodäten und Techniker, sowohl des In- als des Auslandes, in deren Forschungsgebieten derartige Arbeiten erwünscht sind, zur Mitarbeiterschaft an dem Unternehmen entschliefsen möchten. Besonders nahe liegt die Beteiligung den Herren Mitarbeitern an der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Die umfangreichen litterarischen und speziell fachlichen Studien, welche für die Bearbeitung von Abschnitten der Encyklopädie vorzunehmen waren, konnten in dem notwendig eng begrenzten Rahmen nicht vollständig niedergelegt werden. Hier aber, bei den Werken der gegenwärtigen Sammlung ist die Möglichkeit gegeben, den Stoff freier zu gestalten und die individuelle Auffassung und Richtung des einzelnen Bearbeiters in höherem Mafse zur Geltung zu bringen. Doch ist, wie gesagt, jede Arbeit, die sich dem Plane der Sammlung einfügen läfst, im gleichen Mafse willkommen.

Bisher haben die folgenden Gelehrten ihre geschätzte Mitwirkung zugesagt, während erfreulicherweise stetig neue Anerbieten zur Mitarbeit an der Sammlung einlaufen, worüber in meinen „Mitteilungen“ fortlaufend berichtet werden wird:

P. Bachmann, niedere Zahlentheorie.
M. Bôcher, über die reellen Lösungen der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
G. Brunel, Analysis situs.
G. Castelnuovo und **F. Enriques**, Theorie der algebraischen Flächen.
F. Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme.
F. Dingeldey, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung.
F. Enriques, Prinzipien der Geometrie.

B. G. TEUBNER'S SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BAND II.

VORLESUNGEN

ÜBER

DAS PFAFF'SCHE PROBLEM

UND DIE THEORIE DER

PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ERSTER ORDNUNG

VON

Dr. EDUARD VON WEBER,
PRIVATDOCENT AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

Inhalt.

Kapitel III.

Die Klasse eines Pfaff'schen Ausdrucks.

Artikel Seite

§ 2. Nichthomogene Funktionengruppen.

§ 3. Homogene Funktionengruppen.

§ 4. Anwendung der Theorie der Funktionengruppen auf partielle Differentialgleichungen, die z explicite enthalten.

§ 5. Die Bäcklund'sche Theorie.

Kapitel XV.

Übersicht über die historische Entwickelung der Theorie des Pfaff'schen Problems.

Vorwort und Einleitung.

Das *Pfaffsche Problem* ist aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung entstanden.

Es sei

$$(1) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_1} = \psi\left(z, x_1, \cdot\cdot\, x_m, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial z}{\partial x_3}, \cdot\cdot\, \frac{\partial z}{\partial x_m}\right)$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit der unbekannten Funktion z und den unabhängigen Variabeln $x_1 x_2 \ldots x_m$. Eine Funktion

$$(2) \qquad z = \varphi(x_1 x_2 \ldots x_m)$$

wird ein „Integral" der Gleichung (1) genannt, wenn sie in (1) substituirt diese Relation in eine Identität verwandelt. Die Gleichung (1) „integriren" heifst, alle ihre Integrale ermitteln. Wir betrachten nun die *totale Differentialgleichung*

$$(3) \qquad dz - \psi(z x_1, \cdot\cdot\, x_m, p_2, p_3, \cdot\cdot\, p_m)\, dx_1 - p_2 dx_2 - \cdot\cdot - p_m dx_m = 0$$

in den $2m$ Veränderlichen

$$(4) \qquad z, x_1, \ldots x_m, p_2, \ldots p_m.$$

Ist dann die Funktion (2) ein Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung, und substituiren wir für z die Funktion φ und für $p_2 \ldots p_m$ die Ausdrücke

$$(5) \qquad p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \qquad (i = 2, 3, \ldots m)$$

in die linke Seite der totalen Differentialgleichung (3), so erhalten wir

$$\sum_1^m {}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i - \psi\left(z x_1 \ldots x_m, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \cdot\cdot\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}\right) dx_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 - \cdot\cdot - \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} dx_m,$$

also ein identisch verschwindendes Resultat.

Es sei umgekehrt in den $2m$ Variabeln (4) ein System von m Relationen

$$(6) \qquad \omega_i(z x_1, \ldots x_m, p_2 \ldots p_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

mit folgenden Eigenschaften gegeben: erstens sollen die Gleichungen (6) nach $z p_2 \ldots p_m$ in der Form

$$z = \varphi(x_1 \ldots x_m);\ p_i = \varphi_i(x_1 \ldots x_m) \qquad (i = 2, 3, \ldots m)$$

auflösbar sein: zweitens soll die linke Seite der totalen Differentialgleichung (3), wenn man darin z durch φ und die p_i durch φ_i ersetzt, in einen Ausdruck übergehen, der für jedes beliebige Wertsystem der Variabeln $x_1 \ldots x_m$ und ihrer Differentiale verschwindet. Diese letztere Eigenschaft drücken wir dadurch aus, dafs wir sagen: Das Gleichungensystem (6) „*befriedigt*" („*erfüllt*") die totale Differentialgleichung (3).

Dann hat man notwendig $\varphi_i \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, und φ ist ein Integral der partiellen Differentialgleichung (1).

Wir kommen so zu der nachstehenden, von *Pfaff*[1]) herrührenden Formulirung des Integrationsproblems unserer partiellen Differentialgleichung:

„*Man bestimme das allgemeinste, aus m Relationen bestehende Gleichungensystem in $z x_1 \ldots x_m p_2 \ldots p_m$, welches nach $z p_2 \ldots p_m$ auflösbar ist und die totale Differentialgleichung* (3) *befriedigt.*"

Diese Aufgabe löst *Pfaff* durch den Nachweis des folgenden Satzes: *Es existiren stets $2m$ Funktionen*

$$F_i(z x_1 \ldots x_m, p_2 \ldots p_m),\ f_i(z x_1 \ldots x_m, p_2 \ldots p_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

von der Eigenschaft, dafs identisch:

$$dz - \psi\, dx_1 - p_2 dx_2 - \cdots - p_m dx_m \equiv F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m.$$

Diese Identität ist so zu verstehen, dafs links und rechts die Koeffizienten aller Differentiale

$$dz dx_1 \ldots dx_m,\ dp_2 \ldots dp_m$$

bezw. identisch gleich werden, wenn man die df_i durch ihre Ausdrücke:

$$\frac{\partial f_i}{\partial z} dz + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_i}{\partial p_2} dp_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial p_m} dp_m$$

ersetzt.

Das vorhin formulirte Problem reduzirt sich jetzt auf die leicht zu erledigende Aufgabe, die totale Differentialgleichung:

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m = 0$$

---

1) J. F. Pfaff, „Methodus generalis aequationes differentiarum partialium nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcunque variabiles complete integrandi." Abh. der k. preufs. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1814—1815; S. 76—136.

durch m Relationen zu befriedigen. Man erkennt z. B. unmittelbar, dafs die Gleichungen

$$\Omega(f_1, f_2, \cdot\cdot f_m) = 0;\ F_1 : F_2 : \cdot\cdot : F_m = \frac{\partial\Omega}{\partial f_1} : \frac{\partial\Omega}{\partial f_2} : \cdot\cdot : \frac{\partial\Omega}{\partial f_m}$$

worin Ω eine willkürliche Funktion von $f_1 f_2 \cdot\cdot f_m$ bedeutet, eine Lösung unserer Aufgabe darstellen, vorausgesetzt, dafs sie nach $z p_2 \,..\, p_m$ auflösbar sind, was allerdings noch einer besonderen Untersuchung bedarf.

Der Satz, dafs die linke Seite der totalen Differentialgleichung (3) in der Form

$$F_1 df_1 + \cdot\cdot F_m df_m$$

dargestellt werden kann, ist ein Spezialfall des folgenden Theorems:

Ist eine beliebige totale Differentialgleichung:

$$\sum_1^n {}^i\, a_i(x_1 x_2 \cdot\cdot x_n) dx_i = 0 \tag{7}$$

gegeben, worin die a_i irgend welche Funktionen der n Veränderlichen $x_1 x_2 \,..\, x_n$ bedeuten, so giebt es stets $2m$ Funktionen

$$F_i(x_1 x_2 \,..\, x_n),\ f_i(x_1 x_2 \,..\, x_n) \qquad (i = 1, 2, \,..\, m)$$

von der Beschaffenheit, dafs die Identität

$$\sum_1^n {}^i\, a_i dx_i \equiv F_1 df_1 + \cdot\cdot + F_m df_m$$

für jedes beliebige Wertsystem der x_i und ihrer Differentiale stattfindet; dabei bedeutet m die Zahl $\frac{1}{2} n$ oder $\frac{1}{2}(n+1)$, je nachdem die Variabelnzahl n gerade oder ungerade ist.

Mit Rücksicht auf diesen gleichfalls von *Pfaff* herrührenden fundamentalen Satz bezeichnet man jede totale Differentialgleichung (7) auch als eine *Pfaffsche Gleichung*, ferner die linke Seite einer solchen Gleichung als einen *Pfaffschen Ausdruck*, endlich die Aufgabe, die in dem vorigen Satze genannten $2m$ Funktionen F_i, f_i wirklich zu bestimmen, als das *Pfaffsche Problem* (im engeren Sinne).

Die Integration der partiellen Differentialgleichung (1) kommt darnach auf die Lösung des Pfaffschen Problems für die totale Differentialgleichung (3) hinaus.

Weiterhin aber entsteht die Frage nach *der kleinsten Zahl* λ von der Eigenschaft, dafs der Pfaffsche Ausdruck

$$a_1 dx_1 + \cdot\cdot + a_n dx_n$$

sich in der Form

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots F_\lambda df_\lambda$$

darstellen lasse, worin die F_i, f_ι gewisse Funktionen von $x_1 \,.\,. x_n$ bedeuten. Setzen wir

$$a_{\iota k} \equiv \frac{\partial a_\iota}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial a_k}{\partial x_\iota} \equiv - a_{k i} \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

so hängt diese Minimalzahl λ wesentlich ab von dem Verhalten der beiden *schiefsymmetrischen* Determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdot\,\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdot\,\cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\,\cdot & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdot\,\cdot & a_n \\ -a_1 & 0 & a_{12} & \cdot\,\cdot & a_{1n} \\ -a_2 & a_{21} & 0 & \cdot\,\cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ -a_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdot\,\cdot & 0 \end{vmatrix}$$

und ihrer Unterdeterminanten. Im Hinblick auf die fundamentale Rolle, die sonach den schiefsymmetrischen Determinanten in dieser Theorie zufällt, behandeln wir im *ersten Kapitel* des vorliegenden Werkes zunächst die Theorie dieser Art von Determinanten. Ein einleitender Paragraph beschäftigt sich mit solchen Eigenschaften eines beliebigen rechteckigen Schemas, die später besonders häufig benutzt werden, insbesondere mit dem Begriff „*Rang*“ einer Matrix. Der Determinantenbegriff selbst, die verschiedenen Arten, eine Determinante zu entwickeln, sowie die Theorie der Multiplikation der Determinanten, setzen wir dabei als bekannt voraus.

Die Aufgabe, die 2λ Funktionen F_i, f_ι, welche die Darstellung des gegebenen Pfaffschen Ausdrucks leisten, in jedem einzelnen Fall wirklich aufzufinden, können wir als das „*Pfaffsche Problem*“ im weiteren Sinne bezeichnen.

Zur Lösung desselben benötigen wir vor allem die Theorie der *linearen* homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit einer Unbekannten f:

$$\sum_1^n{}^i \, \xi_i(x_1 x_2 \,.\,. x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

und der Systeme solcher Gleichungen. Diese Theorie bildet den Gegenstand des *zweiten Kapitels*. Auch diesem Kapitel schicken wir einen einleitenden Paragraphen voraus, in dem die späterhin zur Verwendung gelangenden funktionentheoretischen Grundbegriffe erläutert werden.

Nachdem wir so in den ersten beiden Kapiteln die für unsere Untersuchungen nötigen Hülfsmittel bereit gestellt, nehmen wir in

Kap. III unsern eigentlichen Gegenstand in Angriff. Unsere Darstellung des Pfaffschen Problems (Kap. III—X) folgt nur teilweise der historischen Entwickelung; so geben wir schon in Kap. III eine Reihe von Sätzen und Auffassungsweisen, die einem verhältnismäfsig späten Entwickelungsstadium unserer Disciplin angehören, aber als Grundlagen einer systematischen Behandlung des Gegenstandes unerläfslich scheinen.

Die Kapitel VIII und XI beschäftigen sich mit den Beziehungen, die zwischen dem Pfaffschen Problem und den Berührungstransformationen bestehen; wir geben damit unseren Untersuchungen jene Wendung, die für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in neuerer Zeit entscheidend geworden ist. Der ausführlichen Darlegung dieser Theorie, die nicht nur den historischen Ausgangspunkt, sondern auch das wichtigste Anwendungsgebiet des Pfaffschen Problems bildet, sind die Kapitel XII—XIV gewidmet.

Der Zusammenhang, in dem hier die partiellen Differentialgleichungen auftreten, bringt es mit sich, dafs unsere Behandlung dieses Gegenstandes von den sonst üblichen Darstellungen in mehreren wesentlichen Punkten abweicht. Die von uns befolgte Tendenz, die Resultate dieser Theorie als einfache Korollare der allgemeinen Theorie des Pfaffschen Problems zu erweisen, läfst es gerechtfertigt erscheinen, den *Lie*'schen Integralbegriff als den einfacheren an die Spitze zu stellen, also überhaupt die den *Lie*'schen Arbeiten zu Grunde liegenden Mannigfaltigkeitsvorstellungen in erster Linie zur Geltung zu bringen, und hinterher aus dieser allgemeineren Auffassungsweise die älteren Methoden, so z. B. die *Hamilton-Jacobi*'sche Theorie, durch Spezialisirung abzuleiten. Die Entwickelungen von Kap. IX, § 4 setzen uns ferner in den Stand, auch die *Lie*'schen Funktionengruppen, sowie die schönen, leider wenig bekannten *Bäcklund*'schen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung unserem allgemeinen Schema einzuordnen.

Den Schlufs des Werkes bildet eine historische Übersicht, ein Wort- und Sachregister, sowie ein Litteraturverzeichnis, auf das sich alle Hinweise des Textes beziehen.

Kapitel I.

Zur Theorie der Determinanten.

§ 1. Systeme linearer Gleichungen.[1])

1. Unter einer „*Matrix*“ versteht man bekanntlich ein rechteckiges Schema der Form:

$$(1)\qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1,\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2,\,n-1} & a_{2\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-1,\,1} & a_{m-1,\,2} & \cdot & \cdot & a_{m-1,\,n-1} & a_{m-1,\,n} \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \cdot & \cdot & a_{m,\,n-1} & a_{m\,n} \end{Vmatrix},$$

worin die $m \cdot n$ Gröfsen a_{ik} irgend welche Konstanten bedeuten mögen. Die m Horizontalreihen unserer Matrix bezeichnen wir als „Zeilen“, die n Vertikalreihen als „Spalten“ oder „Kolonnen“, während wir sowohl Zeilen als auch Spalten unter dem Namen „Reihen“ zusammenfassen. Die Gröfsen a_{ik} heifsen die „Elemente“ der Matrix. Das Element a_{ik} gehört, wie man sieht, der i^{ten} Zeile und der k^{ten} Spalte an, oder anders ausgedrückt: die i^{te} Zeile und die k^{te} Spalte „schneiden“ sich in dem Element a_{ik}. Unter dem „Index einer Zeile“ wollen wir den gemeinsamen ersten Index aller Elemente dieser Zeile, unter dem „Index einer Spalte“ den gemeinsamen zweiten Index aller Elemente dieser Spalte verstehen. Wir greifen jetzt irgend r Zeilen bez. mit den Indices $i_1, i_2, \ldots i_r$ und irgend r Spalten bez. mit den Indices $k_1, k_2, \ldots k_r$ heraus; die Zahl r darf natürlich nicht gröfser sein als die kleinere der beiden Zahlen m und n. Auch wollen wir voraussetzen, dafs die Indices $i_1, i_2 \ldots$ und ebenso $k_1, k_2 \ldots$ in ihrer natürlichen Reihenfolge stehen, d. h. also, dafs $i_1 < i_2 < \cdots$ und $k_1 < k_2 < \cdots$.

---

1) Vgl. Frobenius I 236—241. (Die beigesetzten arabischen Ziffern bezeichnen die Seitenzahlen der Arbeit, die im Litteraturverzeichnis unter der betreffenden römischen Ziffer aufgeführt ist.)

Die genannten Zeilen und Spalten schneiden sich nun in r^2 Elementen, die wir zu der r-reihigen Determinante

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \cdot & \cdot & a_{i_1 k_r} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \cdot & \cdot & a_{i_2 k_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_r k_1} & a_{i_r k_2} & \cdot & \cdot & a_{i_r k_r} \end{vmatrix}$$

formiren wollen. Diese Determinante heifst eine „r-reihige Unterdeterminante" oder auch kurz: „eine r-reihige Determinante" der Matrix (1). Bilden wir dann irgend eine $r + r'$-reihige Determinante der Matrix (1), bestehend aus dem $(r + r')^2$ Elementen, in denen sich die Zeilen mit den Indices $i_1 \ldots i_r$ und irgend r' andere Zeilen, sowie die Spalten mit den Indices $k_1 \ldots k_r$ und irgend r' andere Spalten schneiden, so sagen wir, die letztere Determinante „enthält" die Determinante (2) (als Unterdeterminante).

2. Bemerken wir vorab, dafs, wenn alle $r + 1$-reihigen Determinanten der Matrix (1) verschwinden, dasselbe für alle $r + 2$, $r + 3 \ldots$ reihigen Determinanten gilt. Für jede Matrix (1) existirt daher eine und nur eine Zahl r von der Beschaffenheit, dafs nicht alle r-reihigen Determinanten des Schemas (1) null sind, dafs dagegen alle $r + 1$-reihigen Determinanten verschwinden, sofern es solche überhaupt giebt, d. h. sofern nicht r gleich der kleineren der zwei Zahlen m, n ist. Diese Zahl r heifst der „*Rang*" der Matrix (1).

Verschwinden z. B. alle Elemente a_{ik}, so ist $r = 0$; verschwinden nicht alle a_{ik}, dagegen alle Determinanten der Form

$$\begin{vmatrix} a_{ik} & a_{il} \\ a_{jk} & a_{jl} \end{vmatrix} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots m;\ k, l = 1, 2, \ldots n)$$

so ist $r = 1$; ist wenigstens *eine* Determinante dieser Form nicht null, verschwinden dagegen alle dreireihigen Determinanten der Matrix (1), so ist $r = 2$ etc. Natürlich ist r nicht gröfser als die kleinere der beiden Zahlen m und n.

Wir bemerken hier ein für allemal, dafs wir uns zur Bezeichnung einer Matrix der Form (1) oft auch der abgekürzten Schreibweise

$$\| a_{ik} \| \qquad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n)$$

bedienen. Ebenso bedeutet:

$$| a_{ik} | \qquad (i, k = 1 \ldots r)$$

die r-reihige Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdot & \cdot & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

3. Wir fragen nunmehr nach dem allgemeinsten Wertsystem $x_1 x_2 \ldots x_n$, welches die linearen homogenen Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdot\cdot + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdot\cdot + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdot\;\; + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

befriedigt. Die Matrix (1) heifse die zu dem Gleichungensystem (3) „gehörige" Matrix, oder auch kurz „die Matrix des Gleichungensystems (1)", und es sei r ihr Rang. Dann giebt es wenigstens *eine* Determinante der Form (2), die nicht null ist. Wir dürfen aber der bequemeren Bezeichnungsweise halber annehmen, dafs die Indices $i_1 i_2 \ldots i_r$ und ebenso $k_1 k_2 \ldots k_r$ mit der Reihe $1, 2 \ldots r$ übereinstimmen; denn offenbar können wir dies nötigenfalls immer dadurch erreichen, dafs wir die Gleichungen (3) und die Unbekannten x geeignet umnumeriren. Es sei also

$$(4) \qquad D \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdot & \cdot & a_{rr} \end{vmatrix}$$

nicht null. Dann können wir die r ersten Gleichungen (3) nach bekannten Regeln hinsichtlich $x_1, x_2 \ldots x_r$ auflösen, und erhalten so:

$$(5) \quad Dx_i = -D_{i,r+1}x_{r+1} - D_{i,r+2}x_{r+2} - \cdot\cdot - D_{in}x_n \quad (i = 1, \ldots r),$$

worin gesetzt ist:

$$D_{is} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1,i-1} & a_{1s} & a_{1,i+1} & \cdot & \cdot & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2,i-1} & a_{2s} & a_{2,i+1} & \cdot & \cdot & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdot & \cdot & a_{r,i-1} & a_{rs} & a_{r,i+1} & \cdot & \cdot & a_{rr} \end{vmatrix},$$

so dafs also die r-reihige Determinante D_{is} dadurch aus D entsteht, dafs man darin die i^{te} Spalte durch die Elemente $a_{1s}, a_{2s} \ldots a_{rs}$ ersetzt.

Wir wollen nun die aus (5) folgenden Werte von $x_1, x_2 \ldots x_r$ in die linke Seite irgend einer der noch übrigen $m - r$ Gleichungen (3) substituiren, etwa in die folgende:

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{ln}x_n \qquad (l > r)$$

und erhalten dadurch das Resultat:

$$(6) \qquad -\frac{1}{D}\sum_{r+1}^{n}{}^{k}\sum_{1}^{r}{}^{i} a_{li}D_{ik}x_k + \sum_{r+1}^{n}{}^{k} a_{lk}x_k;$$

der mit D multiplizirte Koeffizient von x_k in diesem Ausdruck hat die Form

$$D \cdot a_{lk} - \sum_{1}^{n}{}^{i} a_{li}D_{ik};$$

es ist dies aber nichts anderes, als die nach den Elementen der letzten Zeile entwickelte $r+1$-reihige Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2r} & a_{2k} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & . & . & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{l1} & a_{l2} & . & . & a_{lr} & a_{lk} \end{vmatrix}$$

welche gleich null ist, da die Matrix (1) der Annahme nach den Rang r besitzt. Der Ausdruck (6) verschwindet somit identisch, d. h. unabhängig von der Wahl der Gröſsen $x_{r+1}, x_{r+2} \,..\, x_n$, und wir haben den Satz gewonnen:

„Man erhält unter den gemachten Annahmen über die Matrix (1) das allgemeinste Lösungensystem $x_1 x_2 \,..\, x_n$ der linearen Gleichungen (3), wenn man die Gröſsen

$$(7) \qquad x_{r+1},\ x_{r+2} \,..\, x_n$$

ganz beliebig wählt, und sodann die übrigen x_ι mittels der Formeln (5) berechnet."

Dieses Resultat läſst sich auch so formuliren: Setzen wir zuerst $x_{r+1} = -1$, und die andern Gröſsen (7) gleich null, sodann $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = -1$, und die andern Gröſsen (7) gleich null etc. und berechnen jedesmal die $x_1 \,..\, x_r$ mittels (5), so erhalten wir der Reihe nach $n-r$ verschiedene Lösungensysteme:

$$(8) \qquad \begin{cases} \frac{D_{1,r+1}}{D}, & \frac{D_{2,r+1}}{D}, & .. & \frac{D_{r,r+1}}{D}, & -1, & 0, & .. & 0 \\ \frac{D_{1,r+2}}{D}, & \frac{D_{2,r+2}}{D}, & .. & \frac{D_{r,r+2}}{D}, & 0, & -1, & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \frac{D_{1,n}}{D}, & \frac{D_{2,n}}{D}, & .. & \frac{D_{r,n}}{D}, & 0, & 0, & .. & -1 \end{cases}$$

und man erhält jedes beliebige andere Lösungensystem von (3), indem man die Elemente der ersten Zeile von (8) mit der arbiträren Konstanten $-x_{r+1}$, die der 2^{ten} Zeile mit $-x_{r+2}$ u. s. w. multiplizirt, und sodann die in derselben Spalte stehenden Elemente addirt.

Das soeben erhaltene Resultat wollen wir sogleich noch in etwas allgemeinerer Form aussprechen:

„*Ist r der Rang der Matrix* (1), *und bedeutet* (2) *eine nicht verschwindende r-reihige Determinante von* (1), *so kann man mittels des Gleichungensystems, das aus der i_1^{ten}, i_2^{ten} .. i_r^{ten} Gleichung* (3) *besteht, die Unbekannten $x_{k_1}, x_{k_2} \ldots x_{k_r}$ als lineare homogene Ausdrücke in den übrigen x darstellen; indem man die letzteren beliebig wählt, erhält man die allgemeinste Lösung des Systems* (3)."

Die Gleichungen (3) besitzen offenbar dann, aber auch nur dann aufser dem Lösungensysteme $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_n = 0$ kein weiteres, wenn $r = n$ ist. Es mufs dann natürlich die Zahl m der Gleichungen mindestens gleich n sein. Ist aber $r < n$, so giebt es stets unbegrenzt viele Lösungensysteme $x_1 x_2 \ldots x_n$ der Eigenschaft, dafs nicht alle x verschwinden.

4. Irgend s Systeme von je n Gröfsen

$$(9) \qquad \begin{cases} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdot & \cdot & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdot & \cdot & \xi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{s1} & \xi_{s2} & \cdot & \cdot & \xi_{sn} \end{cases}$$

heifsen „linear abhängig", wenn es s Gröfsen $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_s$ giebt, die nicht alle gleich null sind und den Gleichungen

$$(10) \qquad \lambda_1 \xi_{1k} + \lambda_2 \xi_{2k} + \cdots + \lambda_s \xi_{sk} = 0 \qquad (k = 1, 2 \cdots n)$$

genügen. Im entgegengesetzten Falle heifsen die s Systeme (9) „linear unabhängig". Verlangen wir also, dafs die Gröfsensysteme (9) linear unabhängig seien, so ist z. B. von vorneherein ausgeschlossen, dafs eines derselben aus lauter Nullen besteht, oder dafs die Gröfsen eines Systems den entsprechenden eines andern Systems proportional sind etc. Damit die Gröfsensysteme (9) linear unabhängig seien, ist nach der Definition notwendig und hinreichend, dafs die n Gleichungen (10) nur durch die Annahme $\lambda_1 = 0, \ldots \lambda_s = 0$ befriedigt werden können, und dies kommt nach der Schlufsbemerkung des vor. Art. darauf hinaus, dafs der Rang der aus den $n \cdot s$ Elementen (9) gebildeten Matrix gleich s ist. Natürlich mufs dann $s \leqq n$ sein.

Sind also die Systeme (9) linear unabhängig, so mufs wenigstens *eine* s-reihige Determinante der Matrix (9) nicht null sein; gilt dies insbesondere für die aus der i_1^{ten}, i_2^{ten} .. i_s^{ten} Kolonne formirte Determinante, so sagen wir: Die s Gröfsensysteme (9) sind „*hinsichtlich eben dieser Kolonnen* von einander linear unabhängig“.

Giebt es ein Gröfsensystem $\lambda_1, \lambda_2 \,..\, \lambda_s$, das die Relationen (10) erfüllt, und ist insbesondere etwa $\lambda_s \neq 0$, d. h. kann man die Elemente ξ_{si} des s^{ten} Systems durch die in derselben Spalte stehenden Elemente der übrigen $s-1$ Gröfsensysteme wie folgt ausdrücken:

$$\xi_{si} = \sum_1^{s-1}{}^h \mu_h \xi_{hi} \qquad (i = 1, 2, \,..\, n)$$

so sagen wir: das s^{te} Gröfsensystem (9) ist eine „lineare Kombination“ der übrigen $s-1$ Systeme.

5. Mit Hülfe dieser Definitionen können wir das Resultat des Art. 3 folgendermafsen aussprechen:

Ist der Rang der Matrix (1) *gleich* r, *und ist insbesondere* (4) *eine nicht verschwindende* r*-reihige Determinante derselben, so besitzt das Gleichungensystem* (3) $n-r$ *Lösungensysteme, die hinsichtlich der Kolonnen mit den Indices* $r+1, r+2, \,..\, n$ *voneinander linear unabhängig sind, und jede andere Lösung läfst sich als lineare Kombination der genannten Lösungen darstellen.*

Statt wie in Art. 3 den Variabeln (7) der Reihe nach die Werte $1, 0 \,..\, 0$; $0, 1 \,..\, 0$; etc. zu geben, hätten wir ihnen auch irgend welche $n-r$ Wertsysteme

$$(11) \qquad x_{r+1}^{(h)}\, x_{r+2}^{(h)} \,..\, x_n^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \,..\, n-r)$$

erteilen können; sind dann $x_1^{(h)} \,..\, x_r^{(h)}$ die zugehörigen, mittels der Formeln (5) zu berechnenden Werte der übrigen x, so bilden die $n-r$ Gröfsensysteme

$$(12) \qquad x_1^{(h)}\, x_2^{(h)} \,..\, x_r^{(h)}\, x_{r+1}^{(h)} \,..\, x_n^{(h)} \qquad (h = 1, 2 \,..\, n-r)$$

$n-r$ linear unabhängige Lösungensysteme von (3), wenn die $n-r$-reihige Determinante

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} x_{r+1}^{(1)} & x_{r+2}^{(1)} & .. & x_n^{(1)} \\ . & . & . & . \\ x_{r+1}^{(n-r)} & x_{r+2}^{(n-r)} & .. & x_n^{(n-r)} \end{vmatrix}$$

nicht null ist, *aber auch nur dann;* denn sind die Systeme (11) von einander linear abhängig, so gilt mit Rücksicht auf (5) dasselbe offenbar auch von den $n-r$ Gröfsensystemen (12). Wir haben also den Satz:

„*Ist der Rang der Matrix* (1) *gleich* r, *und ist* (4) *eine nicht verschwindende* r*-reihige Determinante derselben, so sind irgend* $n-r$ *linear* *unabhängige Lösungen der Gleichungen* (3) *insbesondere hinsichtlich der Kolonnen mit den Indices* $r+1,\ r+2, \ldots n$ *von einander linear unabhängig*".

Wir behaupten ferner: Ist

$$\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_n \tag{14}$$

irgend ein Lösungensystem der Gleichungen (3), und stellen die $n-r$ Gröfsensysteme (12) ein beliebiges System von linear unabhängigen Lösungen dar, so ist das Gröfsensystem (14) notwendig eine lineare Kombination der Systeme (12).

Aus der linearen Natur der Gleichungen (3) folgt zunächst, dafs jede Linearkombination irgend welcher Lösungensysteme stets wieder ein Lösungensystem liefert. Sind daher die Gröfsen $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-r}$ beliebige Konstante, und setzen wir:

$$\eta_i = \sum_1^{n-r}{}^h \lambda_h x_i^{(h)} \qquad (i = 1, 2 \ldots n),$$

so ist $\eta_1 \ldots \eta_n$ ein Lösungensystem. Da nun nach dem zuletzt bewiesenen Satze die Determinante (13) nicht null ist, so können wir die Gröfsen λ_h auf eine und nur eine Art so bestimmen, dafs $\eta_{r+1} \ldots \eta_n$ bezw. mit $\xi_{r+1} \ldots \xi_n$ übereinstimmen. Nun giebt es aber nach Art. 3 nur ein einziges Lösungensystem von (3), für das die Gröfsen (7) vorgeschriebene Werte haben; es müssen also jetzt auch die Gröfsen $\eta_1 \ldots \eta_r$ mit $\xi_1 \ldots \xi_r$ übereinstimmen, d. h. das System (14) ist in der That eine Linearkombination der Gröfsensysteme (12).

6. Wir wollen die bisher erhaltenen Sätze über lineare Gleichungen noch einmal zusammenfassen, und gleichzeitig etwas allgemeiner formuliren:

1) „*Ist r der Rang der Matrix* (1), *und* $r < n$, *so kann man unbegrenzt viele Systeme von je $n-r$ linear unabhängigen Lösungensystemen der Gleichungen* (3) *angeben. Hat man $n-r$ unabhängige Lösungensysteme irgend wie ausgewählt, so ist jede andere Lösung als lineare Kombination dieser $n-r$ Lösungen darstellbar*".

2) *Ist insbesondere* (2) *eine nicht verschwindende r-reihige Determinante der Matrix* (1), *so sind irgend $n-r$ linear unabhängige Lösungen der Gleichungen* (3) *hinsichtlich der Spalten mit den Indices $k_{r+1}, k_{r+2} \ldots k_n$ unabhängig, wenn diese Indices die aufser $k_1 \ldots k_r$ in der Reihe* 1 *bis n noch vorhandenen Zahlen bedeuten.*

Aus dem Satz 1) erhalten wir unmittelbar folgendes Korollar:

„*Besitzt ein System linearer Gleichungen* (3) *$n-r$ linear un-*

abhängige Lösungensysteme, so ist der Rang der zugehörigen Matrix (1) *höchstens gleich r*".

7. Ist die Determinante (4) nicht null, verschwinden dagegen alle diejenigen $r+1$-reihigen Determinanten der Matrix (1), welche die Determinante (4) als Unterdeterminante enthalten, so werden, wie wir in Art. 3 gesehen haben, die linken Seiten aller Gleichungen (3) identisch null, wenn man darin für die Grösen $x_1 \ldots x_r$ ihre Werte aus (5) substituirt, also besitzen die Gleichungen (3) die $n-r$ linear unabhängigen Lösungensysteme (8). Hieraus und aus dem vorigen Korollar folgt nun sofort der wichtige, von L. Kronecker herrührende Satz:

Ist in einer Matrix (1) *eine r-reihige Determinante nicht null, verschwinden dagegen alle diejenigen $r+1$-reihigen Determinanten, welche jene r-reihige als Unterdeterminante enthalten, so verschwinden überhaupt a l l e $r+1$-reihigen Determinanten der Matrix* (1).

Um darnach den Rang r einer gegebenen Matrix (1) und gleichzeitig eine nicht verschwindende r-reihige Determinante derselben zu finden, hat man so zu verfahren: Man wählt irgend ein nicht verschwindendes Element $a_{i_1 k_1}$ aus, und sucht eine Zeile mit dem Index i_2 und eine Spalte mit dem Index k_2 so zu bestimmen, dafs die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} \end{vmatrix}$$

nicht null wird. Ist dies unmöglich, so ist $r=1$; andernfalls suche man eine dritte Zeile mit dem Index i_3 und eine dritte Spalte mit dem Index k_3 so zu bestimmen, dafs die dreireihige Determinante, in deren Elementen sich die Zeilen $i_1 i_2 i_3$ und die Spalten $k_1 k_2 k_3$ schneiden, nicht verschwindet. Ist dies unmöglich, so ist $r=2$; andernfalls bestimme man eine 4[te] Zeile und Spalte, etc.

8. Der Satz des vorigen Art. läfst sich folgendermafsen verallgemeinern:

„*Ist D eine r-reihige Determinante der Matrix* (1), *und verschwinden alle diejenigen $r+r'$-reihigen Determinanten von* (1), *die D enthalten, so verschwinden entweder überhaupt alle $r+r'$-reihigen Determinanten, oder es ist D gleich null*".

Der Satz ist für $r'=1$ bereits bewiesen; wir wollen zeigen, dafs er für $r'=k$ gilt, wenn er für $r'=k-1$ bewiesen ist.

Nehmen wir also an, dafs alle $r+k$-reihigen Determinanten von (1) verschwinden, die D enthalten, und sei D' eine $r+k-1$-reihige Determinante, welche D enthält. Da nun u. a. alle $r+k$-reihigen Determinanten null sind, die D' enthalten, so müssen nach Art. 7

entweder alle $r+k$-reihigen Determinanten verschwinden, oder D' mufs null sein. Enthält also die Matrix (1) eine nicht verschwindende $r+k$-reihige Determinante, so müssen alle Determinanten D', d. h. alle $r+k-1$-reihigen Determinanten, die D enthalten, gleich null sein. Setzen wir nun in dem obigen Theorem $r'=k-1$, und nehmen wir an, dafs dasselbe unter dieser Annahme bereits bewiesen sei, so folgt, dafs dann notwendig D verschwindet, da andernfalls alle $r+k-1$-reihigen, und daher auch alle $r+k$-reihigen Determinanten von (1) null wären.

Unser Theorem ist damit allgemein bewiesen.

9. Wir nennen die s linearen Gleichungen mit den n Unbekannten $y_1 \cdot\cdot y_n$:

$$(15)\qquad Y_i = \xi_{i1}y_1 + \xi_{i2}y_2 + \cdot\cdot + \xi_{in}y_n = 0 \qquad (i=1,2\cdot\cdot s)$$

„linear unabhängig", wenn die s Gröfsensysteme (9) es sind, d. h. also, wenn es aufser dem Wertsystem 0, 0, .. 0 kein System von Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \,..\, \lambda_s$ giebt von der Eigenschaft, dafs die Identität:

$$(16)\qquad \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \cdot\cdot + \lambda_s Y_s \equiv 0$$

für jedes beliebige Wertsystem $y_1 \,..\, y_n$ stattfindet. In der That folgt ja aus der Identität (16) das Bestehen der Relationen (10) und umgekehrt. Gilt andererseits eine Identität der Form (16), so heifsen die Gleichungen (15) „linear abhängig"; ist dann etwa $\lambda_s \neq 0$, so läfst sich die linke Seite der letzten Gleichung (15) folgendermafsen durch die linken Seiten der übrigen darstellen:

$$(17)\qquad Y_s \equiv \mu_1 Y_1 + \cdot\cdot + \mu_{s-1} Y_{s-1},$$

wo die μ_i Konstante bedeuten. Wir sagen in diesem Falle, die letzte Gleichung (15) ist eine „lineare Kombination", oder auch eine „Folge" der übrigen. Offenbar wird sie dann von jedem Lösungensystem $y_1 \,..\, y_n$ der Gleichungen $Y_1 = 0 \,..\, Y_{s-1} = 0$ ebenfalls befriedigt.

10. Wir bemerken hier beiläufig, dafs der Rang einer Matrix entweder ungeändert bleibt, oder sich um eins erniedrigt, wenn man irgend eine Zeile oder eine Spalte fortläfst. Soll nun die Gleichung $Y_s = 0$ von jedem Lösungensystem der ersten $s-1$ Gleichungen (15) befriedigt werden, so darf sich der Rang der aus den $s\cdot n$ Elementen (9) bestehenden Matrix nicht ändern, wenn man die letzte Zeile wegläfst, oder anders ausgedrückt: ist r dieser Rang, so mufs sich den ersten $s-1$ Zeilen in (9) eine nicht verschwindende r-reihige Determinante entnehmen lassen, da andernfalls die ersten $s-1$ Gleichungen (15) mehr linear unabhängige Lösungensysteme besäfsen als die s Gleichungen (15) zusammen. Nunmehr aber kann man nach Art. 3 in

den Gleichungen (10) die Unbekannte λ_s sowie $s-r-1$ von den Unbekannten $\lambda_1 \ldots \lambda_{s-1}$ beliebig wählen, worauf die Werte der übrigen λ_i durch die Relationen (10) bestimmt sind; es giebt sonach wenigstens *ein* Lösungensystem $\lambda_1 \ldots \lambda_s$ der Gleichungen (10), für das $\lambda_s = -1$ ist, d. h. es besteht eine Identität der Form (17). Also gilt der Satz:

„*Die Gleichung* $Y_s = 0$ *wird dann, aber auch nur dann von allen Lösungensystemen der ersten* $s-1$ *Gleichungen* (15) *erfüllt, wenn sie eine lineare Kombination* (*eine Folge*) *dieser Gleichungen ist; es ist dazu notwendig und hinreichend, daſs der Rang der Matrix* (9) *durch Weglassung der letzten Zeile sich nicht ändert*“.

Wir wollen noch die folgende Definition hinzufügen:

Zwei lineare Gleichungensysteme mit den Unbekannten $y_1, y_2 \ldots y_n$ heiſsen „*äquivalent*“, wenn jede Gleichung des einen Systems eine Folge der Gleichungen des andern ist, und umgekehrt, d. h. also, wenn das erste System von allen Lösungen des zweiten erfüllt wird, und umgekehrt.

11. Indem wir die bisherigen Sätze und Definitionen auf die beiden folgenden Gleichungensysteme

$$(18) \qquad X_\iota \equiv \sum_1^n {}^k a_{\iota k} x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

$$(19) \qquad X_k' \equiv \sum_1^m {}^i a_{ik} x_\iota' = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

anwenden, erkennen wir die Äquivalenz der nachstehenden fünf Aussagen:

1) Der Rang der Matrix (1) ist r;

2) das Gleichungensystem (18) besitzt $n-r$ linear unabhängige Lösungensysteme

$$\xi_1^{(s)}\ \xi_2^{(s)} \ldots \xi_n^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots n-r)$$

und jedes andere Lösungensystem ist eine lineare Kombination derselben;

3) das Gleichungensystem (19) besitzt $m-r$ linear unabhängige Lösungensysteme

$$\eta_1^{(s)}\ \eta_2^{(s)} \ldots \eta_m^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots m-r)$$

und jedes andere Lösungensystem ist eine lineare Kombination derselben.

4) Zwischen den X_k' bestehen $n-r$ und nicht mehr linear unabhängige Identitäten

$$\sum_1^n {}^k \xi_k^{(s)} X_k' \equiv 0 \qquad (s = 1, 2 \ldots n-r),$$

d. h. $n-r$ von den Gleichungen (19) sind eine Folge der r übrigen, welch' letztere linear unabhängig sind.

5) Zwischen den X_ι bestehen $m-r$ und nicht mehr linear unabhängige Identitäten:

$$\sum_1^m{}^{\iota}\, \eta_\iota^{(s)} X_\iota = 0 \qquad (s = 1, 2 \,..\, m-r)$$

d. h. $m-r$ von den Gleichungen (18) sind eine Folge der r übrigen, welch' letztere linear unabhängig sind.

Wenn also irgend *eine* von diesen 5 Aussagen zutrifft, so gilt dasselbe von allen übrigen.

12. Ersetzt man in dem Gleichungensystem (18) die erste Gleichung $X_1 = 0$ durch $\varrho X_1 = 0$, wo die Konstante ϱ nicht null ist, oder durch $X_1 + \sigma X_2 = 0$, wo σ irgend eine Konstante bedeutet, so erhält man beidemale ein mit (18) äquivalentes System (Art. 10). Daraus folgt ohne weiteres:

„Der Rang einer Matrix bleibt ungeändert, wenn man alle Elemente einer Zeile mit derselben nicht verschwindenden Konstanten multiplizirt, oder wenn man zu den Elementen einer bestimmten Zeile die bez. in derselben Spalte stehenden, mit einer Konstanten σ multiplizirten Elemente einer bestimmten andern Zeile addirt.“

Dasselbe gilt offenbar auch, wenn man in dem vorstehenden Satze die Wörter „Zeile“ und „Spalte“ vertauscht, sowie wenn man die beiden darin erwähnten Operationen beliebig oft nach einander ausführt.

13. Es sei wiederum r der Rang der Matrix (1), und es möge die Determinante (4) nicht null sein; dagegen sollen alle diejenigen r-reihigen Determinanten von (1) verschwinden, an deren Bildung die erste Spalte von (1) nicht beteiligt ist.

Mit andern Worten: wir nehmen an, daſs der Rang der Matrix (1) sich durch Weglassung der ersten Spalte um eins vermindert. Da jetzt die in Art. 3 mit $D_{1,r+1}, D_{1,r+2} \,..\, D_{1n}$ bezeichneten Determinanten der Annahme nach alle verschwinden, so folgt aus den Formeln (5), daſs für jedes beliebige Lösungensystem der Gleichungen (3) die Gröſse x_1 verschwindet; die Gleichung $x_1 = 0$ ist also eine Folge des Systems (3). Umgekehrt, soll letzteres der Fall sein, so muſs sich der Rang r von (1) durch Weglassung der ersten Spalte notwendig vermindern; andernfalls könnte man nämlich den $n-1$ letzten Kolonnen von (1) eine nicht verschwindende r-reihige Determinante entnehmen, und die Gleichungen (3) besäſsen daher nach Art. 3 mindestens *ein* Lösungensystem, für das die Variabele x_1 einen willkürlich vorgeschriebenen Wert annimmt. Damit ist der folgende Satz bewiesen, von dem wir noch wiederholt Gebrauch machen werden:

„*Die Gleichung* $x_k = 0$ *ist dann, aber auch nur dann eine Folge der Gleichungen* (3), *wenn sich der Rang der Matrix* (1) *durch Streichung der* k^{ten} *Spalte um eins vermindert.*“

14. Wir betrachten nunmehr ein nicht homogenes lineares Gleichungensystem:

$$
(20) \qquad \begin{array}{l}
a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1,n-1}y_{n-1} = -a_{1n} \\
a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2,n-1}y_{n-1} = -a_{2n} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{m,n-1}y_{n-1} = -a_{mn}
\end{array}
$$

mit den Unbekannten $y_1 y_2 \ldots y_{n-1}$. Es sei wiederum r der Rang der Matrix (1). Dann ist der Rang der Matrix (1)′, die aus (1) durch Streichung der letzten Spalte entsteht, entweder gleich r oder gleich $r-1$. Im letzteren Falle ist die n^{te} der Gleichungen

$$
(19) \qquad a_{1i}x_1' + a_{2i}x_2' + \cdots + a_{mi}x_m' = 0 \qquad (i = 1 \cdots n)
$$

keine Folge der $n-1$ übrigen, d. h. es giebt mindestens *ein* Wertsystem $x_1' \ldots x_m'$, das die ersten $n-1$ Gleichungen (19), nicht aber die letzte befriedigt. Daraus schliefsen wir sofort, dafs die Gleichungen (20) durch kein endliches Konstantensystem erfüllt werden können. In der That, multipliziren wir die Gleichungen (20) bez. mit x_1', $x_2' \ldots x_m'$ und addiren sie, so folgt im Widerspruch mit der Bedeutung der x_i', dafs auch die n^{te} Gleichung (19) befriedigt ist.

Den linearen Gleichungen (20) *kann also nur dann durch ein Konstantensystem* $y_1 \ldots y_{n-1}$ *genügt werden, wenn sich der Rang* r *der Matrix* (1) *bei Weglassung der letzten Spalte nicht ändert.*

Ist diese Bedingung erfüllt, so läfst sich den $n-1$ ersten Spalten von (1) eine r-reihige nicht verschwindende Determinante entnehmen, und wir können, um die Ideen zu fixiren, annehmen, dafs (4) diese Determinante sei. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des Art. 3 folgt dann sofort, dafs man das allgemeinste Lösungensystem $y_1 \ldots y_{n-1}$ der Gleichungen (20) erhält, indem man $y_{r+1}, \ldots y_{n-1}$ willkürlich wählt, und $y_1 y_2 \ldots y_r$ aus den Formeln

$$
D y_i = -D_{i,r+1}y_{r+1} - D_{i,n-1}y_{n-1} - D_{in} \qquad (i = 1 \ldots r)
$$

berechnet. Allgemein gilt, wie man leicht verifizirt, der Satz:

Bleibt der Rang r *der Matrix*

$$
\| a_{ik} \| \qquad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n)
$$

bei Weglassung der letzten Spalte ungeändert, und bedeuten

$$\eta_1^{(h)}\eta_2^{(h)}\,.\,.\,\eta_{n-1}^{(h)} \qquad (h = n - r - 1)$$

irgend $n - r - 1$ *linear unabhängige Lösungensysteme der linearen homogenen Gleichungen*

$$\sum_1^{n-1}{}^k a_{ik} y_k = 0 \qquad (i = 1\,.\,.\,m)$$

ferner

$$\eta_1^{(0)}\eta_2^{(0)}\,.\,.\,\eta_{n-1}^{(0)}$$

irgend ein spezielles Lösungensystem der nicht homogenen linearen Gleichungen

$$(21) \qquad \sum_1^{n-1}{}^k a_{ik} y_k + a_{in} = 0 \qquad (i = 1\,.\,.\,m)$$

so hat das allgemeinste Lösungensystem $y_1\,.\,.\,y_{n-1}$ *dieser Gleichungen die Form*

$$y_i = \eta_i^{(0)} + \sum_1^{n-r-1}{}^h \lambda_h \eta_i^{(h)} \qquad (i = 1, 2\,.\,.\,n-1)$$

worin die λ_h *willkürliche Gröfsen bedeuten. Im Falle* $r = n - 1$, *und nur in diesem giebt es blos ein einziges Lösungensystem der Gleichungen* (21).

15. Wir werden im Laufe dieser Vorlesungen ausschliefslich solche Matrices (1) zu betrachten haben, deren Elemente a_{ik} Funktionen gewisser unabhängiger Variabeln $z_1 z_2\,.\,.$ bedeuten. Unter dem „*Rang*" einer solchen Matrix verstehen wir dann, wenn nichts anderes bemerkt wird, immer die Ordnung der höchsten, nicht *identisch*, d. h. nicht für jedes beliebige Wertsystem $z_1 z_2\,.\,.$ verschwindenden Unterdeterminanten.

Doch kann es, falls eine Matrix (1) in diesem Sinne den Rang r besitzt, Gleichungensysteme der Form

$$(22) \qquad \varphi_j(z_1, z_2, \,.\,.) = 0 \qquad (j = 1, 2\,.\,.)$$

geben von der Eigenschaft, dafs die Matrix (1) für ein beliebiges Wertsystem $z_1, z_2, \,.\,.$, das die Gleichungen (22) erfüllt, einen Rang $r' < r$ aufweist. Wir sagen in diesem Fall: „Die Matrix (1) besitzt *vermöge* der Relationen (22) den Rang r'."

Wir bezeichnen s Systeme (9) von je n Funktionen ξ_{ik} der Variabeln $z_1, z_2\,.\,.$ als „*linear unabhängig*", wenn zwischen ihnen kein identisches Gleichungensystem der Form (10) bestehen kann, worin die λ_i irgend welche Funktionen von $z_1, z_2\,.\,.$ bedeuten und nicht alle identisch null sind. Doch können linear unabhängige Funktionensysteme vermöge gewisser Relationen (22) linear abhängig werden.

Analoges gilt für linear unabhängige lineare Gleichungen, deren Koeffizienten Funktionen von z_1, z_2 .. bedeuten.

Nimmt man die Begriffe „Rang" und „lineare Unabhängigkeit" in der angegebenen Bedeutung, so lassen sich alle Resultate dieses § ohne weiteres auf Matrices (1) und lineare Gleichungensysteme (3) übertragen, in denen die a_{ik} Funktionen der Variabeln z_1, z_2 .. bedeuten. Dasselbe gilt auch für die Entwickelungen der folgenden beiden Paragraphen, in denen also die Elemente der zu betrachtenden Matrices nach Belieben als Konstante, oder als Funktionen gewisser unabhängiger Variabeln angesehen werden können.

§ 2. **Schiefsymmetrische Determinanten.**

16. Für die Theorie des Pfaffschen Problems sind, wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, besonders die sogenannten „schiefsymmetrischen" oder „alternirenden" Determinanten und Matrices von Wichtigkeit; es sind dies quadratische Schemata folgender Form:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdot\cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot\cdot & 0 \end{vmatrix}$$

deren Elemente den Bedingungen

$$(2) \qquad a_{ii} = 0, \quad a_{ik} = -a_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, .. n)$$

genügen.

Die aus den n^2 Elementen (1) gebildete schiefsymmetrische Determinante werde mit D bezeichnet. Multipliziren wir alle Elemente derselben mit -1, die Determinante selbst also mit $(-1)^n$, so kommt dies nach (2) darauf hinaus, die Zeilen in (1) als Spalten zu schreiben, und umgekehrt. Da hierdurch der Wert von D nicht geändert wird, hat man

$$D \equiv (-1)^n D;$$

eine schiefsymmetrische Determinante ungerader Ordnung verschwindet daher identisch, was auch ihre Elemente bedeuten mögen.

Es sei nun n einer geraden Zahl 2ν gleich. Dann verschwindet die Determinante

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdot\cdot & a_{1,n-1} \\ a_{21} & 0 & \cdot\cdot & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdot\cdot & 0 \end{vmatrix}$$

identisch. Es werde mit

$$(-1)^{i+k} \cdot \beta_{ik}$$

diejenige $n-2$-reihige Determinante bezeichnet, die aus (3) durch Streichung der i^{ten} Zeile und der k^{ten} Spalte hervorgeht. Man hat dann bekanntlich, wenn i und k irgend zwei Indices der Reihe $1, .. n-1$ bedeuten:

$$\beta_{ik} \cdot \beta_{ki} = \beta_{ii} \cdot \beta_{kk}.$$

Es ist aber offenbar

$$\beta_{ik} = \beta_{ki},$$

denn es entsteht β_{ki} aus β_{ik} mit Rücksicht auf (2) dadurch, daſs man alle Elemente a_{rs} mit -1, die Determinante β_{ik} selbst also mit $(-1)^{n-2}$ multiplizirt. Man hat sonach identisch:

$$\beta_{ik}^2 = \beta_{ii}\beta_{ik}$$

d. h. also

(4) $$\beta_{ik} = \{\sqrt{\beta_{ii}}\}\{\sqrt{\beta_{kk}}\}.$$

Die geschweiften Klammern sollen dabei andeuten, daſs die Quadratwurzeln mit einem bestimmten Zeichen zu nehmen sind; und zwar kann das Vorzeichen *einer* dieser Quadratwurzeln, etwa das von $\sqrt{\beta_{11}}$ (sofern $\beta_{11} \neq 0$) willkürlich gewählt werden, worauf die Zeichen aller andern Quadratwurzeln durch die Relationen (4) eindeutig bestimmt sind.

Entwickelt man nun die Determinante D nach den Elementen der letzten Zeile und Spalte, so folgt:

$$D \equiv -\sum_1^{2\nu-1}{}^i \sum_1^{2\nu-1}{}^k a_{i,2\nu} a_{2\nu,k} \cdot \beta_{ik}$$

$$\equiv \sum_1^{n-1}{}^i a_{in}^2 \beta_{ii} + 2 \cdot \sum{}' a_{in} a_{kn} \beta_{ik},$$

worin die Summe $\sum{}'$ über alle $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ verschiedenen Kombinationen i, k der Zahlen $1 .. n-1$ zur Klasse zwei zu erstrecken ist. Wegen (4) hat man daher

(5) $$D \equiv [a_{1,n}\{\sqrt{\beta_{11}}\} + a_{2,n}\{\sqrt{\beta_{22}}\} + \cdots + a_{n-1,n}\{\sqrt{\beta_{n-1,n-1}}\}]^2.$$

Hieraus folgt sofort:

Eine schiefsymmetrische Determinante von gerader Ordnung $n = 2\nu$ läſst sich stets in der Form darstellen:

$$D \equiv P^2,$$

worin P eine Summe von Gliedern der Gestalt

$$(6) \qquad \pm\, a_{ik} a_{lm} a_{pq} \ldots$$

bedeutet, deren jedes aus $\nu = \frac{1}{2} n$ *Faktoren* a_{ik} *besteht.*

In der That, die Gröfsen β_{ii} sind schiefsymmetrische Determinanten der Ordnung $2\nu - 2$; ist also unser Theorem für die Ordnung $2\nu - 2$ richtig, so gilt es wegen (5) auch für die Ordnung 2ν. Für $n = 2$ aber ist $D \equiv a_{12}^2$, also ist das Theorem allgemein erwiesen. Für $n = 4$ hat man z. B.

$$D \equiv (a_{12} a_{34} - a_{13} a_{24} + a_{14} a_{23})^2.$$

Wir bezeichnen den Ausdruck P, dessen Quadrat gleich D ist, als ein *„Pfaffsches Aggregat der Ordnung* 2ν*"*. Natürlich ist P nur bis aufs Vorzeichen bestimmt; wir werden über die Wahl desselben sogleich noch eine besondere Verabredung treffen.

17. Da die Pfaffschen Aggregate der Ordnung $2\nu - 2$, deren Quadrate bezüglich gleich β_{11}, β_{22} .. sind, keine der Gröfsen a_{in}, a_{ni} enthalten, so kann wegen (5) der Index n in keinem Term (6) von P zweimal auftreten; dasselbe gilt natürlich aus Symmetriegründen für jeden andern Index $1, 2, \ldots n-1$.

Jeder Term (6) *des Pfaffschen Aggregats* P *enthält daher alle Indices* $1, 2, \ldots 2\nu$ *und jeden nur einmal.*

Es sei jetzt $i_1, i_2 \ldots i_n$ irgend eine Permutation der Zahlen $1, 2 \ldots n$. Das Produkt

$$(7) \qquad a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_3 i_4} \cdots a_{i_{n-1} i_n}$$

bleibt ungeändert, wenn man seine ν Faktoren irgendwie vertauscht, und ändert wegen (2) sein Zeichen, wenn man die Indices eines und desselben Faktors a umstellt. Wir wollen alle Produkte, die aus (7) durch wiederholte Anwendung der genannten Operationen entstehen, als äquivalent bezeichnen. Zu jedem Produkt (7) giebt es darnach $2^\nu \cdot \nu!$ äquivalente Produkte, wobei (7) selbst mitgerechnet ist.

Setzen wir demnach

$$N = \frac{(2\nu)!}{2^\nu \cdot \nu!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-3)(n-1)$$

so gilt der Satz: Man kann N und nicht mehr Produkte der Form (7) so auswählen, dafs keine zwei unter ihnen äquivalent sind.

Entwickeln wir nun die Determinante

$$D = |\, a_{ik} \,| \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

bekannten Regeln zufolge in eine Summe von $n!$ Gliedern, so erhalten wir unter anderm folgenden Term:

$$(8)\qquad (-1)^{\nu}\cdot a_{i_1 i_2}\cdot a_{i_2 i_1}\cdot a_{i_3 i_4}\cdot a_{i_4 i_3}\cdot\cdot a_{i_{n-1} i_n}\cdot a_{i_n i_{n-1}}\cdot$$

Dafs das angegebene Vorzeichen das richtige ist, erkennt man daraus, dafs in diesem Term die Reihe der zweiten Indices

$$i_2 i_1 i_4 i_3 \,..\, i_n i_{n-1}$$

aus der Reihe der ersten Indices

$$i_1 i_2 i_3 i_4 \,..\, i_{n-1} i_n$$

durch ν-malige Vertauschung je zweier Ziffern hervorgeht. Wegen (2) aber schreibt sich das Produkt (8) so:

$$a_{i_1 i_2}^2\cdot a_{i_3 i_4}^2\cdot\cdot a_{i_{n-1} i_n}^2;$$

da nun D durch Quadrirung von P erhalten wird, mufs P einen Term der Form

$$(9)\qquad \pm\, a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4}\cdot\cdot a_{i_{n-1} i_n}$$

oder einen dazu äquivalenten enthalten. Also:

Das Pfaffsche Aggregat P ist eine Summe von N Gliedern der Form (9), *von denen keine zwei äquivalent sind.*

18. Es ist noch das Vorzeichen des einzelnen Terms (9) zu bestimmen.

Da die Determinante D oder P^2 durch die gleichzeitige Vertauschung zweier Horizontal- und zweier Vertikalreihen ungeändert bleibt, so mufs P bei der Vertauschung zweier Indices i und k entweder ungeändert bleiben, oder das Zeichen wechseln. Ersteres aber ist ausgeschlossen, da bei der genannten Vertauschung alle mit dem Faktor a_{ik} behafteten Terme in P das Zeichen wechseln. Es gilt somit der Satz:

„Durch Vertauschung irgend zweier Indices i, k, allgemein durch eine ungerade Zahl solcher Vertauschungen wird P in $-P$ verwandelt, durch eine gerade Zahl von Indicesvertauschungen dagegen nicht geändert.“

Die $n!$ Permutationen $i_1 \,..\, i_n$ zerfallen nun bekanntlich in zwei Klassen von je $\frac{1}{2}\cdot n!$ Permutationen; eine Permutation gehört zur ersten oder zur zweiten Klasse, je nachdem ihre Inversionenzahl[1])

1) Die Inversionenzahl der Permutation $i_1 i_2 \,..\, i_n$ ist gleich

$$\nu_1+\nu_2+\cdot\cdot+\nu_{n-1},$$

wenn allgemein unter ν_s die Anzahl derjenigen unter den Indices $i_{s+1}, i_{s+2}\cdot\cdot i_n$ verstanden wird, die kleiner als i_s sind.

gerade oder ungerade ist. Da durch Vertauschung zweier Indices die Inversionenzahl in jeder Permutation um eine ungerade Zahl geändert wird, so kann man von einer Permutation zu einer andern derselben Klasse nur durch eine gerade Zahl von Vertauschungen je zweier Indices, zu einer Permutation der andern Klasse dagegen nur durch eine ungerade Zahl solcher Vertauschungen übergehen.

Wir betrachten jetzt zwei mit demselben Zeichen behaftete Terme in P:

$$(10)\qquad \pm(a_{k_1 k_2} \cdot a_{k_3 k_4} \cdots a_{k_{n-1} k_n} + a_{l_1 l_2} \cdot a_{l_3 l_4} \cdots a_{l_{n-1} l_n});$$

kann man nun durch μ Vertauschungen je zweier Indices von der Permutation

$$(11)\qquad k_1 k_2 \,.\,.\, k_n$$

zu der Permutation

$$(12)\qquad l_1 l_2 \,.\,.\, l_n$$

übergehen, so verwandelt sich P durch diese Vertauschungen einerseits in $(-1)^\mu \,.\, P$, bleibt aber andrerseits ungeändert, da der zweite Term (10) vor und nach dieser Umformung mit demselben Zeichen erscheint. Also ist μ eine gerade Zahl, d. h. die beiden Permutationen (11) und (12) gehören derselben Klasse an. Genau ebenso zeigt man, dafs die Indicespermutationen zweier Terme mit entgegengesetztem Zeichen verschiedenen Klassen angehören müssen.

Alle Terme in P, deren Indices eine Permutation erster Klasse bilden, haben also dasselbe Zeichen, alle andern das entgegengesetzte. Wir wollen festsetzen, dafs die Glieder der ersten Art das Zeichen $+$, alle andern also das Zeichen $-$ haben sollen. Das so definirte Pfaffsche Aggregat bezeichnen wir durch das Symbol $(1, 2, \,.\,.\, 2\nu)$[1]), sodafs identisch:

$$(13)\quad P \equiv (1, 2, \,.\,.\, 2\nu - 1, 2\nu) \equiv \sum (-1)^J a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_3 i_4} \cdots a_{i_{2\nu-1} i_{2\nu}},$$

worin J die Inversionenzahl der Permutation $i_1 \,.\,.\, i_{2\nu}$ bedeutet, und die Summe aus irgend N Termen besteht, von denen keine zwei äquivalent sind.

Jeder der N Terme von P kann durch einen äquivalenten ersetzt werden, in dem der erste Index i_1 einen bestimmt vorgeschriebenen Wert, etwa 1, besitzt. Für i_2 ergeben sich dann $n - 1$ Möglichkeiten. Jeder Term in P, der den Faktor a_{1, i_2} enthält, kann durch einen äquivalenten ersetzt werden, in dem der dritte Index i_3 einen bestimmt

1) Jacobi I Bd. 4, pag. 25. Mansion I 106 ff.; Cayley I Bd. 4, pag. 361.

vorgeschriebenen, von 1 und i_2 verschiedenen Wert i_3 besitzt, worauf sich für i_4 noch $n-3$ Möglichkeiten ergeben, etc. Hieraus hätten wir auch umgekehrt schliefsen können, dafs N die Zahl der Terme von P ist. Für $n = 6$ hat man z. B.

$$\begin{aligned}(1, 2, 3, 4, 5, 6) \equiv\ & a_{12}a_{34}a_{56} - a_{13}a_{24}a_{56} + a_{14}a_{23}a_{56} - a_{15}a_{23}a_{46} + a_{16}a_{23}a_{45} \\ & - a_{12}a_{35}a_{46} + a_{13}a_{25}a_{46} - a_{14}a_{25}a_{36} + a_{15}a_{24}a_{36} - a_{16}a_{24}a_{35} \\ & + a_{12}a_{36}a_{45} - a_{13}a_{26}a_{45} + a_{14}a_{26}a_{35} - a_{15}a_{26}a_{34} + a_{16}a_{25}a_{34}.\end{aligned}$$

Natürlich kann man durch geeignete Indicesumstellungen erreichen, dafs alle Terme von P mit demselben Zeichen erscheinen. So ist z. B.

$$(1\ 2\ 3\ 4) = a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23}.$$

Berücksichtigt man die Änderung, die P bei Vertauschung zweier Indices erleidet, so erhält man leicht die Formel:

$$(14) \qquad (k_1 k_2 \cdots k_{2\nu}) \equiv (-1)^K \cdot (1, 2 \cdots 2\nu)$$

worin (11) irgend eine Permutation der Zahlen $1 \,.\,.\, n$, und K die zugehörige Inversionenzahl bedeutet.

Ersetzt man in jedem Term von P, unter Beibehaltung seines Vorzeichens, den Index 2 durch 1, so erhält man vermöge (2) einen identisch verschwindenden Ausdruck, da ja die Determinante D oder P^2 null ist, wenn zwei ihrer Zeilen und zwei ihrer Kolonnen übereinstimmen. Man hat also den Satz:

Das Pfaffsche Aggregat

$$(k_1 k_2 \,.\,.\, k_{2\nu})$$

ist null, wenn irgend zwei der Zahlen k_ι einander gleich sind.

19. Die Definition des Pfaffschen Aggregats $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung ist natürlich davon ganz unabhängig, dafs die darin vorkommenden 2ν Indices gerade mit $1, 2, \,.\,.\, 2\nu$ bezeichnet werden. Es seien allgemein

$$(15) \qquad \alpha, \beta, \gamma \,.\,.\, \varepsilon, \zeta$$

irgend 2ν verschiedene, reelle, der Gröfse nach geordnete Zahlen, so dafs also $\alpha < \beta < \cdots < \varepsilon < \zeta$, so können wir setzen:

$$(\alpha\beta \,.\,.\, \varepsilon\zeta) \equiv \sum (-1)^J a_{i_1 i_2} \,.\,.\, a_{i_{n-1} i_n}$$

wenn $i_1 \,.\,.\, i_n$ eine Permutation der Zahlen (15) und J die zugehörige Inversionenzahl bezeichnet; die Summe erstreckt sich wiederum über N Terme, von denen keine zwei äquivalent sind. Ferner hat man:

$$(\alpha' \beta' \cdots \varepsilon' \zeta') = (-1)^K \cdot (\alpha\beta \cdots \varepsilon\zeta)$$

wenn $\alpha' \,.\,.\, \varepsilon' \zeta'$ eine beliebige Permutation der Zahlen (15) und K die Inversionenzahl dieser Permutation bedeutet. Es ist dabei zu bemerken, dafs in der Entwickelung dieses Aggregats das Produkt $a_{\alpha' \beta'} \,.\, a_{\gamma' \delta'} \cdot\cdot a_{\varepsilon' \zeta}$ mit dem Zeichen $+$ behaftet ist; wir wollen diesen Term das „*Anfangsglied*“ des Pfaffschen Aggregats $(\alpha' \beta' \,.\,.\, \varepsilon' \zeta')$ nennen.

Auch bei unserer allgemeineren Bezeichnungsweise gilt der Satz, dafs ein Pfaffsches Aggregat stets null ist, wenn zwei seiner Indices einander gleich sind.

20. Aus der Identität (5) ist ersichtlich, dafs der Koeffizient von a_{1n} in der Entwickelung von P dem mit einem gewissen Zeichen genommenen Pfaffschen Aggregat $2\nu - 2^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(2, 3 \,.\,.\, 2\nu - 1)$$

gleich ist. Aus Symmetriegründen ergiebt sich ebenso, dafs der Koeffizient von a_{1s} mit dem Pfaffschen Aggregat:

$$(2, 3 \,.\,.\, s - 1,\; s + 1 \,.\,.\, 2\nu) \tag{16}$$

bis aufs Vorzeichen übereinstimmt. Um letzteres zu ermitteln, bemerken wir, dafs das mit a_{1s} multiplizirte Anfangsglied von (16) so lautet:

$$a_{1s} a_{23} \cdot\cdot a_{2\nu-1, 2\nu}$$

und dieses Produkt kommt in der Entwickelung (13) mit dem Zeichen $(-1)^{s-2}$ vor. Der Koeffizient von a_{1s} im Ausdruck P ist daher

$$(-1)^s (2, 3 \,.\,.\, s - 1,\; s + 1 \,.\,.\, 2\nu)$$

oder wegen (14) gleich:

$$(s + 1, s + 2, \,.\,.\, 2\nu, 2, 3, \,.\,.\, s - 1);$$

in der That ist ja die Inversionenzahl der zuletzt hingeschriebenen Permutation gleich $(2\nu - s)(s - 2)$, und man hat

$$(-1)^{(2\nu - s)(s-2)} = (-1)^{s^2} = (-1)^s.$$

Also ergiebt sich

$$(1, 2, \cdot\cdot 2\nu) = \sum_2^{2\nu}{}^s (1, s)(s + 1, s + 2, \cdot\cdot 2\nu, 2, 3, \cdot\cdot s - 1) \tag{17}$$

$$(1, s) \equiv a_{1s}.$$

Der Koeffizient von a_{12} rechts ist $(3, 4 \,.\,.\, 2\nu)$, der von $a_{1, 2\nu}$ ist $(2, 3 \,.\,.\, 2\nu - 1)$. Allgemein hat man:

$$(k_1 k_2 \cdot\cdot k_{2\nu}) \equiv \sum_2^{2\nu}{}^s (k_1 k_s)(k_{s+1} \cdot\cdot k_{2\nu}, k_2 \cdot\cdot k_{s-1}) \tag{18}$$

$$(k_1 k_s) \equiv a_{k_1 k_s}$$

wobei die k_ι irgend welche 2ν reelle Zahlen bedeuten. Die Formel (18) gilt nämlich offenbar auch, wenn irgend zwei der Zahlen k_ι einander gleich sind.

21. Wir wollen noch den Koeffizienten von a_{ik} in der Entwickelung des Pfaffschen Aggregats $(1, 2 \,.\,.\, 2\nu)$ bestimmen. Nach der Formel (14) hat man identisch, falls $i < k$:

$$P = (1, 2 \cdot\cdot 2\nu) \equiv (-1)^{i+k-3}\,(i, k, 1, \cdot\cdot\, i-1, i+1 \cdot\cdot\, k-1, k+1 \cdot\cdot\, 2\nu).$$

In der rechtsstehenden Indexpermutation kommt natürlich die Zifferngruppe $1 \,.\,.\, i-1$ in Wegfall, wenn $i = 1$, ebenso die Zifferngruppe $i+1 \,.\,.\, k-1$, wenn $i = k-1$, endlich die letzte Zifferngruppe, wenn $k = 2\nu$. Nach Formel (18) ist also, falls $i < k$, der Koeffizient von (ik) oder a_{ik} in der Entwickelung von P gleich:

$$(-1)^{i+k+1}\,(1, \,.\,.\, i-1, i+1 \,.\,.\, k-1, k+1 \,.\,.\, 2\nu).$$

Verstehen wir demnach unter dem Ausdruck

$$(-1)^{i+k+1} \,.\, P_{ik} \tag{19}$$

falls $i < k$, dasjenige Pfaffsche Aggregat der Ordnung $2\nu - 2$, das aus P durch Fortlassung der beiden Indices i und k entsteht, und setzen wir allgemein

$$P_{ki} \equiv -P_{ik}, \quad P_{ii} \equiv 0 \qquad (i, k = 1, 2 \,.\,.\, 2\nu), \tag{20}$$

so ist der Koeffizient von a_{ik} in dem Aggregat P unter allen Umständen gleich P_{ik}.

Es werde nun wie üblich mit

$$(-1)^{i+k} \,.\, A_{ik}$$

diejenige $n-1$-reihige Determinante bezeichnet, deren Elementensystem aus (1) durch Weglassung der i^{ten} Zeile und der k^{ten} Spalte entsteht; A_{ik} ist demnach der zu dem Element a_{ik} gehörige Minor der Determinante (1). Nach bekannten Sätzen über adjungirte Determinanten ist dann identisch:

$$A_{ii} \cdot A_{kk} - A_{ik} \cdot A_{ki} = D \cdot D_{ik} \tag{21}$$

wo D die Determinante (1) und D_{ik} diejenige $n-2$-reihige Unterdeterminante bezeichnet, die aus D durch Streichung der i^{ten} und k^{ten} Zeile und Spalte hervorgeht. Da aber $n = 2\nu$, so ist identisch

$$A_{ik} = -A_{ki}, \quad A_{ii} = 0; \tag{22}$$

denn A_{ki} entsteht aus A_{ik} dadurch, daſs man alle Elemente a_{rs} mit -1, A_{ik} selber also mit $(-1)^{n-1}$ multiplizirt. Die Identität (21) wird daher:

$$A_{ik}^2 = P^2 \cdot P_{ik}^2. \tag{23}$$

In der That ist ja D_{ik} eine schiefsymmetrische $n-2$-reihige Determinante und als solche das Quadrat eines Pfaffschen Aggregats der Ordnung $2\nu-2$, das nach der Definition von P_{ik} mit diesem übereinstimmen mufs.

Aus (23) folgt nun, wie wir behaupten

$$A_{ik} = + P \cdot P_{ik}; \tag{24}$$

dafs in der That das Vorzeichen richtig gewählt ist, ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung

$$P^2 = \sum_1^n {}_i\, a_{ik} A_{ik},$$

wenn wir darin für A_{ik} seinen Wert (24) substituiren und beachten, dafs P_{ik} der Koeffizient von a_{ik} in dem Ausdruck P ist.

22. Unter einer „Hauptunterdeterminante" einer Determinante D versteht man bekanntlich eine solche, deren Elemente in D symmetrisch zu beiden Seiten der „Hauptdiagonale", d. i. der von links oben nach rechts unten laufenden Diagonale verteilt sind. Ist nun $n = 2\nu$, und haben die A_{ik} die vorhin angegebene Bedeutung, so ist die zu $D = P^2$ adjungirte Determinante

$$| A_{ik} | \qquad (i, k = 1 \cdot\cdot 2\nu) \tag{25}$$

wegen (22) wiederum schiefsymmetrisch. Es seien α, β, γ, δ irgend vier verschiedene Indices der Reihe $1 \,..\, 2\nu$, und zwar möge $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ sein. Wir betrachten jetzt diejenige vierreihige Hauptunterdeterminante von (25), in deren Elementen sich die Zeilen und die Kolonnen mit den Indices $\alpha\beta\gamma\delta$ schneiden. Diese Determinante ist nach Art. 18 einerseits gleich

$$(A_{\alpha\beta}A_{\gamma\delta} + A_{\alpha\gamma}A_{\delta\beta} + A_{\alpha\delta}A_{\beta\gamma})^2 \tag{26}$$

andererseits aber gleich $D^3 . D_{\alpha\beta\gamma\delta}$, wenn unter $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ diejenige $2\nu-4$-reihige schiefsymmetrische Determinante verstanden wird, die aus D durch Streichung der Zeilen und der Spalten mit den Indices $\alpha\beta\gamma\delta$ entsteht. Versteht man daher unter

$$(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} . P_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

dasjenige Pfaffsche Aggregat der Ordnung $2\nu-4$, das aus P durch Weglassung der Indices $\alpha\beta\gamma\delta$ entsteht, so ergiebt sich:

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta} = P^2_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{27}$$

Aus der Gleichheit der Ausdrücke (26) und $D^3 D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ folgt nun, wie wir behaupten, mit Rücksicht auf (24) und (27) durch beiderseitiges Ausziehen der Quadratwurzel:

$$P_{\alpha\beta}P_{\gamma\delta} + P_{\alpha\gamma}P_{\delta\beta} + P_{\alpha\delta}P_{\beta\gamma} = P \,.\, P_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{28}$$ [1])

Dafs in der That die Zeichen richtig gewählt sind, erhellt daraus, dafs sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite von (28) der Koeffizient des Produkts $a_{\alpha\beta} \,.\, a_{\gamma\delta}$ gleich $P^2_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist.

Die Identität (28) ist zunächst nur für $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ bewiesen. Bemerken wir aber, dafs die linke Seite von (28) wegen (20) jedesmal das Zeichen wechselt, wenn man zwei der Indices $\alpha\beta\gamma\delta$ vertauscht, und verschwindet, wenn zwei dieser Indices gleich sind, *und erteilen wir dem Symbol $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ dieselben beiden Eigenschaften*, so gilt die Gleichung (28) für vier ganz beliebige Indices der Reihe $1, 2 \,..\, 2\nu$.

23. Es sei jetzt die schiefsymmetrische Determinante D des Art. 16 von ungerader Ordnung $n = 2\nu + 1$. Setzen wir

$$(-1)^i \,.\, P_i \equiv (1, 2, \,..\, i-1, i+1 \,..\, 2\nu, 2\nu+1) \tag{29}$$

und verstehen wir unter $(-1)^{i+k} A_{ik}$ wiederum die $n-1$-reihige Unterdeterminante, die aus D durch Streichung der i^{ten} Zeile und der k^{ten} Kolonne hervorgeht, so ist offenbar

$$A_{ii} = P_i^2 \qquad (i = 1, 2 \,..\, n). \tag{30}$$

Ferner hat man identisch:

$$\sum_1^n {}^k a_{ik} P_k \equiv -\sum_1^n {}^k (ik)\,(k+1 \,..\, 2\nu+1, 1, 2, \,..\, k-1)$$
$$\equiv -(i, 1, 2 \,..\, 2\nu+1) \equiv 0,$$

da in dem zuletzt hingeschriebenen Pfaffschen Aggregat der Ordnung $2\nu + 2$ zwei Indices gleich sind. Verschwinden also nicht alle P_k, so sind die Minoren A_{i1}, $A_{i2} \,..\, A_{in}$ bez. den Ausdrücken P_1, $P_2 \,..\, P_n$ proportional, woraus mit Rücksicht auf (30) folgt:

$$A_{ik} \equiv A_{ki} \equiv P_i \,.\, P_k \qquad (i, k = 1, 2 \,..\, 2\nu + 1). \tag{31}$$

Es seien jetzt α, β, γ drei verschiedene Indices der Reihe $1, \,..\, n$, und zwar sei zunächst $\alpha < \beta < \gamma$. Wir verstehen dann unter dem Symbol

$$(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+1} \,.\, P_{\alpha\beta\gamma}$$

dasjenige Pfaffsche Aggregat der Ordnung $2\nu - 2$, das entsteht, wenn man in dem Symbol:

1) Vgl. Vivanti I 7.

$$(1, 2 \,..\, \alpha - 1, \alpha + 1 \,..\, 2\nu + 1)$$

die Ziffern β und γ wegläfst. Es ist dann $P_{\alpha\beta\gamma}$ der Koeffizient des Elements $a_{\beta\gamma}$ in der Entwickelung von P_α, ferner auch der Koeffizient von $a_{\alpha\gamma}$ in der Entwickelung von P_β, endlich der Koeffizient von $a_{\alpha\beta}$ in P_γ. Wir setzen ferner fest, dafs $P_{\alpha\beta\gamma}$ sein Zeichen wechseln soll, wenn irgend zwei seiner Indices vertauscht werden, und verschwinde, wenn zwei von den Indices gleich sind. Hierdurch ist das Symbol $P_{\alpha\beta\gamma}$ für drei ganz beliebige Indices der Reihe $1 \,..\, n$ definirt.

24. Dies vorausgeschickt, seien nun $\alpha\beta\gamma\delta$ vier verschiedene Indices der Reihe $1 \,..\, n$. Ferner sei D für den Augenblick eine beliebige n-reihige Determinante, und die $A_{\iota k}$ ihre Minoren. Wir betrachten dann die folgende vierreihige Hauptunterdeterminante des zu D adjungirten Schemas:

$$\begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha} & A_{\alpha\beta} & A_{\alpha\gamma} & A_{\alpha\delta} \\ A_{\beta\alpha} & A_{\beta\beta} & A_{\beta\gamma} & A_{\beta\delta} \\ A_{\gamma\alpha} & A_{\gamma\beta} & A_{\gamma\gamma} & A_{\gamma\delta} \\ A_{\delta\alpha} & A_{\delta\beta} & A_{\delta\gamma} & A_{\delta\delta} \end{vmatrix}. \tag{32}$$

Diese Determinante hat nach bekannten Sätzen den Wert:

$$D^3 \,.\, D_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

worin $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ diejenige $n - 4$-reihige Hauptunterdeterminante bedeutet, die aus D durch Streichung der Zeilen und Spalten mit den Indices $\alpha\beta\gamma\delta$ entsteht. Entwickeln wir aber (32) nach den Elementen der ersten Zeile, so erhalten wir den Ausdruck

$$D^2(A_{\alpha\alpha}\mathsf{A} - A_{\alpha\beta}\mathsf{B} + A_{\alpha\gamma}\mathsf{\Gamma} - A_{\alpha\delta}\nabla);$$

darin bedeuten A, B, $\mathsf{\Gamma}$, ∇ gewisse $n - 3$-reihige Unterdeterminanten von D, und zwar entsteht:

A aus D durch Streichung der Zeilen $\beta\gamma\delta$ und der Spalten $\beta\gamma\delta$;
$(-1)^{\alpha+\beta}\mathsf{B}$ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ $\alpha\gamma\delta$;
$(-1)^{\alpha+\gamma}\mathsf{\Gamma}$ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ $\alpha\beta\delta$;
$(-1)^{\alpha+\delta}\nabla$ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ $\alpha\beta\gamma$.

Man hat daher die für jede beliebige Determinante D gültige Identität:

$$A_{\alpha\alpha}\mathsf{A} - A_{\alpha\beta}\mathsf{B} + A_{\alpha\gamma}\mathsf{\Gamma} - A_{\alpha\delta}\nabla \equiv D \,.\, D_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{33}$$

Ist jetzt D eine schiefsymmetrische Determinante der Ordnung $2\nu + 1$, so verschwindet die rechte Seite von (33) identisch, und man hat nach dem vor. Art.:

$$\mathsf{A} = P^2_{\beta\gamma\delta}; \ \mathsf{B} = P_{\beta\gamma\delta} \,.\, P_{\gamma\delta\alpha}; \ \Gamma = P_{\beta\gamma\delta} P_{\delta\alpha\beta}; \ \nabla \equiv P_{\beta\gamma\delta} P_{\alpha\beta\gamma},$$

denn es ist z. B. B nichts anderes als der Koeffizient von $a^2_{\gamma\delta}$ in dem Ausdruck $A_{\beta\alpha}$ oder $P_\beta \,.\, P_\alpha$. Setzt man demnach

$$Q \equiv P_\alpha P_{\beta\gamma\delta} - P_\beta P_{\gamma\delta\alpha} + P_\gamma P_{\delta\alpha\beta} - P_\delta P_{\alpha\beta\gamma},$$

so verwandelt sich (33) in die erste der 4 folgenden Identitäten

$$P_\alpha P_{\beta\gamma\delta} \,.\, Q = 0, \quad - P_\beta P_{\gamma\delta\alpha} \,.\, Q = 0$$
$$P_\gamma P_{\delta\alpha\beta} \,.\, Q = 0; \quad - P_\delta P_{\alpha\beta\gamma} \,.\, Q = 0,$$

von denen die 3 letzten aus der ersten durch cyclische Permutation der Indices $\alpha\beta\gamma\delta$ erhalten werden. Durch Addition folgt hieraus $Q^2 \equiv 0$ oder also

$$(34) \qquad P_\alpha P_{\beta\gamma\delta} - P_\beta P_{\gamma\delta\alpha} + P_\gamma P_{\delta\alpha\beta} - P_\delta P_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$$ [1]

für 4 beliebige Indices der Reihe $1 \,..\, 2\nu + 1$; denn offenbar gilt diese Identität auch noch, wenn irgend zwei Indices gleich sind.

§ 3. Die Grassmann-Frobenius'schen Sätze über schiefsymmetrische Matrices.[2]

25. Wie in Art. 16 betrachten wir wiederum ein schiefsymmetrisches quadratisches Schema der Form:

$$(1) \qquad \begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & .\,. & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & .\,. & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .\,. & 0 \end{Vmatrix} \qquad (a_{ik} = - a_{ki})$$

wobei n gerade oder ungerade sein kann. Bezeichnen wir dann mit $\mu_1, \mu_2 \,..$ beliebige Indices der Reihe $1 \,..\, n$, so muſs es eine und nur eine ganze Zahl $2l$ geben von der Eigenschaft, daſs sämtliche aus den a_{ik} zu bildenden Pfaffschen Aggregate der Ordnung $2l + 2$:

$$(2) \qquad (\mu_1 \mu_2 \,..\, \mu_{2l+2}),$$

dagegen nicht sämtliche Aggregate der Ordnung $2l$:

$$(3) \qquad (\mu_1 \,..\, \mu_{2l})$$

verschwinden. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt unmittelbar daraus, daſs, wenn alle Aggregate (2) null sind, nach Art. 20 Gl. (18) dasselbe von allen Aggregaten von höherer als der $2l + 2^{\text{ten}}$ Ordnung gilt.

---

1) Vivanti I 9.

2) Vgl. die Note von Engel bei Grassmann I 483 ff.; Frobenius I 242—245.

Es versteht sich von selbst, daſs die soeben definirte Zahl $2l \leqq n$ ist. Im Falle $2l = n$ ist notwendig das Pfaffsche Aggregat

$$(1, 2 \,.\,.\, n)$$

von Null verschieden, da es das einzige Aggregat der Form (3) ist, das keine zwei gleichen Indices enthält. Da das Quadrat dieses Ausdrucks der aus den Elementen (1) gebildeten Determinante n^{ter} Ordnung gleich ist (Art. 18), so ist $2l$ *der Rang der Matrix* (1).

Es sei jetzt $2l < n$. Wir dürfen dann, um die Ideen zu fixiren, annehmen, daſs insbesondere das Pfaffsche Aggregat

$$(4) \qquad (1, 2, \,.\,.\, 2l)$$

nicht null ist. Es mögen nun die linken Seiten der linearen homogenen Gleichungen mit den Unbekannten x_i:

$$(5) \qquad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

bez. mit $X_1 X_2 \,.\,.\, X_n$ bezeichnet werden. Verstehen wir dann unter $2l + h$ irgend eine Zahl der Reihe $2l + 1, \,.\,.\, n$, und unter $\Sigma^{(c)}$ eine Summe, die erhalten wird, wenn man in dem rechts von Σ stehenden Ausdruck die Indices $1, 2, \,.\,.\, 2l, 2l + h$ nullmal, einmal, zweimal, $.\,.\, 2l$-mal cyclisch vertauscht und die entstehenden Terme addirt, so erhält man für jedes beliebige Wertsystem $x_1 \,.\,.\, x_n$ die Identität:

$$(6) \qquad \Sigma^{(c)} X_1 (2, 3, \,.\,.\, 2l, 2l + h) \equiv 0.$$

In der That, der Koeffizient der Variabeln x_k in dem links stehenden Ausdruck ist:

$$\Sigma^{(c)} (1, k)\,(2, 3 \,.\,.\, 2l, 2l + h)$$

oder also mit Rücksicht auf Art. 20 gleich:

$$(7) \qquad -(k, 1, 2 \,.\,.\, 2l, 2l + h);$$

und dieses Pfaffsche Aggregat ist von der Ordnung $2l + 2$, verschwindet daher der Annahme nach identisch.

Die Summe (6) enthält nun aber den Term

$$X_{2l+h} \,.\, (1, 2 \,.\,.\, 2l)$$

und da das Aggregat (4) nicht null ist, kann man sonach X_{2l+h} mittels (6) als ganzlineare homogene Funktion von $X_1, \,.\,.\, X_{2l}$ darstellen. Von den Gleichungen (5) sind daher die $n - 2l$ letzten eine Folge der $2l$ ersten, und diese sind offenbar linear unabhängig, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdot\,\cdot & a_{1,2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2l,1} & a_{2l,2} & \cdot\,\cdot & 0 \end{vmatrix}$$

dem Quadrat des Aggregats (4) gleich ist. Nach Art. 11 ist daher der Rang der Matrix (1) gleich $2l$ und wir haben die folgenden Sätze bewiesen:

„*Der Rang einer schiefsymmetrischen Matrix ist stets eine gerade Zahl.*"

„*Ist $2l$ der Rang einer schiefsymmetrischen Matrix, so befindet sich unter den nicht verschwindenden $2l$-reihigen Determinanten derselben mindestens eine Hauptunterdeterminante* (Art. 22)."

„*Verschwinden alle $2l+2$-reihigen Hauptunterdeterminanten einer schiefsymmetrischen Matrix, so sind ihre sämtlichen $2l+2$- und $2l+1$-reihigen Unterdeterminanten gleich null.*"

26. Ist das Pfaffsche Aggregat (4) nicht null, verschwinden dagegen alle Aggregate der Form (7), oder was dasselbe ist, alle Aggregate

$$(1, 2\,..\,2l, \varrho, \sigma), \quad (\varrho, \sigma = 2l+1, 2l+2, \,..\, n)$$

so sind nach dem vor. Art. die letzten $n-2l$ Gleichungen (5) eine Folge der $2l$ ersten, welch' letztere linear unabhängig sind. Nach Art. 11 können wir also den Satz aussprechen:

„*Ist eine $2l$-reihige Hauptunterdeterminante der schiefsymmetrischen Matrix* (1) *nicht null, verschwinden dagegen alle $2l+2$-reihigen Hauptunterdeterminanten, welche jene $2l$-reihige enthalten, so sind alle $2l+2$-reihigen Hauptunterdeterminanten von* (1) *null, und der Rang der Matrix* (1) *ist demnach $2l$.*

Um darnach den Rang $2l$ einer gegebenen schiefsymmetrischen Matrix (1) und gleichzeitig eine nicht verschwindende $2l$-reihige Hauptunterdeterminante zu finden, wähle man zunächst ein nicht verschwindendes Element $(ik) = a_{ik}$ aus, und suche zwei weitere Indices r, s zu ermitteln, derart, daſs das Pfaffsche Aggregat $(ikrs)$ nicht null ist. Ist dies unmöglich, so ist $2l = 2$; andernfalls bestimme man zwei weitere Indices u, v, derart, daſs das Aggregat $(ikrsuv)$ nicht null ist; ist dies unmöglich, so ist $2l = 4$; andernfalls suche man zwei weitere Indices etc.

Das vorige Theorem läſst sich folgendermaſsen verallgemeinern:

Sind

$$k_1 k_2 \,..\, k_{2l} \tag{8}$$

irgend $2l$ Indices der Reihe $1\,..\,n$, und verschwinden alle Pfaffschen Aggregate der Ordnung $2l+2l'$, welche die Ziffern (8) *enthalten, so verschwinden entweder überhaupt alle Pfaffschen Aggregate der Ordnung $2l+2l'$, die aus dem System* (1) *gebildet werden können, oder es ist das Aggregat*

$$(k_1 k_2 \,..\, k_{2l})$$

gleich null.

Dieser Satz, der für $l' = 1$ schon bewiesen ist, kann genau so wie das Theorem des Art. 8 durch den Schlufs von $l' - 1$ auf l' begründet werden, weshalb wir die nähere Ausführung des Beweises übergehen.

Aus dem vorhergehenden Satze ergiebt sich folgendes Korollar:

„*Verschwinden in einer schiefsymmetrischen Matrix* (1) *alle diejenigen* $2l + 2$-*reihigen Hauptunterdeterminanten, die Elemente der* σ^{ten} *Zeile und Kolonne enthalten, so verschwinden entweder alle* $2l + 2$-*reihigen Hauptunterdeterminanten von* (1) *oder alle Elemente der* σ^{ten} *Zeile und Spalte*".

Wir wollen diesen Satz indes auch noch direkt nachweisen.[1])

Natürlich können wir annehmen, dafs $2 < 2l + 2 < n$, da der Satz in allen andern Fällen trivial ist. Auch wollen wir, um die Ideen zu fixiren, $\sigma = 1$ setzen. Dann sind also der Annahme nach alle Aggregate der Form

$$(1 \mu_1 \mu_2 \,.\,.\, \mu_{2l+1})$$

null, und es ist zu zeigen, dafs entweder alle Elemente $(1, i)$ oder alle Ausdrücke der Form

$$(\mu_1 \mu_2 \,.\,.\, \mu_{2l+2}) \tag{9}$$

verschwinden, wenn unter den μ beliebige Indices der Reihe $1 \,.\,.\, n$ verstanden werden. Es seien nun $\mu_1 \,.\,.\, \mu_{2l+2}$ bestimmte Indices, und ϱ irgend eine der Zahlen

$$1, \mu_1 \mu_2 \,.\,.\, \mu_{2l+2};$$

dann ist nach Art. 19 und 20:

$$0 \equiv (\varrho, 1, \mu_1 \,.\,.\, \mu_{2l+2})$$

$$\equiv (\varrho, 1)(\mu_1 \,.\,.\, \mu_{2l+2}) + \sum_1^{2l+2}{}^{s} (\varrho, \mu_s)(\mu_{s+1} \,.\,.\, \mu_{2l+2}, 1, \mu_1 \,.\,.\, \mu_{s-1});$$

da die Summe rechts der Annahme nach verschwindet, so folgt

$$(\varrho, 1)(\mu_1 \mu_2 \,.\,.\, \mu_{2l+2}) = 0 \quad (\varrho = 1, \mu_1 \,.\,.\, \mu_{2l+2}). \tag{10}$$

Giebt es nun in der Reihe $1 \,.\,.\, n$ ein System von $2l + 2$ unter sich und von 1 verschiedenen Indices μ_ι derart, dafs das Aggregat (9) nicht null ist, so folgt aus (10):

$$(\mu_1, 1) = 0, \; (\mu_2, 1) = 0, \; (\mu_{2l+2}, 1) = 0. \tag{11}$$

Im Falle $n = 2l + 3$ verschwinden dann also alle Elemente der

1) Vgl. die Note Engel's bei Grassmann I 488.

ersten Zeile und Spalte von (1) und der Satz ist bewiesen. Ist $n > 2l + 3$ und μ_{2l+3} ein von $1, \mu_1 \,.\,.\, \mu_{2l+2}$ verschiedener Index, so wähle man aus den Zahlen $\mu_1 \,.\,.\, \mu_{2l+2}$ $2l$ Zahlen $\nu_1 \,.\, \nu_{2l}$ so aus, dafs das Pfaffsche Aggregat

$$(12) \qquad (\nu_1 \,.\,.\, \nu_{2l})$$

nicht null ist; dies ist natürlich stets möglich, wenn (9) nicht verschwindet. Dann hat man der Annahme nach

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (1, \mu_{2l+3}, \nu_1 \,.\,.\, \nu_{2l}) \\ &\equiv (1, \mu_{2l+3})(\nu_1 \,.\,.\, \nu_{2l}) + \sum_1^{2l}{}^s (1, \nu_s)(\nu_{s+1} \,.\, \nu_{2l}, \mu_{2l+3}, \nu_1 \,.\,.\, \nu_{s-1}). \end{aligned}$$

Da aber die Elemente $(1, \nu_s)$ wegen (11) alle null sind, während (12) nicht verschwindet, so folgt hieraus:

$$(1, \mu_{2l+3}) = 0$$

und es sind also in der That alle Elemente a_{1i} null, falls (9) nicht verschwindet, was zu zeigen war.

27. Wir betrachten nunmehr nebeneinander die drei folgenden Matrices, von denen die dritte mit (1) übereinstimmt:

$$(A)\begin{Vmatrix} a_{01} & a_{02} & .\,. & a_{0n} \\ 0 & a_{12} & .\,. & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & .\,. & a_{2n} \\ . & . & .\,. & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .\,. & 0 \end{Vmatrix}; \quad (B)\begin{Vmatrix} 0 & a_{01} & .\,. & a_{0n} \\ a_{10} & 0 & .\,. & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & .\,. & a_{2n} \\ . & . & .\,. & . \\ a_{n0} & a_{n1} & .\,. & 0 \end{Vmatrix}; \quad (C)\begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & .\,. & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & .\,. & a_{2n} \\ . & . & .\,. & . \\ . & . & .\,. & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .\,. & 0 \end{Vmatrix}.$$

Die Matrix (A) entsteht aus (C) durch Hinzufügung einer neuen Zeile $a_{01} \,.\,.\, a_{0n}$; die Matrix (B) aus (C) durch Hinzufügung einer neuen Zeile und Spalte. Die Matrices (B) und (C) sind quadratisch und werden beide als schiefsymmetrisch vorausgesetzt, d. h. man hat:

$$a_{ik} = -a_{ki} \qquad (i, k = 0, 1, 2 \,.\,.\, n).$$

Wir wollen nun die für die Theorie des Pfaffschen Problems wichtige Frage beantworten, wie die Rangzahlen der drei Matrices (A) (B) C) unter sich zusammenhängen.

Es sei $\varkappa$ der Rang von (A), ferner $\varkappa_1$ derjenige von (B), endlich $\varkappa_2$ der Rang von (C). Nach Art. 25 sind dann $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ gerade Zahlen, und man hat offenbar

$$(13) \qquad \varkappa_1 \geqq \varkappa \geqq \varkappa_2.$$

Da ferner durch Weglassen einer Zeile oder Spalte der Rang einer Matrix entweder ungeändert bleibt oder um eins vermindert wird

(Art. 10), so ist jede der beiden Differenzen

$$\varkappa_1 - \varkappa, \; \varkappa - \varkappa_2$$

entweder gleich eins oder gleich null.

Wir setzen nun $\varkappa_1 = 2\lambda$; dann ist $\varkappa_2$ entweder 2λ oder $2\lambda - 2$, und wir haben demnach zwei Fälle zu unterscheiden, die wir mit I und II bezeichnen wollen:

I. $\varkappa_1 = 2\lambda$, $\varkappa_2 = 2\lambda$, dann ist wegen (13) auch $\varkappa = 2\lambda$;

II. $\varkappa_1 = 2\lambda$, $\varkappa_2 = 2\lambda - 2$, dann ist wegen (13) $\varkappa = 2\lambda - 1$; denn $\varkappa$ kann höchstens um 1 kleiner als $\varkappa_1$ und höchstens um 1 grölser als $\varkappa_2$ sein.

Demnach findet der Fall I oder II statt, je nachdem $\varkappa$ gerade oder ungerade ist, und die Werte von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind durch Angabe von $\varkappa$ schon mitbestimmt; ist nämlich $\varkappa$ gerade, so ist $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$; ist aber $\varkappa$ ungerade, so ist $\varkappa_1 = \varkappa + 1$, und $\varkappa_2 = \varkappa - 1$. In allen Fällen hat man

$$\varkappa = \frac{1}{2}(\varkappa_1 + \varkappa_2).$$

28. Im Falle I können wir nach Art. 25, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, dafs das Pfaffsche Aggregat

$$(1, 2, .. 2\lambda) \tag{14}$$

nicht null sei. Damit dann der Fall I wirklich stattfinde, ist nach Art. 26 das Bestehen folgender Gleichungen

$$\begin{gathered}(1, 2, .. 2\lambda, \varrho, \sigma) = 0\\ (\varrho, \sigma = 0, 2\lambda + 1, 2\lambda + 2, .. n)\end{gathered} \tag{15}$$

notwendig und hinreichend.

Im Falle II können wir annehmen, dafs das Pfaffsche Aggregat:

$$(1, 2, .. 2\lambda - 2)$$

nicht null sei. Damit dann der Fall II stattfinde, ist nach Art. 26 notwendig und hinreichend, dafs die Gleichungen:

$$\begin{gathered}(1, 2, .. 2\lambda - 2, \varrho, \sigma) = 0\\ (\varrho, \sigma = 2\lambda - 1, 2\lambda, .. n)\end{gathered} \tag{16}$$

bestehen, während nicht alle Pfaffschen Aggregate der Form

$$(0, 1, 2, .. 2\lambda - 2, \sigma) \tag{17}$$

verschwinden. Da es uns freisteht, die Zeilen und Kolonnen von (C) nötigenfalls anders zu numeriren, so können wir demnach im Falle II, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, dafs die beiden Pfaffschen Aggregate

(18) $$(1, 2, .. 2\lambda - 2), \; (0, 1, 2, .. 2\lambda - 2, 2\lambda - 1)$$

von Null verschieden seien.

29. Ist im Falle I $n = 2\lambda$, so kommen die Bedingungsgleichungen (15) natürlich in Wegfall; ebenso treten im Falle II, wenn $n = 2\lambda - 1$ sein soll, die Bedingungsgleichungen (16) nicht auf. Sind also die Elemente a_{ik} unserer drei Matrices (A) (B) (C) nur den Bedingungen $a_{ik} = -a_{ki}$ unterworfen, im übrigen aber willkürlich, so wird, falls n gerade ist, der Fall I, falls dagegen n ungerade, der Fall II stattfinden, und beidemale die vorhin mit $\varkappa$ bezeichnete Zahl gleich n sein.

30. Aus den bisherigen Entwickelungen ergiebt sich, falls die Elemente a_{ik} unserer drei Matrices irgendwie gegeben sind, folgende Regel, um zu entscheiden, ob der Fall I oder II stattfindet, und gleichzeitig die Zahlen $\varkappa$ und λ zu bestimmen.

Man ermittele nach der Methode des Art. 26 den Rang $2l$ der Matrix (C), und gleichzeitig eine nicht verschwindende $2l$-reihige Hauptunterdeterminante

$$(k_1 k_2 \,..\, k_{2l})^2$$

derselben. Dann liegt der Fall I oder II vor, je nachdem alle Aggregate

$$(0, k_1, k_2 \,..\, k_{2l}, \sigma) \qquad (\sigma = 1, 2, .. n)$$

verschwinden oder nicht, und es ist in dem einen Falle $\varkappa = 2l$, $\lambda = l$, und in dem andern $\varkappa = 2l + 1$, $\lambda = l + 1$. Hinterher kann man dann, um mit den Bezeichnungen der vorigen Nummern in Einklang zu bleiben, die Zeilen und Spalten in den 3 Matrices so umordnen, dafs die Zahlen $k_1 k_2 \,..\, k_{2l}$ bez. mit $1, 2, , .. 2l$ übereinstimmen.

31. Wir nehmen zunächst an, dafs die oben mit $\varkappa$ bezeichnete Zahl gleich 2λ sei, dafs also die Elemente a_{ik} unserer drei Matrices (A), (B) und (C) den Bedingungen des Falles I genügen; nach Nr. 28 dürfen wir dann insbesondere voraussetzen, dafs das Pfaffsche Aggregat

$$P \equiv (1, 2, .. 2\lambda)$$

nicht null ist. Betrachten wir jetzt die $n + 1$ linearen Gleichungen

(19) $$* \quad a_{01}\xi_1 + a_{02}\xi_2 + \cdots + a_{0n}\xi_n = 0$$

(20) $$\begin{cases} a_{10}\xi_0 + \; * \; + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n = 0 \\ a_{20}\xi_0 + a_{21}\xi_1 + \; * \; + \cdots + a_{2n}\xi_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n0}\xi_0 + a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + \; * \; = 0 \end{cases}$$

mit den Unbekannten $\xi_0, \xi_1 \,..\, \xi_n$, so sind die Gleichung (19) und die letzten $n - 2\lambda$ Gleichungen (20) eine Folge der 2λ ersten Gleichungen (20), welch' letztere linear unabhängig sind, und nach $\xi_1, \xi_2 \,..\, \xi_{2\lambda}$ aufgelöst werden können.

Wir betrachten zu diesem Zwecke die Determinante:

$$D \equiv \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & .. & a_{1,2\lambda} \\ a_{21} & 0 & .. & a_{2,2\lambda} \\ . & . & . & . \\ a_{2\lambda,1} & a_{2\lambda,2} & .. & 0 \end{vmatrix} \equiv P^2$$

und bezeichnen mit A_{ik} ihre Minoren, ferner mit $D_{k\nu}$ diejenige 2λ-reihige Determinante, die aus D entsteht, indem man darin die Elemente der k^{ten} Spalte durch $a_{1\nu} a_{2\nu} \,..\, a_{2\lambda,\nu}$ ersetzt; dann folgt:

$$(21)\quad D \cdot \xi_k = - D_{k,2\lambda+1}\xi_{2\lambda+1} - D_{k,2\lambda+2}\xi_{2\lambda+2} - \cdot\cdot - D_{kn}\xi_n - D_{k0}\xi_0$$
$$(k = 1, 2, \,..\, 2\lambda).$$

Verstehen wir jetzt, ähnlich wie in Art. 21, unter dem Symbol

$$(-1)^{r+s+1} P_{rs},$$

falls $r < s$, dasjenige Pfaffsche Aggregat der Ordnung $2\lambda - 2$, das aus P durch Weglassung der Ziffern r und s entsteht, und setzen wir allgemein $P_{sr} = - P_{rs}$, so hat man nach Art. 21:

$$D_{k\nu} \equiv \sum_1^{2\lambda}{}^i a_{i\nu} A_{ik} \equiv P \cdot \sum_1^{2\lambda}{}^i a_{i\nu} P_{ik}.$$

Nun ist für $i < k$:

$$(-1)^{i+k+1} P_{ik} = (1 \,..\, i-1, i+1 \,..\, k-1, k+1 \,..\, 2\lambda)$$

oder also nach Art. 18

$$P_{ik} = (-1)^k (i+1 \,..\, k-1, k+1 \,..\, 2\lambda, 1 \,..\, i-1);$$

ferner hat man für $i > k$

$$P_{ik} = - P_{ki} = (-1)^{i+k} \cdot (1 \cdot\cdot k-1, k+1 \cdot\cdot i-1, i+1 \cdot\cdot 2\lambda)$$
$$= (-1)^k (i+1 \cdot\cdot 2\lambda, 1 \cdot\cdot k-1, k+1 \cdot\cdot i-1).$$

Setzt man diese Werte in den obigen Ausdruck für $D_{k\nu}$ ein, so erhält man eine 2λ-gliedrige Summe

$$(-1)^{k+1} P \cdot \sum_1^{2\lambda}{}^i (\nu i)(i+1 \cdot\cdot i-1);$$

die Ziffernfolge in dem Koeffizienten von (νi) ergiebt sich, indem man zuerst diejenigen Zahlen in der Folge:

$$1, 2, \ldots k-1, k+1 \ldots 2\lambda$$

die $> i$, sodann diejenigen, die $< i$ sind, der Reihenfolge nach hinschreibt.

Nach Art. 20 ist also:

$$\begin{aligned} D_{k\nu} &\equiv (-1)^{k+1} (\nu, 1, 2, \ldots k-1, k+1 \ldots 2\lambda) \,.\, P \\ &\equiv (1, 2, \ldots k-1, \nu, k+1 \ldots 2\lambda) \,.\, P. \end{aligned}$$

Setzen wir demnach

$$\Pi_{k\nu} \equiv (1, 2, \ldots k-1, \nu, k+1 \ldots 2\lambda)$$

d. h. ist $\Pi_{k\nu}$ dasjenige Pfaffsche Aggregat der Ordnung 2λ, das aus P entsteht, indem man die Ziffer k durch ν ersetzt, so können wir sofort die $n-2\lambda+1$ linear unabhängigen Lösungensysteme der linearen Gleichungen (19) (20) in der Form schreiben

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cccccccccc} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_{2\lambda} & \xi_{2\lambda+1} & \xi_{2\lambda+2} & \ldots & \xi_n & \xi_0 \end{array} \\ (22) & \left\{\begin{array}{cccccccccc} \Pi_{1,2\lambda+1} & \Pi_{2,2\lambda+1} & \ldots & \Pi_{2\lambda,2\lambda+1} & -P & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \Pi_{1,2\lambda+2} & \Pi_{2,2\lambda+2} & \ldots & \Pi_{2\lambda,2\lambda+2} & 0 & -P & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Pi_{1n} & \Pi_{2n} & \ldots & \Pi_{2\lambda,n} & 0 & 0 & \ldots & -P & 0 \end{array}\right. \\ (23) & \begin{array}{cccccccccc} \Pi_{10} & \Pi_{20} & \ldots & \Pi_{2\lambda,0} & 0 & 0 & \ldots & 0 & -P. \end{array} \end{array}$$

Hieraus folgt, wenn $n > 2\lambda$ vorausgesetzt wird:

Das lineare Gleichungensystem

$$(24) \qquad a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{in}\xi_n = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

$$(25) \qquad a_{01}\xi_1 + a_{02}\xi_2 + \cdots + a_{0n}\xi_n = 0$$

besitzt die $n-2\lambda$ linear unabhängigen Lösungensysteme (22), wobei natürlich die letzte, aus Nullen bestehende Spalte jetzt wegzulassen ist.

Anm. Es ist für spätere Anwendungen nützlich noch einmal hervorzuheben, daſs im Falle I die Gleichung (25) stets eine Folge der Gleichungen (20) und ebenso eine Folge der Gleichungen (24) ist.

32. Indem wir uns nunmehr der Betrachtung des Falles II zuwenden, setzen wir wie in Nr. 28 voraus, daſs $\varkappa = 2\lambda - 1$ und daſs die beiden Pfaffschen Aggregate (18) nicht null seien. Da der Rang der Matrix (A) jetzt durch Streichung der ersten Zeile sich ändert, so können nach Art. 13 die n linearen Gleichungen (20) nur durch die Annahme $\xi_0 = 0$ erfüllt werden. Wir haben also folgendes Gleichungensystem zu untersuchen:

$$(24) \qquad a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{in}\xi_n = 0 \qquad (i = 1 \ldots n).$$

Da die letzten $n-2\lambda+2$ dieser Gleichungen eine Folge der

$2\lambda - 2$ ersten sind, so ergiebt sich ein System von $n - 2\lambda + 2$ linear unabhängigen Lösungen wie in der vor. Nr. Setzt man also

$$P' = (1, 2, .. 2\lambda - 2)$$
$$\Pi'_{kv} = (1, 2, .. k - 1, v, k + 1 .. 2\lambda - 2)$$

so stellen die Grössensysteme:

$$(26) \qquad \begin{cases} \Pi'_{1, 2\lambda-1} & \Pi'_{2, 2\lambda-1} & .. & \Pi'_{2\lambda-2, 2\lambda-1} & -P' & 0 & .. & 0 \\ \Pi'_{1, 2\lambda} & \Pi'_{2, 2\lambda} & .. & \Pi'_{2\lambda-2, 2\lambda} & 0 & -P' & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \Pi'_{1n} & \Pi'_{2n} & .. & \Pi'_{2\lambda-2, n} & 0 & 0 & .. & -P' \end{cases}$$

$n - 2\lambda + 2$ linear unabhängige Lösungen von (24) dar.

Betrachten wir andererseits, immer noch unter der Annahme $\varkappa = 2\lambda - 1$, das System der $n + 1$ linearen Gleichungen (19) (20). Da hieraus auch jetzt wieder $\xi_0 = 0$ folgt, so nimmt dies System die Form (24) (25) an, und die Gleichung (25) ist offenbar keine Folge von (24). Natürlich besitzen die Gleichungen (24) (25) jetzt nur dann Lösungensysteme, für welche die ξ_ι nicht alle verschwinden, wenn $\varkappa < n$ ist, was wir fortan annehmen wollen. Setzen wir nun

$$Q = (0, 1 .. 2\lambda - 2, 2\lambda - 1)$$

und verstehen wir unter K_{kv} dasjenige Pfaffsche Aggregat der Ordnung 2λ, das aus Q hervorgeht, wenn darin die Ziffer k durch v ersetzt wird, so besitzt das Gleichungensystem (24) (25) die folgenden $n - 2\lambda + 1$ linear unabhängigen Lösungensysteme:

$$(27) \qquad \begin{cases} K_{1, 2\lambda} & K_{2, 2\lambda} & .. & K_{2\lambda-1, 2\lambda} & -Q & 0 & .. & 0 \\ K_{1, 2\lambda+1} & K_{2, 2\lambda+1} & .. & K_{2\lambda-1, 2\lambda+1} & 0 & -Q & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ K_{1n} & K_{2n} & .. & K_{2\lambda-1, n} & 0 & 0 & .. & -Q \end{cases}$$

In der That hat man im Falle II nach Art. 28 identisch:

$$(k, 0, 1, 2 .. 2\lambda - 1, v) = 0 \qquad (k = 0, 1, .. n;\; v = 1, 2, .. n)$$

oder also nach Art. 20:

$$(28) \qquad 0 \equiv (k, 0)\,(1, 2 .. 2\lambda - 1, v) + \\ + \sum_1^{2\lambda-1}{}^i (ki)\,(i + 1 .. 2\lambda - 1, v, 0, 1 .. i - 1) + \\ + (kv)\,(0, 1 .. 2\lambda - 1).$$

Da nun $(1, 2 .. 2\lambda - 1, v)$ der Voraussetzung nach null ist, ferner

$$(i + 1, .. 2\lambda - 1, v, 0, 1 .. i - 1) \equiv -K_{\iota v},$$

so drückt wegen $a_{ik} = (ik)$ die Identität (28) in der That aus, daſs jedes der Gröſsensysteme (27) alle Gleichungen (24) (25) erfüllt.

Durch eine ganz ähnliche Rechnung hätten wir natürlich auch erweisen können, daſs die Systeme (26) den Gleichungen (24), und daſs im Falle I die Systeme (22) und (23) den Relationen (19) (20) genügen.

33. Es versteht sich von selbst, daſs jedes der Systeme (27) eine lineare Kombination der $n - 2\lambda + 2$ Gröſsensysteme (26) sein muſs, und zwar kann, wie der Anblick der beiden Schemata lehrt, die $i-1^{\text{te}}$ Zeile in (27) nur durch lineare Kombination der ersten und der i^{ten} Zeile in (26) entstehen.

Man muſs also haben:

$$(29)\quad \begin{aligned} K_{h,2\lambda+s} &= \varrho_s \Pi'_{h,2\lambda+s} + \sigma_s \Pi'_{h,2\lambda-1} \qquad &(s = 0, 1 \,.\,.\, n - 2\lambda;\\ K_{2\lambda-1,2\lambda+s} &= \qquad\qquad\quad - \sigma_s P' & h = 1, 2 \,.\,.\, 2\lambda - 2)\\ -Q &= -\varrho_s P'. \end{aligned}$$

Die zwei letzten Gleichungen bestimmen die Werte ϱ_s und σ_s; durch deren Substitution in (29) wird die folgende Gleichung erhalten:

$$(30)\qquad P' \cdot K_{h,2\lambda+s} = Q \cdot \Pi'_{h,2\lambda+s} - K_{2\lambda-1,2\lambda+s}\, \Pi'_{h,2\lambda-1}$$

die für alle Indices

$$h = 1, 2, \,.\,.\, 2\lambda - 2; \quad s = 0, 1, \,.\,.\, n - 2\lambda$$

identisch erfüllt sein muſs. Dies folgt aber auch unmittelbar aus dem Satz des Art. 24. In der That, betrachten wir die $2\lambda + 1$ Indices

$$(31)\qquad 0, 1, 2, \,.\,.\, 2\lambda - 2, 2\lambda - 1, 2\lambda + s$$

und bezeichnen wir mit $(-1)^{\alpha} P_{\alpha}$ dasjenige Pfaffsche Aggregat der Ordnung 2λ, dessen Indices mit der Reihe (31) übereinstimmen, nachdem daraus die Zahl α fortgelassen ist, ferner mit

$$(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+1} \cdot P_{\alpha\beta\gamma} \qquad (\alpha < \beta < \gamma)$$

das Pfaffsche Aggregat der Ordnung $2\lambda - 2$, dessen Indicesreihe aus (31) durch Streichung der Zahlen α, β, γ entsteht, und setzen wir wie früher fest, daſs der Ausdruck $P_{\alpha\beta\gamma}$ jedesmal sein Zeichen wechsele, wenn zwei seiner Indices vertauscht werden, so gilt nach dem citirten Art. folgende Identität:

$$P_{\alpha} P_{\beta\gamma\delta} - P_{\beta} P_{\gamma\delta\alpha} + P_{\gamma} P_{\delta\alpha\beta} - P_{\delta} P_{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Setzen wir hierin $\alpha = 0$, $\beta = h$, $\gamma = 2\lambda - 1$, $\delta = 2\lambda + s$ und beachten, daſs unter den Voraussetzungen des Falles II das Pfaffsche Aggregat P_0 gleich null ist, so ergiebt sich ohne weiteres die Identität (30).

34. Das erste der Gröſsensysteme (26) erfüllt offenbar die Gleichung (25) nicht; denn der Ausdruck

$$a_{01}\Pi'_{1,2\lambda-1} + a_{02}\Pi'_{2,2\lambda-1} + \cdots + a_{0,2\lambda-2}\Pi'_{2\lambda-2,2\lambda-1} - a_{0,2\lambda-1}\cdot P'$$

ist mit $-Q$ identisch. Wir können daher statt des Schemas (26) auch das erste der Systeme (26) und die $n-2\lambda+1$ Gröſsensysteme (27) als linear unabhängige Lösungensysteme der Gleichungen (24) benutzen, und man erhält das allgemeinste Lösungensystem von (24), das der Bedingung (25) nicht genügt, in der Form:

$$\begin{aligned}
\xi_k &= \varrho\,\Pi'_{k,2\lambda-1} + \sum_0^{n-2\lambda}{}^h \varrho_h K_{k,2\lambda+h} \\
\xi_{2\lambda-1} &= -\varrho P' + \sum_0^{n-2\lambda}{}^h \varrho_h K_{2\lambda-1,2\lambda+h} \\
\xi_{2\lambda+s} &= -\varrho_s Q
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix} k = 1,2\,..\,2\lambda-2 \\ s = 0,1\,..\,n-2\lambda \end{pmatrix}$$

worin ϱ, ϱ_0, $\varrho_1\,..\,\varrho_{n-2\lambda}$ willkürliche Gröſsen bedeuten, von denen die erste nicht verschwindet.

§ 4. Ein Determinantensatz von Sylvester.[1]

35. Wir betrachten eine n-reihige Determinante:

$$\Omega = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und eine ν-reihige Unterdeterminante derselben:

$$\omega = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1\nu} \\ . & . & . & . \\ a_{\nu1} & a_{\nu2} & .. & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} \qquad (\nu < n).$$

Es werde nun $\mu = n - \nu$ gesetzt und mit W_{ik} die nachstehende $\nu+1$-reihige Unterdeterminante von Ω bezeichnet:

$$W_{ik} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1\nu} & a_{1,\nu+k} \\ . & . & . & . \\ a_{\nu1} & .. & a_{\nu\nu} & a_{\nu,\nu+k} \\ a_{\nu+i,1} & .. & a_{\nu+i,1} & a_{\nu+i,\nu+k} \end{vmatrix} \qquad (i, k = 1, 2\,..\,\mu);$$

dann gilt nach *Sylvester* folgende Identität:

1) Sylvester I; Frobenius III.

$$
(1) \qquad \begin{vmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdot\,\cdot & W_{1\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ W_{\mu 1} & W_{\mu 1} & \cdot\,\cdot & W_{\mu\mu} \end{vmatrix} \equiv \omega^{\mu-1}\cdot\Omega.
$$

Bedeutet nämlich $(-1)^{i+k}\omega_{\iota k}$ die $\nu-1$-reihige Determinante, die aus ω durch Streichung der i^{ten} Zeile und k^{ten} Spalte hervorgeht, und entwickelt man die Determinante $W_{\iota k}$ nach den Elementen der letzten Zeile und Spalte, so folgt:

$$
W_{\iota k} = a_{\nu+i,\,\nu+k}\,\omega - \sum_{1}^{\nu}{}^{s}\sum_{1}^{\nu}{}^{t}\,\omega_{st}\,a_{\nu+i,\,t}\cdot a_{s,\,\nu+k}.
$$

Schreibt man daher zur Abkürzung:

$$
A_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha 1}a_{\nu+\beta,1} + \omega_{\alpha 2}a_{\nu+\beta,2} + \cdot\cdot + \omega_{\alpha\nu}a_{\nu+\beta,\nu}
$$

$$
B_{\alpha\beta} = \omega_{1\alpha}a_{1,\nu+\beta} + \omega_{2\alpha}a_{2,\nu+\beta} + \cdot\cdot + \omega_{\nu\alpha}a_{\nu,\nu+\beta}
$$

$$
(\alpha = 1\,.\,.\,\nu;\ \beta = 1\,.\,.\,\mu),
$$

und berücksichtigt man die Identitäten:

$$
\sum_{1}^{\nu}{}^{\alpha}\, a_{\alpha,\nu+\gamma}A_{\alpha\beta} - \omega\cdot a_{\nu+\beta,\nu+\gamma} \equiv - W_{\beta\gamma}
$$

$$
\sum_{1}^{\nu}{}^{\alpha}\, a_{\alpha\delta}A_{\alpha\beta} \quad - \omega\cdot a_{\nu+\beta,\delta} \quad \equiv 0 \qquad (\delta \leqq \nu),
$$

so liefert die spaltenweise Komposition[1]) der Matrix Ω mit dem Schema:

$$
(2) \qquad \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \cdot\,\cdot & \omega_{1\nu} & A_{11} & A_{12} & \cdot\,\cdot & A_{1\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \omega_{\nu 1} & \omega_{\nu 2} & \cdot\,\cdot & \omega_{\nu\nu} & A_{\nu 1} & A_{\nu 2} & \cdot\,\cdot & A_{\nu\mu} \\ 0 & 0 & \cdot\,\cdot & 0 & -\omega & 0 & \cdot\,\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot\,\cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot\,\cdot & -\omega \end{vmatrix}
$$

---

1) Sind

$$
|\,a_{ik}\,|;\quad |\,b_{ik}\,| \qquad (i,k = 1\,.\,.\,n)
$$

zwei n-reihige Determinanten, so ist ihr Produkt jeder der nachstehenden 4 Determinanten gleich

$$
|\,\alpha_{ik}\,|;\quad |\,\alpha'_{ik}\,|;\quad |\,\alpha''_{ik}\,|;\quad |\,\alpha'''_{ik}\,| \qquad (i,k = 1\,.\,.\,n),
$$

wenn gesetzt wird:

$$
\alpha_{ik} \equiv \sum_{1}^{n}{}^{s} a_{is}b_{ks};\quad \alpha'_{ik} = \sum_{1}^{n}{}^{s} a_{is}b_{sk};\quad \alpha''_{ik} = \sum_{1}^{n}{}^{s} a_{si}b_{ks};\quad \alpha'''_{ik} = \sum_{1}^{n}{}^{s} a_{si}b_{sk},
$$

und man sagt, die erste dieser 4 Determinanten entsteht durch zeilenweise, die letzte durch spaltenweise Komposition der beiden Determinanten $|\,a_{ik}\,|\,|\,b_{\iota k}\,|$.

die nachstehende Determinante:

$$(3)\quad \begin{vmatrix} \omega & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \omega & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & \omega & 0 & 0 & .. & 0 \\ B_{11} & B_{21} & .. & B_{\nu 1} & -W_{11} & -W_{21} & .. & -W_{\mu 1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ B_{1\mu} & B_{2\mu} & .. & B_{\nu\mu} & -W_{1\mu} & -W_{2\mu} & .. & -W_{\mu\mu} \end{vmatrix}.$$

Da nun die Determinanten (2) und (3) bezw. folgenden Ausdrücken gleich sind:

$$(-1)^{\mu}\omega^{\nu-1+\mu}; \quad (-1)^{\mu}\cdot |W_{ik}|\cdot\omega^{\nu}$$

so ist die Richtigkeit der Identität (1) nachgewiesen.

36. Wir nehmen jetzt an, daſs die Determinante Ω schiefsymmetrisch sei, und schreiben $2n$, 2μ, 2ν bezw. statt n, μ, ν. Ferner setzen wir:

$$P \equiv (1, 2 \,..\, 2\nu)$$

$$[ik] \equiv (1, 2, ..\, 2\nu,\ 2\nu + i,\ 2\nu + k) \equiv -[ki].$$

Man hat dann, wie leicht ersichtlich:

$$\omega \equiv P^2, \quad W_{ik} \equiv P\cdot[ik],$$

und die Identität (1) nimmt folgende Form an:

$$(4)\quad P^{2\mu}\begin{vmatrix} 0 & [12] & .. & [1,2\mu] \\ [21] & 0 & .. & [2,2\mu] \\ . & . & . & . \\ [2\mu,1] & [2\mu,2] & .. & 0 \end{vmatrix} \equiv P^{4\mu-2}(1, ..\, 2\nu, 2\nu+1, ..\, 2n)^2.$$

Bezeichnen wir jetzt dasjenige Pfaffsche Aggregat der Ordnung 2μ, das aus den Elementen $[ik]$ genau ebenso gebildet wird, wie der Ausdruck $(1 \,..\, 2\nu)$ aus den Gröſsen (ik), mit dem Symbol:

$$[1, 2 \,..\, 2\mu],$$

so ist die in (4) links stehende Determinante dem Quadrat dieses Ausdrucks gleich, und die Identität (4) liefert daher nach Ausziehung der Quadratwurzel die Relation:

$$(5)\qquad [1, 2, \cdot\cdot\, 2\mu] \equiv P^{\mu-1}\cdot(1, 2 \cdot\cdot\, 2\nu, 2\nu+1 \cdot\cdot\, 2n).$$

Daſs das Vorzeichen richtig gewählt wurde, erkennt man daraus, daſs der Koeffizient des Ausdrucks $(2\nu + 1, 2\nu + 2 \,..\, 2n)$ auf beiden Seiten gleich P^{μ} ist.

Kapitel II.

Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und Systeme Pfaffscher Gleichungen.

§ 1. Zur Theorie der Funktionen von n Veränderlichen.

37. Wir wollen in diesem § einige fundamentale Definitionen und Sätze aus der Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher zusammenstellen, ohne indes auf die Beweise näher einzugehen.

Es sei eine n-fach unendliche Reihe der Form

$$(1)\qquad \sum_0^\infty{}^\alpha \sum_0^\infty{}^\beta \cdots \sum_0^\infty{}^\gamma c_{\alpha\beta\ldots\gamma}(x_1 - x_1^0)^\alpha (x_2 - x_2^0)^\beta \cdots (x_n - x_n^0)^\gamma$$

vorgelegt, in der die $c_{\alpha\beta\ldots\gamma}$ und die $x_1^0 \ldots x_n^0$ irgend welche komplexe Konstante, die $x_1 \ldots x_n$ komplexe Variable bedeuten. Dann lassen sich immer n reelle positive Zahlen $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n$ angeben, derart, dafs die Reihe (1) für jedes komplexe Wertsystem $x_1 x_2 \ldots x_n$, das den Bedingungen

$$(2)\qquad |x_1 - x_1^0| < \varrho_1; \quad |x_2 - x_2^0| < \varrho_2 \ldots; \quad |x_n - x_n^0| < \varrho_n \text{ [1]}$$

genügt, konvergirt, dagegen für jedes Wertsystem $x_1 \ldots x_n$, das *eine* der Ungleichungen

$$|x_\iota - x_\iota^0| > \varrho_i$$

erfüllt, divergirt. Die ϱ_i können teilweise oder alle gleich $+\infty$ sein; in dem letzteren Falle konvergirt die Reihe (1) „*beständig*“, d. h. für jedes endliche Wertsystem der x_i. Verschwinden einige ϱ_i, so sind die zugehörigen Ungleichungen (2) durch Gleichungen zu ersetzen. Ist keine der Zahlen ϱ_i null, so nennen wir die Reihe (1) „*eine gewöhnliche Potenzreihe der n Gröfsen $x_1 - x_1^0 \ldots x_n - x_n^0$.*“ Eine solche Reihe werden wir häufig durch das Symbol

$$\mathfrak{P}(x_1 - x_1^0,\, x_2 - x_2^0 \ldots x_n - x_n^0)$$

bezeichnen.

Anstatt: „das Wertsystem“

$$(3)\qquad x_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0$$

sagen wir auch „*die Stelle* $x_1^0 \ldots x_n^0$“. Den Inbegriff aller Wertsysteme

---

1) Ist x eine komplexe Gröfse von der Form $\xi + \eta\sqrt{-1}$, so wird die positive Quadratwurzel $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ der „absolute Betrag“ von x genannt, und mit $|x|$ bezeichnet.

$x_1 \,.\,.\, x_n$, die den Ungleichungen (2) genügen, nennt man den „*Konvergenzbezirk*“ der Reihe (1) oder auch „*die Umgebung der Stelle* (3)“.

Wir sagen ferner: „*Die Funktion $f(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)$ ist an der Stelle* (3) *regulär*“, wenn sie sich in der Umgebung der Stelle (3) durch eine gewöhnliche Potenzreihe der n Gröſsen $x_i - x_i{}^0$ „darstellen“ läſst, oder anders ausgedrückt, wenn sie sich in eine gewöhnliche Potenzreihe dieser n Gröſsen „entwickeln“ läſst; damit soll gesagt sein, daſs eine gewöhnliche Potenzreihe (1) existirt, die für jedes Wertsystem $x_1 \,.\,.\, x_n$ ihres Konvergenzbereichs die Summe $f(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)$ besitzt. Es giebt dann auch, falls f in dem genannten Bereich eindeutig ist, nur eine einzige Potenzreihe dieser Art. Der erste Koeffizient $c_{00\;.\;0}$ der Reihe (1) stimmt mit dem Wert überein, den f an der Stelle (3) annimmt.

Sind mehrere Funktionen

$$(4) \qquad f_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) \qquad (i = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

gegeben, die alle an der Stelle (3) regulär sind, wird ferner der Konvergenzbereich der Reihe

$$(5) \qquad \mathfrak{P}_i(x_1 - x_1{}^0, \,.\,.\, x_n - x_n{}^0)$$

welche die Funktion f_i darstellt, durch die Ungleichungen

$$|\, x_1 - x_1{}^0 \,| < \varrho_1{}^{(i)} \,.\,.\, |\, x_n - x_n{}^0 \,| < \varrho_n{}^{(i)}$$

definirt, und ist ϱ_k die kleinste der positiven Zahlen

$$\varrho_k{}^{(1)}, \; \varrho_k{}^{(2)} \,.\,.\, \varrho_k{}^{(r)},$$

so bezeichnen wir als „*den gemeinsamen Konvergenzbezirk der Reihen* (5)“ oder auch als *die Umgebung der Stelle* (3) wiederum den Inbegriff aller Wertsysteme $x_1 \,.\,.\, x_n$, die den Ungleichungen (2) genügen.

Wo immer wir im Lauf dieser Vorlesungen mehrere Funktionen (4) gleichzeitig betrachten, machen wir jedesmal implicite oder explicite die Annahme, daſs eine Stelle (3) existirt, an der alle f_i regulär sind.

38. Wir bringen noch folgende Thatsachen in Erinnerung.

1) Eine Funktion $f(x_1 \,.\,.\, x_n)$, die an der Stelle (3) regulär ist, verschwindet dann und nur dann „*identisch*“, d. h. für jedes Wertsystem x_i in der Umgebung von (3), wenn in der Potenzreihe (1), durch die f dargestellt wird, alle Koeffizienten $c_{\alpha\beta\,.\,\gamma}$ null sind.

2) Ist f an der Stelle (3) regulär, so gilt dasselbe von jeder Stelle $x_1' \,.\,.\, x_n'$, die der Umgebung von (3) angehört.

Aus diesen beiden Sätzen folgt leicht:

3) Sind mehrere Funktionen $f_1 \,.\,.\, f_r$ vorgelegt, die alle an der Stelle (3) regulär sind, und von denen keine identisch verschwindet, so läſst

sich in der Umgebung von (3) (und zwar auf unbegrenzt viele Arten) eine Stelle $x_1' \ldots x_n'$ auswählen, an der alle f_i regulär sind und *keine* verschwindet.

4) Ist eine Funktion f an der Stelle (3) regulär, so gilt dasselbe von allen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ etc.; und man erhält die Reihenentwickelungen dieser Ableitungen einfach durch gliedweise Differentiation der Reihe (1), durch die die Funktion f in der Umgebung von (3) dargestellt wird; die Koeffizienten $c_{\alpha\beta\ldots\gamma}$ dieser Reihe sind dann durch die Formel

$$c_{\alpha\beta\ldots\gamma} = \frac{1}{\alpha!\,\beta!\ldots\gamma!}\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots+\gamma} f}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \ldots \partial x_n^\gamma}\right)_{x_1 = x_1^0 \ldots x_n = x_n^0}$$

gegeben.

5) Sind die Funktionen f und φ an der Stelle (3) regulär, und verschwindet φ daselbst nicht, so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{\varphi}$$

an der Stelle (3) regulär.

Dieser Satz ist ein Spezialfall des folgenden:

6) Bedeutet

$$\Phi \equiv \mathfrak{P}(f_1 - f_1^0, f_2 - f_2^0, \ldots f_r - f_r^0)$$

eine gewöhnliche Potenzreihe der r eingeklammerten Gröfsen, und ersetzt man die f_i durch Funktionen der Variabeln x, die an der Stelle (3) alle regulär sind und daselbst bezw. die Werte $f_1^0 \ldots f_n^0$ besitzen, so verwandelt sich Φ in eine Funktion der x, die an der Stelle (3) gleichfalls regulär ist.

Beispielsweise ist jede ganzrationale Funktion der f_i mit konstanten Koeffizienten wiederum eine an der Stelle (3) reguläre Funktion der x.

39. Die Funktionen $f_1 f_2 \ldots f_n$ heifsen „*unabhängig*“, wenn keine Relation der Form

$$f_i = \varphi(f_1 \ldots f_{i-1}, f_{i+1} \ldots f_n)$$

identisch, d. h. für alle Wertsysteme $x_1 \ldots x_n$ eines gewissen Bereiches (2) besteht. Dazu ist notwendig und hinreichend, dafs die Determinante:

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwinde. Diese Determinante heifst die „*Funktional-*

determinante der Funktionen $f_1 \ldots f_n$ hinsichtlich $x_1 \ldots x_n$“ und soll gelegentlich durch das Symbol

$$\begin{pmatrix} f_1 f_2 \ldots f_n \\ x_1 x_2 \ldots x_n \end{pmatrix}$$

bezeichnet werden. Sind die unabhängigen Funktionen f_ι alle an der Stelle (3) regulär, so gilt nach den Sätzen 4) und 6) des vor. Art. dasselbe von ihrer Funktionaldeterminante, und nach Satz 3) dürfen wir annehmen, dafs die letztere an der Stelle (3) nicht verschwindet. Schreiben wir jetzt f_i^0 statt $f_\iota(x_1^0 \ldots x_n^0)$, so läfst sich das Gleichungensystem

$$f_i = f_i^0 \qquad (i = 1 \ldots n)$$

in folgender Weise auflösen:

$$x_i - x_\iota^0 = \mathfrak{P}_\iota(f_1 - f_1^0, \ldots f_n - f_n^0) \cdot \qquad (i = 1 \ldots n).$$

Die $\mathfrak{P}_i$ sind dabei gewöhnliche Potenzreihen, die an der Stelle $f_1^0 \ldots f_n^0$ alle verschwinden.

Die r Funktionen $f_1 \ldots f_r$ $(r \leqq n)$ heifsen *„unabhängig“*, wenn keines der f sich als Funktion der übrigen f_i allein ausdrücken läfst. Dazu ist notwendig und hinreichend, dafs in der r zeiligen Matrix:

$$(7) \qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

nicht alle r-reihigen Determinanten identisch verschwinden. Die Matrix (7) heifst die *„Funktionalmatrix* der Funktionen f hinsichtlich $x_1 \ldots x_n$“. Ist insbesondere diejenige Determinante von (7), die aus den ersten r Spalten besteht, nicht null, so sagen wir: *„die Funktionen $f_1 \ldots f_r$ sind hinsichtlich der Variabeln $x_1 \ldots x_r$ unabhängig“*.

Es sei nun allgemeiner ϱ der Rang der Matrix (7), d. h. die Ordnung der höchsten nicht identisch verschwindenden Unterdeterminanten; die Zahl r darf jetzt auch $> n$ sein. Wir können dann, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, dafs insbesondere die Determinante

$$(8) \qquad \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right| \quad (i, k = 1, 2 \ldots \varrho)$$

nicht identisch null sei; in der That läfst sich dies immer dadurch erreichen, dafs wir die f_i und die x_i von vorneherein geeignet numeriren. Ist dann $x_1^0 \ldots x_n^0$ eine Stelle, an der alle f_i regulär sind, so können wir nach dem Satz 3) des Art. 38 annehmen, dafs die Determinante (8) an dieser Stelle nicht verschwinde. Ist dann wieder

$$f_i^0 = f_i(x_1^0 \,..\, x_n^0)$$

so lassen sich die Gleichungen

$$f_i = f_i^0 \qquad (i = 1, 2 \,..\, \varrho)$$

in folgender Form auflösen:

(9) $$x_i - x_i^0 = \mathfrak{P}_i(f_1 - f_1^0, \,..\, f_\varrho - f_\varrho^0, x_{\varrho+1} - x_{\varrho+1}^0 \,..\, x_n - x_n^0)$$
$$(i = 1, 2 \,..\, \varrho)$$

worin die $\mathfrak{P}_i$ gewöhnliche Potenzreihen der n Gröfsen

(10) $$f_1 - f_1^0 \,..\, f_\varrho - f_\varrho^0, \; x_{\varrho+1} - x_{\varrho+1}^0 \,..\, x_n - x_n^0$$

bedeuten und an der Stelle $f_1^0 \,..\, f_\varrho^0$, $x_{\varrho+1}^0 \,..\, x_n^0$ alle verschwinden. Substituiren wir die so erhaltenen Ausdrücke (9) für $x_1 \,..\, x_\varrho$ in die noch übrigen Funktionen $f_{\varrho+1} \,..\, f_r$, so verwandeln sich diese nach Satz 6) Art. 38 in gewöhnliche Potenzreihen der Gröfsen (10), aus denen aber die $x_{\varrho+1} \,..\, x_n$ vollständig herausfallen, d. h. man hat Relationen der Form:

$$f_{\varrho+h} = f_{\varrho+h}^0 + \mathfrak{P}_h'(f_1 - f_1^0, \,..\, f_\varrho - f_\varrho^0) \quad (h = 1 \,..\, r - \varrho)$$

worin die $\mathfrak{P}_h'$ an der Stelle $f_1^0 \,..\, f_\varrho^0$ verschwinden; diese Relationen bestehen identisch für alle Wertsysteme $x_1 \,..\, x_n$ in der Umgebung der Stelle (3); d. h. von den Funktionen $f_1 \,..\, f_r$ lassen sich die $r - \varrho$ letzten als Funktionen der ϱ ersten ausdrücken, und diese sind hinsichtlich $x_1 \,..\, x_\varrho$ unabhängig. Diesen Sachverhalt drücken wir dadurch aus, dass wir sagen: „*Die r Funktionen $f_1 \,..\, f_r$ reduziren sich auf ϱ unabhängige*“.

Damit letzteres der Fall sei, ist übrigens nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, dafs der Rang der Funktionalmatrix (7) gleich ϱ sei.

40. Wir sagen, ein Wertsystem $x_1^0 \,..\, x_n^0$ „*genügt*“ den Gleichungen

(11) $$f_i(x_1 x_2 \,..\, x_n) = 0 \qquad (i = 1 \,..\, r;\; r \leq n)$$

oder es „erfüllt“ („befriedigt“) diese Relationen, wenn alle f_i an der Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ regulär sind und daselbst verschwinden. Wenn wir im Folgenden ein Gleichungensystem der Form (11) betrachten, so setzen wir jedesmal implicite die Existenz wenigstens *eines* Wertsystems $x_1^0 \,..\, x_n^0$ voraus, das die Relationen (11) befriedigt, *und für welches nicht alle r-reihigen Determinanten der Matrix* (7) *null sind.*

Wir sagen in diesem Falle, *das Gleichungensystem ist an der Stelle x_i^0 regulär.*

Erfüllen die r Relationen (11) die genannte Bedingung, so bezeichnen wir sie kurz als *„ein r-gliedriges Gleichungensystem"*, oder auch als *„ein System von r unabhängigen Gleichungen"*.[1])

Betrachten wir z. B. *eine* Gleichung

$$(12) \qquad \varphi(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) = 0$$

so nehmen wir immer implicite an, dafs ein Wertsystem $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ existirt, das (12) erfüllt, ohne dafs alle Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ für $x_1 = x_1^0 \,.\,.\, x_n = x_n^0$ verschwinden. Durch diese Festsetzung werden Gleichungen wie die folgende:

$$x_1^2 = 0$$

die nicht auf ihre einfachste Form $x_1 = 0$ gebracht ist, von der Betrachtung prinzipiell ausgeschlossen.

Die eben genannte Bedingung ist natürlich für jede einzelne der Gleichungen (11) erfüllt, wenn die letzteren nach unserer Bezeichnungsweise ein r-gliedriges Gleichungensystem bilden.

Ist das System (11) an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ regulär, und ist insbesondere diejenige Determinante des Schemas (7), die aus den r ersten Spalten besteht, an dieser Stelle nicht null, so kann man die Relationen (11) wie folgt auflösen:

$$(13) \quad x_i - x_i^0 = \overline{\mathfrak{P}}_i(x_{r+1} - x_{r+1}^0,\, x_{r+2} - x_{r+2}^0 \,.\,.\, x_n - x_n^0) \quad (i = 1 \,.\,.\, r)$$

wo die $\overline{\mathfrak{P}}_i$ für $x_{r+1} = x_{r+1}^0 \,.\,.\, x_n = x_n^0$ alle verschwinden. Substituirt man die so erhaltenen Ausdrücke für $x_1 \,.\,.\, x_r$ in die Funktionen f_i, so verwandeln sich diese in identisch verschwindende Funktionen.

Im Falle $r < n$ giebt es daher unter den gemachten Annahmen $n - r$-fach unendlich viele Stellen $x_1 \,.\,.\, x_n$, an denen das gegebene Gleichungensystem regulär ist, und zwar können die Gröfsen $x_{r+1} \,.\,.\, x_n$ innerhalb des gemeinsamen Konvergenzbezirks der Potenzreihen $\mathfrak{P}_i$ willkürlich gewählt werden, worauf die $x_1 \,.\,.\, x_r$ durch die Formeln (13) bestimmt sind.

Im Falle $r = n$ liefert die eben genannte Auflösung einfach die Werte

$$x_1 = x_1^0 \,.\,.\, x_n = x_n^0.$$

41. Wird eine Gleichung (12) von allen Wertsystemen $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ erfüllt, die dem r-gliedrigen Gleichungensystem (11) genügen und einem gewissen Bereich (2) angehören, so sagen wir: *„die Gleichung*

---

1) Vgl. Lie II 35.

(12) *ist in dem System* (11) *enthalten*", oder: „*das System* (11) *umfaſst die Relation* (12)", oder auch: „*die Relation* (12) *ist eine Folge des Systems* (11)" oder endlich: „*die Funktion* φ *verschwindet vermöge der Gleichungen* (11)".

Die Bedingung, die wir oben dem Gleichungensystem (11) auferlegten, läſst sich demnach dahin aussprechen, daſs nicht alle r-reihigen Determinanten der Matrix (7) vermöge des Systems (11) verschwinden sollen.

Wir betrachten jetzt den Fall, daſs diese Bedingung erfüllt ist, daſs aber eine von den r-reihigen Determinanten (7), etwa diese:

$$(14) \qquad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right| \quad (i, k = 1, 2 \,.\,. \, r)$$

vermöge des gegebenen Systems verschwindet; natürlich muſs dann $r < n$ sein. Es sei ϱ der Rang, den diese Determinante vermöge (11) besitzt, d. h. die Ordnung der höchsten, vermöge (11) nicht verschwindenden Unterdeterminanten. Insbesondere möge die Determinante (8) vermöge unseres Gleichungensystems nicht verschwinden. Nach Art. 38, Satz 6) giebt es dann immer eine Stelle $x_1^0 \,.\,. \, x_n^0$, derart, daſs das System (11) daselbst regulär und die Determinante (8) nicht null ist. Die Gleichungen $f_1 = 0 \,.\,. \, f_\varrho = 0$ lassen sich jetzt wie folgt auflösen:

$$x_i - x_i^0 = \mathfrak{P}_i(x_{\varrho+1} - x_{\varrho+1}^0 \,.\,. \, x_n - x_n^0) \quad (i = 1 \,.\,. \, \varrho).$$

Substituirt man die erhaltenen Ausdrücke für $x_1 \,.\,. \, x_\varrho$ in die $r - \varrho$ noch übrigen Gleichungen des gegebenen Systems, so fallen aus diesen die Variabeln $x_{\varrho+1}, x_{\varrho+2} \,.\,. \, x_r$ vollständig heraus, und man erhält $r - \varrho$ Relationen in den Variabeln $x_{r+1} \,.\,. \, x_n$ allein. Demnach können wir sagen: Verschwinden in der Determinante (14) alle $\varrho + 1$-reihigen, nicht aber alle ϱ-reihigen Unterdeterminanten vermöge des Systems (11), dann und nur dann umfaſst das r-gliedrige Gleichungensystem (11) $r - \varrho$ und nicht mehr unabhängige Gleichungen in den Variabeln

$$(15) \qquad x_{r+1} x_{r+2} \,.\,. \, x_n$$

allein. M. a. W.: Die Variabeln $x_1 x_2 \,.\,. \, x_r$ lassen sich unter den gemachten Annahmen aus dem System (11) *eliminiren*, und diese Elimination liefert genau $r - \varrho$ unabhängige Gleichungen in den Variabeln (15).

42. Das r-gliedrige Gleichungensystem

$$(16) \qquad \varphi_i(x_1 x_2 \,.\,. \, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \,.\,. \, r)$$

heiſst „*äquivalent*" oder „*gleichbedeutend*" mit dem System (11), wenn jede Gleichung des einen Systems eine Folge des andern ist, und umgekehrt; oder anders ausgedrückt: wenn jedes Wertsystem x_i^0 eines gewissen Bereichs (2), das dem System (11) genügt, auch die Relationen (16) befriedigt und umgekehrt. Es giebt dann ∞^{n-r} Stellen x_i^0, an denen beide Gleichungensysteme regulär sind. Gestattet dann das eine der beiden Systeme eine Auflösung der Form (13), so gilt dasselbe von dem andern, und beide Auflösungen sind identisch.

43. Wir werden uns in diesen Vorlesungen häufig einer geometrischen Ausdrucksweise[1]) bedienen, die darauf hinauskommt, die Gröfsen $x_1 \,..\, x_n$ als cartesische Koordinaten der Punkte eines n-fach ausgedehnten Raumes zu interpretiren. Diesen Raum bezeichnen wir kurz mit R_n oder, wenn nötig, mit $R_n(x_1 x_2 \,..\, x_n)$. Jedes Wertsystem $x_1^0 \,..\, x_n^0$ definirt einen *„Punkt"* P desselben; wir sprechen kurz von dem „Punkt $P(x_1^0 \,..\, x_n^0)$". Den Inbegriff aller $n-r$-fach unendlich vielen Wertsysteme x_i, die einem r-gliedrigen Gleichungensystem der Form (11) genügen, nennen wir eine *„$n-r$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit des R_n"* und bezeichnen sie kurz als eine μ_{n-r}; die Zahl $n-r$ heifst die *„Dimensionszahl"* der Mannigfaltigkeit, die Gleichungen (11) sind ihre *„Definitionsgleichungen"*. Eine μ_{n-1} wird auch als eine *„Fläche"* des R_n bezeichnet; eine solche ist demnach durch *eine* Gleichung

$$(17) \qquad \varphi(x_1 x_2 \,..\, x_n) = 0$$

definirt. Eine μ_1 heifst eine *„Kurve"* des R_n. Sind die Relationen (11) in den x_i ganzlinear, so wird die durch sie definirte μ_{n-r} eine *„lineare"* oder *„ebene Punktmannigfaltigkeit"*, im Falle $r = 1$ insbesondere eine *„Ebene"*, im Falle $r = n-1$ eine *„Gerade"* des R_n genannt. In Analogie mit dem Fall $n = 3$, d. h. mit dem gewöhnlichen dreidimensionalen Raum, bezeichnen wir die durch die $n-1$ Relationen

$$x_1 = 0, \,..\, x_{i-1} = 0, \; x_{i+1} = 0, \,..\, x_n = 0$$

definirte Gerade des R_n als die „x_i-Axe" des in unserem Raum angenommenen Koordinatensystems.

Wir sagen, *„der Punkt $P(x_1^0 \,..\, x_n^0)$ liegt auf der μ_{n-r},"* die durch (11) definirt ist, wenn das Wertsystem x_i^0 dem System (11) genügt. Verschwinden nicht alle r-reihigen Determinanten des Schemas (7) an der Stelle x_i^0, so sagen wir, P ist ein *regulärer Punkt* unserer μ_{n-r}.

Ferner sagen wir: *„Eine μ_k ist auf einer μ_l* ($l \geqq k$) gelegen" (oder: *„enthalten"*), oder auch: *die μ_l enthält die μ_k*, wenn jeder Punkt der μ_k auch auf der μ_l gelegen ist, m. a. W. wenn die $n-l$ Definitions-

1) Lie I Kap 6.

gleichungen der μ_l eine Folge von den $n-k$ Definitionsgleichungen der μ_k sind.

Zwei äquivalente r-gliedrige Gleichungensysteme definiren (innerhalb eines gewissen Bereichs) *dieselbe* μ_{n-r}.

44. Ist $P(x_1\,..\,x_n)$ ein regulärer Punkt der Punktmannigfaltigkeit (11), so giebt es $n-r-1$-fach unendlich viele, zu P benachbarte und gleichfalls auf unserer μ_{n-r} gelegene Punkte mit den Koordinaten

$$x_1 + dx_1\,..\,x_n + dx_n.$$

entsprechend den ∞^{n-r-1} Wertsystemen, welche sich für die Verhältnisse der dx_ι aus den Gleichungen

$$\sum_1^n{}_\alpha \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\, dx_\alpha = 0 \qquad (i = 1\,..\,r)$$

ergeben. Alle diese Nachbarpunkte sind, ebenso wie P selbst, auf der ebenen μ_{n-r} gelegen, die in laufenden Koordinaten $\xi_1\,.\,,\xi_n$ durch die r linearen Gleichungen

$$\sum_1^n{}_\alpha \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\,(\xi_\alpha - x_\alpha) = 0 \qquad (i = 1\,..\,r)$$

dargestellt wird. Diese ebene μ_{n-r} bezeichnen wir daher als die „*Tangential-μ_{n-r}*" der Punktmannigfaltigkeit (11) im Punkte P. Jede Ebene des R_n, welche die Tangential-μ_{n-r} im Punkte P enthält, heifst eine „*Tangentialebene*" der Mannigfaltigkeit (11) im Punkte P. Die allgemeinste Tangentialebene dieser Mannigfaltigkeit ist sonach durch eine Gleichung der Form

$$\sum_1^n{}_\alpha \sum_1^r{}_\beta\, \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial x_\alpha}\,(\xi_\alpha - x_\alpha) = 0$$

dargestellt, wo die λ willkürliche Gröfsen bedeuten. In jedem regulären Punkte P einer μ_{n-r} giebt es demnach $n-r-1$-fach unendlich viele Tangentialebenen. Eine Fläche (17) besitzt in jedem ihrer regulären Punkte $P(x_1\,..\,x_n)$ nur eine einzige Tangentialebene:

$$\sum_1^n{}_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\,(\xi_\alpha - x_\alpha) = 0$$

eine Kurve dagegen $n-2$-fach unendlich viele, die alle die durch P gehende ebene Tangential-μ_1 enthalten. Die zuletzt genannte Gerade wird auch kurz die „*Tangente*" der Kurve im Punkte P genannt; sie ist definirt durch die $n-1$ Relationen

$$(18) \qquad \frac{\xi_1 - x_1}{d x_1} = \frac{\xi_2 - x_2}{d x_2} = \cdot\cdot = \frac{\xi_n - x_n}{d x_n}$$

wenn darin die Verhältnisse der dx_ι durch ihre aus den Gleichungen

$$df_1 = 0, \;..\; df_{n-1} = 0$$

folgenden Werte ersetzt werden.

Unsere Definitionen stimmen unter der Annahme $n = 3$, also für den Fall des gewöhnlichen, dreidimensionalen Raumes mit den bekannten Begriffen „Tangentialebene einer Fläche“, bezw. „Tangente, Tangentialebene einer Raumkurve“ überein.

45. Giebt es eine Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$, an der die rechten Seiten der Gleichungen

$$(19) \qquad y_\iota = \varphi_i(x_1 x_2 \,..\, x_n) \qquad (i = 1, 2 \,..\, n)$$

alle regulär sind, und die Funktionaldeterminante derselben nicht verschwindet, und bezeichnen wir die Konstante $\varphi_\iota(x_1^0 \,..\, x_n^0)$ mit y_ι^0, so lassen sich die Relationen (19) folgendermaſsen auflösen:

$$(20) \qquad x_\iota = \psi_i(y_1 y_2 \,..\, y_n) \qquad (i = 1, 2 \,..\, n)$$

die ψ_i sind an der Stelle $y_1^0 \,..\, y_n^0$ regulär und nehmen daselbst bez. die Werte $x_1^0 \,..\, x_n^0$ an; ihre Funktionaldeterminante ist an der genannten Stelle nicht null.

Ein Gleichungensystem (19) dieser Art läſst sich auf zwei verschiedene Weisen auffassen.

Einmal können wir die Gleichungen (19) als die Definitionsgleichungen einer *Variabelntransformation* deuten, vermöge deren statt der x_ι die neuen unabhängigen Variabeln $y_1 \,.\, y_n$ eingeführt werden; dabei verwandelt sich vermöge (19) (nach Art. 38, 6)) jede an der Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ reguläre Funktion der x_i in eine an der Stelle $y_1^0 \,..\, y_n^0$ reguläre Funktion der y_ι; umgekehrt geht vermöge (20) jede Funktion der letzteren Art in eine der ersteren Art über; oder geometrisch ausgedrückt: Die Gleichungen (19) oder (20) vermitteln eine Abbildung des Raumes $R_n(x_1 \,..\, x_n)$ auf einen Raum $R_n'(y_1 y_2 \,..\, y_n)$, derart, daſs jedem Punkt P von R_n innerhalb eines gewissen Bereichs ein und nur ein Punkt P' von R_n' zugewiesen ist und umgekehrt; *bei dieser Abbildung entspricht dann jeder μ_k, auf welcher $P(x_1^0 \,..\, x_n^0)$ ein regulärer Punkt ist, eine μ_k des R_n' mit dem regulären Punkt $y_1^0 \,..\, y_n^0$, und umgekehrt.*

In der That, ist die μ_k im Raume R_n durch die Gleichungen

$$(21) \qquad F_i(x_1 x_2 \,..\, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2 \,..\, n - k)$$

definirt, und geht F_i vermöge unserer Variabelntransformation in

$\Phi_i(y_1 \ldots y_n)$ über, so sind die Φ_i an der Stelle $y_1^0 \ldots y_n^0$ regulär und gleich null, und man hat vermöge (20) identisch:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_l} = \sum_1^n {}_s \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial x_l}.$$

Darnach entsteht die Matrix

$$(22) \qquad \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_l} \right\| \qquad (i = 1 \ldots n-k;\ l = 1 \ldots n)$$

durch zeilenweise Komposition der folgenden beiden:

$$(23) \quad \left\| \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_s} \right\|; \quad (24) \left\| \frac{\partial y_s}{\partial x_l} \right\| \quad (i = 1 \ldots n-k;\ l, s = 1 \ldots n)$$

also ist jede $n-k$-reihige Determinante von (22) gleich einer Summe von Produkten aus je einer $n-k$-reihigen Determinante von (24) in eine $n-k$-reihige Determinante von (23); die Determinanten der letztern Art können mithin an der Stelle $y_1^0 \ldots y_n^0$ nicht alle null sein, da sonst in der Matrix (22) an der Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ alle $n-k$-reihigen Determinanten verschwänden. Die Umkehrung unserer Behauptung wird ebenso bewiesen. Das vorstehende Resultat läfst sich offenbar auch so formuliren:

„Sind die n Funktionen $\varphi_i(x_1 \ldots x_n)$ an der Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ regulär, und nehmen sie daselbst bez. die Werte y_i^0 an, ist ferner ihre Funktionaldeterminante an der genannten Stelle nicht null, so verwandelt sich das $n-k$-gliedrige Gleichungensystem

$$\Phi_i(y_1 y_2 \ldots y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n-k)$$

vermöge der Substitution $y_k = \varphi_k$ dann und nur dann in ein Gleichungensystem in den x_i, das an der Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ regulär ist, wenn es selber an der Stelle $y_1^0 \ldots y_n^0$ regulär ist."

Deuten wir andrerseits die $y_1 \ldots y_n$ als Koordinaten eines Punktes in dem Raume $R_n(x_1 \ldots x_n)$ bezogen auf das ursprüngliche Koordinatensystem, so liefern uns die Gleichungen (19) eine *Punkttransformation* des Raumes R_n, bei der jeder Punkt $P(x_1 \ldots x_n)$ in der Umgebung von $x_1^0 \ldots x_n^0$ in einen Punkt $y_1 \ldots y_n$ *desselben Raumes*, ebenso jede μ_{n-r} mit dem regulären Punkt $x_1^0 \ldots x_n^0$ in eine andere μ_{n-r} mit dem regulären Punkt $y_1^0 \ldots y_n^0$ transformirt wird.

Wir werden bald der einen, bald der andern dieser beiden Auffassungsweisen den Vorzug geben.

Die Begriffe „Funktionensystem, Gleichungensystem, Variabelntransformation" etc. sollen künftig immer in der Bedeutung gebraucht werden, die wir in diesem § auseinandergesetzt haben. Um jedoch die

Durchführung der Beweise und den Wortlaut der Resultate nicht allzu schwerfällig zu gestalten, wollen wir uns meist einer auch sonst üblichen freieren Ausdrucksweise bedienen und die Formulirung der funktionentheoretischen Einschränkungen, unter denen die genannten Begriffe nach den Entwickelungen dieses § zu handhaben sind, vielfach dem Leser überlassen.

§ 2. Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

46. Unter einem *„Integral“* (einer *„Lösung“*) der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung:

$$(1)\qquad a_1(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

versteht man bekanntlich jede Funktion f der unabhängigen Variabeln $x_1 \,.\,.\, x_n$, die die Gleichung (1) identisch erfüllt. Wir setzen nun folgendes Theorem[1]) als bekannt voraus:

Sind alle Funktionen

$$\frac{a_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)}{a_n(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)} \qquad (i = 1, 2 \,.\,.\, n-1)$$

an der Stelle $x_1^0 x_2^0 \,.\,.\, x_n^0$ regulär, so besitzt die lineare partielle Differentialgleichung (1) *ein und nur ein Integral ω_k, das an der genannten Stelle ebenfalls regulär ist und sich für $x_n = x_n^0$ auf x_k reduzirt, also folgende Form besitzt:*

$$(2)\qquad \omega_k \equiv x_k + (x_n - x_n^0)\mathfrak{P}_k(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0 \,.\,.\, x_n - x_n^0).$$

Die $n-1$ Funktionen

$$\omega_1, \ \omega_2 \,.\,.\, \omega_{n-1}$$

sind offenbar unabhängig und werden *„die Hauptintegrale der Gleichung* (1) *hinsichtlich $x_n = x_n^0$“* genannt.

Es gelten die Identitäten:

$$(3)\qquad \sum a_s \frac{\partial \omega_i}{\partial x_s} \equiv 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, n-1).$$

Eliminirt man hieraus und aus (1) die a_s, so folgt:

$$(1\text{a})\qquad \begin{pmatrix} \omega_1 \omega_1 \,.\,.\, \omega_{n-1}, & f \\ x_1 x_2 \,.\,.\, x_{n-1}, & x_n \end{pmatrix} \equiv 0$$

d. h. jede andere Lösung von (1) ist eine Funktion der ω_i allein (Art. 39). Da nun die Funktion $\varphi(\omega_1 \,.\,.\, \omega_{n-1})$ an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$

1) Über die Sätze, die in diesem und dem vorigen § ohne Beweise gegeben werden vgl. die Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung.

regulär ist, wenn dies von der Funktion $\varphi(x_1 \dots x_{n-1})$ gilt (Art. 38, Satz 6)), so folgt sofort:

Sind die Quotienten $\frac{a_i}{a_n}$ an der Stelle $x_1^0 \dots x_n^0$ alle regulär, so besitzt die Gleichung (1) *eine und nur eine, an dieser Stelle reguläre Lösung, die sich vermöge $x_n = x_n^0$ auf die willkürlich vorgeschriebene Funktion $\varphi(x_1 x_2 \dots x_{n-1})$ reduzirt, vorausgesetzt, dafs φ an der Stelle $x_1^0 \dots x_{n-1}^0$ ebenfalls regulär ist. Die genannte Lösung hat die Form:*

$$\varphi(\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}).$$

Wir bezeichnen dieselbe als das „allgemeine Integral" der gegebenen Gleichung.

Irgend $n - 1$ Funktionen der Form

$$\varphi_i(\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1}) \qquad (i = 1, 2 \dots n-1) \tag{4}$$

sind offenbar nur dann hinsichtlich der x unabhängig, wenn sie es hinsichtlich der ω_i sind. Man hat nun:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial \omega_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \omega_{n-1}} \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_k}$$

und hieraus, nach dem Satze über die Komposition der Determinanten[1])

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{n-1} \\ x_1 x_2 \dots x_{n-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{n-1} \\ \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1} \\ x_1 x_2 \dots x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Die Hauptintegrale ω_i sind nun hinsichtlich der Variabeln $x_1 \dots x_{n-1}$ unabhängig. Da ferner die Quotienten $\frac{a_i}{a_n}$ nach Art. 38, 5 an der Stelle $x_1^0 \dots x_n^0$ regulär sind, wenn alle a_i es sind, und $a_n(x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0)$ nicht verschwindet, so gilt der Satz:

„*Sind alle Koeffizienten der Gleichung* (1) *an der Stelle $x_1^0 \dots x_n^0$ regulär, und verschwindet a_n daselbst nicht, so sind irgend $n-1$ unabhängige, an der Stelle x_i^0 reguläre Lösungen der Gleichung* (1) *insbesondere hinsichtlich der Variabeln $x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ unabhängig.*"

47. Es seien jetzt irgend $n-1$ unabhängige, an der Stelle x_i^0 reguläre Integrale $f_1 f_2 \dots f_{n-1}$ von (1) gegeben; sie haben dann, wie wir wissen, die Form (4); ersetzt man darin x_n durch x_n^0, so verwandeln sich die Funktionen (4) in die folgenden

$$\varphi_i(x_1 \dots x_{n-1}) \qquad (i = 1 \dots n-1).$$

Man hat daher identisch:

$$f_i(x_1 \dots x_{n-1}, x_n^0) \equiv \varphi_i(x_1 \dots x_{n-1}).$$

1) Vgl. die Anm. pag. 42.

Die Form der Funktionen φ_i ist also bekannt, und es gelten die Identitäten:

$$f_i(x_1 \,.\,.\, x_{n-1}, x_n) \equiv f_i(\omega_1 \,.\,.\, \omega_{n-1}, x_n^0) \quad (i = 1 \,.\,.\, n-1).$$

Demnach hat man den Satz:

Sind $f_1 f_2 \,.\,.\, f_{n-1}$ irgend $n-1$ unabhängige, an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ reguläre Lösungen von (1), *und bedeutet*

$$x_1' x_2' \,.\,.\, x_n' x_n^0 \tag{5}$$

ein der Umgebung jener Stelle angehörendes Wertsystem, für das a_n nicht verschwindet (Art. 38, 3), *so lassen sich die Gleichungen*

$$f_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) = f_i(x_1' \,.\,.\, x_{n-1}' x_n^0) \quad (i = 1 \,.\,.\, n-1) \tag{6}$$

in der Form

$$x_i' = \omega_i \quad (i = 1 \,.\,.\, n-1)$$

auflösen. Die rechten Seiten dieser Auflösung sind die Hauptintegrale hinsichtlich $x_n = x_n^0$."

Die Gleichung (1) läſst sich offenbar in der Form

$$\begin{pmatrix} f_1 \,.\,.\, f_{n-1} f \\ x_1 \,.\,.\, x_{n-1} x_n \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

schreiben, d. h. a_i ist der mit $(-1)^i$ multiplizirten $n-1$-reihigen Determinante proportional, die aus der eben hingeschriebenen durch Streichung der i-ten Zeile und letzten Spalte entsteht; daraus folgt wiederum der Schlufssatz des vor. Art.

48. Die Gleichungen (6) können auch in der Form:

$$x_k = x_k' + (x_n^0 - x_n)\,\mathfrak{P}_k(x_1' - x_1^0, x_2' - x_2^0, \,.\,.\, x_{n-1}' - x_{n-1}^0, x_n^0 - x_n) \tag{8}$$
$$(k = 1 \,.\,.\, n-1)$$

aufgelöst werden. Die rechten Seiten entstehen aus den rechten Seiten von (2) dadurch, dafs man die Variabeln $x_1 \,.\,.\, x_n$ bez. mit den Gröfsen (5) vertauscht; denn das System (6) ist in Bezug auf diese zwei Variabelngruppen symmetrisch. Die durch (8) definirten Funktionen $x_1 \,.\,.\, x_{n-1}$ der unabhängigen Variabeln x_n reduziren sich vermöge $x_n = x_n^0$ auf die vorgeschriebenen Konstanten $x_1' \,.\,.\, x_{n-1}'$ und erfüllen das simultane System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{a_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)}{a_n(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)} \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n-1) \tag{9}$$

identisch für alle Werte von x_n und der Konstanten $x_1' \dots x_{n-1}'$, sind also die allgemeinsten, an der Stelle x_n^0 regulären Integralfunktionen dieses Systems. Denn werden die Ausdrücke (8) in (6) eingesetzt, und die so erhaltenen Identitäten nach x_n differentiirt, so folgen aus den entstehenden Gleichungen

$$(10) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (i = 1 \dots n-1)$$

nach dem, was am Schlufs des vor. Art. über die a_i bemerkt wurde, ohne weiteres die Relationen (9). Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist überdies bekannt, dafs das simultane System (9), falls seine rechten Seiten an der Stelle (5) regulär sind, nur *ein einziges* System von Integralfunktionen $x_1 \dots x_{n-1}$ besitzt, die an der Stelle x_n^0 regulär sind und daselbst die vorgeschriebenen Werte $x_1' \dots x_{n-1}'$ annehmen. Die Gleichungen (6) können wir auch in der Form

$$(11) \qquad f_i(x_1 x_2 \dots x_n) = C_i \qquad (i = 1, 2 \dots n-1)$$

schreiben, wo die C_i arbiträre Konstante bedeuten; sie werden als die *„allgemeinen Integralgleichungen“*, die f_i selbst als *„Integrale“* des simultanen Systems (9) bezeichnet. Kennt man von dem letzteren alle an der Stelle x_n^0 regulären Integralfunktionen, oder auch die allgemeinen Integralgleichungen, so kennt man auch alle an der Stelle $x_1^0 \dots x_n^0$ regulären Lösungen von (1), und umgekehrt. Die beiden Integrationsprobleme (1) und (9) sind also vollkommen äquivalent; wir wollen (9) das zu der linearen partiellen Differentialgleichung (1) *„gehörige“* oder *„adjungirte“* simultane System nennen.

49. Die Konstanten $x_1^0 \dots x_n^0$ und die Funktionen ω_i seien wie in Art. 46 definirt. Wenn dann in dem r-gliedrigen Gleichungensystem

$$(12) \quad \omega_i = \varphi_i(\omega_{r+1}, \omega_{r+2} \dots \omega_{n-1}) \quad (i = 1, 2 \dots r;\ r < n-1)$$

die rechten Seiten an der Stelle $\omega_{r+h} = x_{r+h}^0$ regulär sind und bez. die Werte $x_1^0 \dots x_r^0$ annehmen, so lassen sich die Gleichungen (12), wie leicht ersichtlich, folgendermafsen auflösen:

$$(13) \qquad x_i = \xi_i(x_{r+1}, x_{r+2} \dots x_{n-1} x_n) \quad (i = 1, 2 \dots r)$$

wobei die ξ_i an der Stelle $x_{r+1}^0 \dots$ regulär sind und vermöge $x_n = x_n^0$ bez. in die Funktionen $\varphi_i(x_{r+1} \dots x_{n-1})$ übergehen. Wir behaupten, dafs die linken Seiten der Gleichungen:

$$(14) \quad a_{r+1} \frac{\partial x_i}{\partial x_{r+1}} + a_{r+2} \frac{\partial x_i}{\partial x_{r+2}} + \cdots + a_n \frac{\partial x_i}{\partial x_n} - a_i = 0\,[1] \ (i = 1, 2 \cdots r)$$

1) Jacobi I Band 4, p. 7ff.

vermöge (13) verschwinden. Substituiren wir nämlich die Ausdrücke (13) in (12), und differentiiren die erhaltenen Identitäten nach x_{r+h}, so folgt:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_{r+h}} + \sum_1^r {}_\alpha \frac{\partial \omega_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_{r+h}} \equiv \sum_1^{n-r-1} {}_s \frac{\partial \varphi_i}{\partial \omega_{r+s}} \left(\frac{\partial \omega_{r+s}}{\partial x_{r+h}} + \sum_1^r {}_\alpha \frac{\partial \omega_{r+s}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_{r+h}} \right).$$

Multipliziren wir diese Gleichung mit a_{r+h} und summiren wir nach h von 1 bis $n-r$, so erhält man mit Rücksicht auf (3) nach kurzer Rechnung:

$$\sum_1^r {}_\alpha \Xi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\omega_i - \varphi_i) \equiv 0 \qquad (i = 1 \,..\, r)$$

worin Ξ_i die linke Seite der Gleichung (14) bedeutet. Da aber die Determinante

$$\left| \frac{\partial(\omega_i - \varphi_i)}{\partial x_k} \right| \qquad (i, k = 1 \,..\, r)$$

vermöge (13) nicht null ist, so verschwinden in der That alle Ξ_i vermöge (13). Die r Funktionen (13) werden daher als „Integralfunktionen" oder auch als „ein Integral" des simultanen Systems (14) partieller Differentialgleichungen bezeichnet. Darin sind die $x_1 \,..\, x_r$ als unbekannte Funktionen, die $x_{r+1} x_{r+2} \,..$ als Independente zu betrachten.

Umgekehrt, verschwinden die Ξ_i vermöge (13), sind ferner die ξ_i an der Stelle $x^0_{r+1} \,..$ regulär und nehmen sie daselbst bez. die Werte $x_1^0 \,..\, x_r^0$ an, so können wir in das Gleichungensystem (13) statt $x_1 \,..\, x_{n-1}$ die neuen Variabeln $\omega_1 \,..\, \omega_{n-1}$ einführen, und erhalten so, wie man leicht erkennt, Relationen der Form

$$\omega_i = \varphi_i(\omega_{r+1} \,..\, \omega_{n-1}, x_n) \qquad (i = 1 \,..\, r)$$

worin die φ_i an der Stelle $x^0_{r+1} \,..\, x_n^0$ regulär sind. Diese Gleichungen reduziren sich vermöge (13) auf Identitäten, durch deren Differentiation nach $x_{r+1} \,..\, x_n$ man erhält:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_{r+h}} + \sum_1^r {}_\alpha \frac{\partial \omega_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_{r+h}} \equiv \sum_1^{n-r-1} {}_s \frac{\partial \varphi_i}{\partial \omega_{r+s}} \left(\frac{\partial \omega_{r+s}}{\partial x_{r+h}} + \sum_1^r {}_\alpha \frac{\partial \omega_{r+s}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_{r+h}} \right)$$

$$(h = 1, 2 \,..\, n-r-1)$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_n} + \sum_1^r {}_\alpha \frac{\partial \omega_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_n} \equiv \sum_1^{n-r-1} {}_s \frac{\partial \varphi_i}{\partial \omega_{r+s}} \left(\frac{\partial \omega_{r+s}}{\partial x_n} + \sum_1^r {}_\alpha \frac{\partial \omega_{r+s}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_n} \right) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}.$$

Multipliziren wir diese Gleichungen bez. mit $a_{r+1} \,..\, a_n$ und summiren sie, so folgt wegen (3) und mit Rücksicht darauf, dafs alle Ξ_α null sind:

$$a_n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = 0 \quad (i = 1 \,..\, r)$$

Da a_n vermöge (13) nicht null ist, so sind die φ_i von x_n frei, d. h. die betrachteten Integralfunktionen (13) sind durch ein Gleichungensystem (12) definirt.

Damit ist gezeigt:

„*Ist* $x_1^0 \,..\, x_n^0$ *eine Stelle, an der alle Funktionen* $a_1 \,..\, a_n$ *regulär sind und* a_n *nicht verschwindet, bedeuten ferner*

$$\varphi_i(x_{r+1}, x_{r+2} \,..\, x_{n-1}) \quad (i = 1, 2 \,..\, r;\ r < n - 1)$$

arbiträre Funktionen, die an der Stelle $x_{r+1}^0 \,..$ *regulär sind und daselbst bez. die Werte* $x_1^0 \,..\, x_r^0$ *annehmen, so besitzen die simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen* (14) *ein und nur ein System von Integralfunktionen* (13), *die an der Stelle* $x_{r+1}^0 \,..$ *regulär sind und vermöge* $x_n = x_n^0$ *bez. in die vorgeschriebenen Funktionen* $\varphi_1 \,..\, \varphi_r$ *übergehen; diese Integralfunktionen sind durch das Gleichungensystem* (12) *definirt, wenn die* ω_i *die Hauptintegrale von* (1) *hinsichtlich* $x_n = x_n^0$ *bedeuten.*"

Für $r = 1$ folgt insbesondere:

„*Ist die Stelle* x_i^0 *wie vorhin definirt, bedeutet ferner*

$$\varphi(x_2 x_3 \,..\, x_{n-1})$$

eine an dieser Stelle reguläre Funktion, die daselbst den Wert x_1^0 *hat, so besitzt die nicht homogene, lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung*

$$(15) \qquad a_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} + \cdots + a_n \frac{\partial x_1}{\partial x_n} - a_1 = 0$$

eine und nur eine an der Stelle $x_2^0 \,..\, x_n^0$ *reguläre Integralfunktion* x_1, *die sich vermöge* $x_n = x_n^0$ *auf die vorgeschriebene Funktion* φ *reduzirt.*"

Die Integration eines jeden Systems partieller Differentialgleichungen von der Form (14), *sowie jeder nicht homogenen linearen partiellen Differentialgleichung* (15) *kommt darnach auf die Integration eines simultanen Systems* (9) *gewöhnlicher Differentialgleichungen hinaus.*

50. Sind $f_1 \,..\, f_{n-1}$ irgend $n - 1$, an der Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ reguläre Lösungen von (1), die an dieser Stelle bez. die Werte

$$(16) \qquad f_1^0 f_2^0 \,..\, f_{n-1}^0$$

besitzen, so können wir annehmen (Art. 38, 3)) dafs die Funktionaldeterminante

$$(17) \qquad \begin{pmatrix} f_1 f_2 \,..\, f_r \\ x_1 x_2 \,..\, x_r \end{pmatrix}$$

an der genannten Stelle nicht null sei. Ist dann das r-gliedrige Gleichungensystem

(18) $$\psi_i(f_1 f_2 \ldots f_{n-1}) = 0 \qquad (i = 1 \ldots r)$$

an der Stelle (16) regulär und nach $f_1 \ldots f_r$ auflösbar, im übrigen beliebig, so sind auch durch die Relationen (18) die allgemeinsten, an der Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ regulären Integralfunktionen von (14) definirt. Die Gleichungen (18) heifsen daher die allgemeinen Integralgleichungen von (14); so folgt z. B. für $r = 1$, dafs die allgemeine Integralgleichung der partiellen Differentialgleichung (15) durch:

$$\psi(f_1 f_2 \ldots f_{n-1}) = 0$$

dargestellt wird. Die Annahme $r = n - 1$ führt auf den Satz des Art. 48 zurück, wonach die allgemeinen Integralgleichungen des simultanen Systems (9) die Form (11) haben.

Wir wollen r Funktionen (13) nur dann ein Integral von (14) nennen, wenn eine Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ existirt, an der die Gleichungen (13) und alle a_i regulär sind. Sind an dieser Stelle nicht alle a_i null, so können wir, wie leicht ersichtlich, immer annehmen, dafs a_n daselbst nicht verschwindet. *Aufser den Integralen, die nach der Methode des vor. Art. erhalten werden, können also nur noch Integrale* (13) *von solcher Art existiren, dafs alle a_i vermöge* (13) *verschwinden.*

51. Von der partiellen Differentialgleichung (1) seien r unabhängige Lösungen $f_1 \ldots f_r$ von vornherein bekannt; wir können dann annehmen, dafs an der (wie bisher definirten) Stelle x_i^0 die Determinante (17) nicht verschwinde.

Führt man jetzt in die Gleichung (1) mittels der Formeln:

$$y_i = f_i(x_1 x_2 \ldots x_n);\ x_k = x_k \qquad (i = 1 \ldots r;\ k = r + 1 \ldots n)$$

die neuen Variabeln $y_1 \ldots y_r x_{r+1} \ldots x_n$ ein, und beachtet die Identitäten

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_1^r {}_h \frac{\partial f}{\partial y_h}\frac{\partial f_h}{\partial x_i};\ \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_1^r {}_h \frac{\partial f}{\partial y_h}\frac{\partial f_h}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_k}\ (i = 1 \ldots r;\ k = r + 1 \ldots n)$$

so erhält unsere Gleichung (1) folgende Form:

(19) $$\sum_1^{n-r} {}_h \varrho_{r+h}(y_1 \ldots y_r x_{r+1} \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_{r+h}} = 0.$$

Der Koeffizient ϱ_{r+h} entsteht durch die obige Variabeltransformation aus a_{r+h}, ist also an der Stelle $f_1^0 \ldots f_r^0 x_{r+1}^0 \ldots x_n^0$ regulär; die Funktion ϱ_n ist daselbst nicht null. Bei der Integration von (19) sind die y_i als Konstante zu behandeln; die $n - r - 1$ unabhängigen Lösungen von (19) liefern, wenn man darin die y_i durch die f_i ersetzt, die noch fehlenden Lösungen von (1).

Die Bestimmung einer nicht konstanten Lösung einer linearen homogenen Gleichung (1) mit n Independenten werde eine „Operation der Ordnung $n-1$“ oder kürzer eine „Operation $n-1$“ genannt Indem man dann das obige Resultat auf den Fall $r=1$ anwendet, folgt: *Die Integration von* (1), *d. h. die Ermittelung von $n-1$ unabhängigen Lösungen dieser Gleichung, erfordert je eine Operation $n-1$, $n-2, \ldots 3, 2, 1$.* Sind r Integrale schon bekannt (verschwinden z. B. r von den Koeffizienten a_ι identisch), so erfordert die Integration von (1) die Operationen $n-r-1$, $n-r-2, \ldots 2, 1$.

52. Ist die Gleichung (1) integrirt, so erfordert die Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{20}$$

worin t eine $n+1^{\text{te}}$ Independente bedeutet, nur noch eine Quadratur. In der That, wendet man die Transformation der vor. Nr. unter der Annahme $r=n-1$ an, so erhält (20) die Form

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \varrho_n(y_1 y_2 \ldots y_{n-1} x_n) \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Bezeichnet man mit $\Omega(x_1 x_2 \ldots x_n)$ die Funktion, die aus dem Integral

$$\int_{x_n^0}^{x_n} \frac{d x_n}{\varrho_n(y_1 \ldots y_{n-1}, x_n)} \tag{21}$$

hervorgeht, wenn man nach ausgeführter Integration die Konstanten y_ι wieder durch die f_ι ersetzt, so bilden $f_1 \ldots f_{n-1}$, $\Omega - t$ ein System von n unabhängigen Lösungen der Gleichung (20). Da ϱ_n nach der vor. Nr. an der Stelle $f_1^0 \ldots f_{n-1}^0\, x_n^0$ regulär und nicht null ist, so ist $1:\varrho_n$ daselbst regulär (Art. 38, 5), das Integral (21) hat also einen eindeutig bestimmten Sinn, wenn der Integrationsweg ganz innerhalb des Konvergenzbezirks der Potenzreihe für $1:\varrho_n$, im übrigen beliebig gewählt wird, und Ω ist an der Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ regulär. Bedeutet $x_1' x_2' \ldots x_n'$ ein Wertsystem, das der Umgebung dieser Stelle angehört und für welches nicht alle a_i null sind, so kann man die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} f_\iota(x_1 x_2 \ldots x_n) &= f_\iota(x_1' x_2' \ldots x_n') \\ -t + \Omega(x_1 x_2 \ldots x_n) &= \Omega(x_1' \ldots x_n') \end{aligned}\right. \quad (i = 1, 2 \ldots n-1) \tag{22}$$

folgendermaſsen auflösen:

$$x_\iota' = x_\iota + t\mathfrak{P}_i(x_1 - x_1^0 \ldots x_n - x_n^0, t) \quad (i = 1 \ldots n) \tag{23}$$

oder auch so:

(24) $x_i = x_i' - t\mathfrak{P}_i(x_1' - x_1^0 \,.\,.\, x_n' - x_n^0, -t) \quad (i = 1 \,.\,.\, n)$

wobei die $\mathfrak{P}_i$ beidemale dieselbe Bedeutung haben. Die Gleichungen (23) schreiben wir so:

(23a) $x_1' = h_1(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n t); \,.\,.\, x_n' = h_n(x_1 \,.\,.\, x_n, t);$

ihre rechten Seiten sind die Hauptintegrale der Gleichung (20) hinsichtlich $t = 0$. Die Existenz dieser Hauptintegrale steht nach Art. 46 a priori fest; daſs sich die Relationen (22) nach den x_i und nach den x_i' auflösen lassen, ergiebt sich, wenn man den Schluſssatz des Art. 46 auf die Gleichung (20) anwendet, und beachtet, daſs der Koeffizient von $\frac{\partial f}{\partial t}$ gleich *eins* ist.

Die Gleichungen (24) definiren diejenigen an der Stelle $t = 0$ regulären Funktionen von t, die dem simultanen System

(25) $$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) \qquad (i = 1 \,.\,.\, n)$$

genügen und sich vermöge $t = 0$ bezw. auf die vorgeschriebenen Konstanten $x_1' \,.\,.\, x_n'$ reduziren.

Die Methode, durch die wir im Vorstehenden die Hauptintegrale $h_1 \,.\,.\, h_n$ erhielten, ist natürlich mutatis mutandis auch anwendbar, wenn zwar nicht a_n, aber irgend ein anderer Koeffizient a_i an der Stelle $x_1' \,.\,.\, x_n'$ von null verschieden ist, und wird nur dann hinfällig, wenn *alle* a_i daselbst verschwinden, ohne daſs jedoch in diesem Falle die Hauptintegrale h_i selber, oder die Gleichungen (24) zu existiren aufhörten. Ersetzt man unter der soeben gemachten Annahme die x_i' durch x_i^0, so verschwinden die Potenzreihen $\mathfrak{P}_i$, die auf den rechten Seiten von (24) auftreten, für jedes beliebige t; letzteres findet auch statt, wenn die Stelle x_i^0 wie in Art. 46 definirt ist, aber $x_1' \,.\,.\, x_n'$ ein der Umgebung dieser Stelle angehörendes Wertsystem bedeutet, für das alle a_i null sind. Denn die durch (24) definirten Funktionen $x_1 \,.\,.\, x_n$ erfüllen das System (25); man hat also:

$$\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{t=0} = a_i(x_1' \,.\,.\, x_n') = 0; \; \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2}\right)_{t=0} = \left(\sum_h \frac{\partial a_i}{\partial x_h}\frac{dx_h}{dt}\right)_{t=0} = 0 \text{ etc.}$$

d. h. die Funktionen (24) reduziren sich dann und nur dann auf die Konstanten x_i', wenn letztere die n Relationen $a_i = 0$ befriedigen.

53. Um die bisherigen Resultate dieses § nach Art. 43 geometrisch zu interpretiren[1]), nennen wir den Punkt $P(x_1' \,.\,.\, x_n')$ einen *„Punkt allgemeiner Lage“* des Raums R_n, wenn an der Stelle $x_1' \,.\,.\, x_n'$ alle

1) Lie I Kap. 6.

Koeffizienten a_i regulär sind, aber nicht alle verschwinden. Ist $P(x_1' .. x_n')$ ein solcher Punkt, so definiren die Gleichungen (24), entsprechend den ∞^1 Werten des Parameters t, einfach unendlich viele Punkte, d. h. also eine Kurve des R_n, die den Punkt $x_1' .. x_n'$ enthält. Die $n-1$ Definitionsgleichungen dieser Kurve können auch in der Form

$$(26) \qquad f_i(x_1 x_2 .. x_n) = f_i(x_1' .. x_n') \quad (i = 1, 2, .. n-1)$$

geschrieben werden. Demnach definiren die Relationen

$$(27) \qquad f_i(x_1 x_2 .. x_n) = C_i$$

wenn man unter den C_i arbiträre Konstante versteht, eine *„Zerlegung des Raums R_n“* in $n-1$-fach unendlich viele Kurven derart, dafs durch jeden Punkt allgemeiner Lage eine und nur eine dieser Kurven hindurchgeht. Wir bezeichnen diese ∞^{n-1} Kurven als die *„charakteristischen Kurven“* oder kurz als die *„Charakteristiken“* der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung (1) oder auch der nicht homogenen Gleichung (15). Mitunter bezeichnen wir sie auch als die *„Integralkurven“* des zugehörigen simultanen Systems (9). Stellt die Gleichung

$$(28) \qquad x_1 = \xi(x_2 .. x_n)$$

eine Integralfunktion x_1 von (15) dar, so nennen wir die durch (28) definirte Fläche des R_n eine *Integralfläche* der Gleichung (15) oder (1). Wenn wir von dem Falle absehen, dafs alle a_i vermöge (28) verschwinden, so können wir nach Art. 49 behaupten: Jede Integralfläche von (1) enthält $n-2$-fach unendlich viele Charakteristiken oder „wird von ∞^{n-2} Charakteristiken erzeugt“; m. a. W.: enthält eine Integralfläche den Punkt allgemeiner Lage $P(x_1' .. x_n')$, so enthält sie die ganze durch P gehende charakteristische Kurve, oder endlich: Man gewinnt die allgemeinste Integralfläche, indem man aus den $n-1$-fach unendlich vielen Charakteristiken irgend ∞^{n-2} nach einem willkürlichen Gesetz herausgreift. Dies ist der geometrische Ausdruck der Thatsache, dafs die Gleichung jeder Integralfläche die Form

$$\psi(f_1 f_2 .. f_{n-1}) = 0$$

erhalten kann.

Eine Punkt-μ_{n-r}, die durch r Relationen der Form (18) definirt wird, heifse eine *„charakteristische μ_{n-r}“* der Gleichung (1) oder (15), oder auch eine *„Integral-μ_{n-r}“* des simultanen Systems partieller Differentialgleichungen (14). Jede solche Mannigfaltigkeit ist darnach von ∞^{n-r-1} Charakteristiken erzeugt[1]).

1) Lie IV 516.

Wählt man eine μ_{n-2} des Raums R_n beliebig, doch so, dafs sie ∞^{n-2} Punkte allgemeiner Lage enthält, und bestimmt man alle Charakteristiken, die bezw. durch die Punkte dieser μ_{n-2} hindurchgehn, so erzeugen diese ∞^{n-2} Kurven die allgemeinste Integralfläche von (1); die beliebig gewählte Ausgangs-μ_{n-2} darf natürlich keine charakteristische μ_{n-2} sein, da wir sonst durch das geschilderte Verfahren nur ∞^{n-3} charakteristische Kurven erhielten, und auf die μ_{n-2} zurückkämen. Ist die Ausgangs-μ_{n-2} durch die beiden Gleichungen

$$\varphi(x_1' x_2' \,.\,.\, x_n') = 0, \quad \psi(x_1', x_2' \,.\,.\, x_n') = 0 \tag{29}$$

gegeben, so erhält man die Gleichung der durch sie bestimmten Integralfläche durch Elimination der x_ι' aus den $n + 1$ Gleichungen (26) (29).

Wählt man z. B. als Ausgangs-μ_{n-2} die folgende:

$$x_n' = x_n^0; \; x_1' = \varphi(x_2' x_3' \,.\,.\, x_{n-1}'),$$

so gelangt man zu der im vorletzten Satz des Art. 49 definirten Integralfläche.

54. Wir bezeichnen die rechten Seiten der Gleichungen (24) zur Abkürzung mit $F_\iota(x_1' \,.\,.\, x_n', t)$ und vertauschen die beiden Variabelngruppen x und x'; die so gewonnenen Gleichungen

$$x_\iota' = F_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n t) \qquad (i = 1, 2 \,.\,.\, n) \tag{30}$$

definiren, den ∞^1 Werten von t entsprechend, eine Schar von einfach unendlich vielen Punkttransformationen (Art. 45). Die Funktionen F_ι sind offenbar nichts anderes als die Hauptintegrale der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_\iota}$$

hinsichtlich $t = 0$; sie entstehen nämlich aus den rechten Seiten von (23), wenn man t durch $-t$ ersetzt; ferner sind die Funktionen F_ι, wenn man darin $x_1 \,.\,.\, x_n$ als Konstante betrachtet, diejenigen Integralfunktionen des simultanen Systems

$$\frac{d x_i'}{d t} = a_\iota(x_1' x_2' \,.\,.\, x_n') \qquad (i = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

die sich für $t = 0$ auf $x_1 \,.\,.\, x_n$ reduziren. Es sei t ein bestimmter numerischer Wert; dann wird vermöge (30) der Punkt allgemeiner Lage $P(x_1 \,.\,.\, x_n)$ in den Punkt $P'(x_1' \,.\,.\, x_n')$ der durch P gehenden Charakteristik übergeführt. Übt man jetzt auf P' die Transformation

$$x_i'' = F_i(x_1' x_2' \,.\,.\, x_n', \tau) \tag{31}$$

aus, die ebenfalls in der Schar (30) enthalten ist, so nimmt P' die Lage $P''(x_1'' \,..\, x_n'')$ an. Da aber die Relationen (30) mit den folgenden äquivalent sind:

$$f_i(x_1'x_2' \,..\, x_n') = f_i(x_1 x_2 \,..\, x_n)$$
$$-t + \Omega(x_1'x_2' \,..\, x_n') = \Omega(x_1 x_2 \,..\, x_n)$$

und die Gleichungen (31) mit den nachstehenden:

$$f_i(x_1''x_2'' \,..\, x_n'') = f_i(x_1'x_2' \,..\, x_n')$$
$$-\tau + \Omega(x_1''x_2'' \,..\, x_n'') = \Omega(x_1'x_2' \,..\, x_n'),$$

so ergiebt die Elimination der x_i' aus (30) und (31) die Gleichungen:

$$x_i'' = F_i(x_1 x_2 \,..\, x_n,\ t + \tau) \qquad (i = 1, 2, \,..\, n) \tag{32}$$

d. h. irgend zwei Punkttransformationen (30) und (31) unserer Schar liefern, nach einander ausgeübt, eine Transformation (32), die wiederum der Schar angehört. Eine Schar von Transformationen, der diese Eigenschaft zukommt, heifst nach Lie[1]) eine „*kontinuirliche Gruppe*“. Darnach definiren die Gleichungen (30) eine „*eingliedrige*[2]), *kontinuirliche Gruppe von Punkttransformationen*“. Dem Wert $t = 0$ entspricht die „*identische Transformation*“

$$x_1' = x_1 \,..\, x_n' = x_n$$

die jeden Punkt an seiner Stelle läfst. Ersetzt man t durch δt, d. h. durch einen von Null sehr wenig verschiedenen Wert, so erhalten wir aus (30) eine Transformation, die jeden Punkt $P(x_1 \,..\, x_n)$ in einen unendlich benachbarten $P'(x_1 + \delta x_1 \,..\, x_n + \delta x_n)$ überführt, wobei die δx_i durch die Formeln:

$$\delta x_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial t}\right)_{t=0} \cdot \delta t \qquad (i = 1, 2 \,..\, n)$$

bestimmt werden. Nun hat man aber nach einer Bemerkung zu Anfang dieser Nr.:

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} \equiv a_i(F_1 F_2 \,..\, F_n) \qquad (i = 1 \,..\, n), \tag{33}$$

mithin, da $(F_i)_{t=0} \equiv x_i$:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial t}\right)_{t=0} \equiv a_i(x_1 x_2 \,..\, x_n)$$

und es folgt

$$\delta x_i = a_i(x_1 x_2 \,..\, x_n) \,.\, \delta t \qquad (i = 1 \,..\, n). \tag{34}$$

1) Lie I; Einleitung.

2) Lie I, Kap. 3, Kap. 6.

Der Nachbarpunkt P' liegt natürlich auf der durch P gehenden Charakteristik. Eine Transformation, die jeden Punkt P in einen durch (34) definirten Nachbarpunkt P' überführt, heifst eine *„infinitesimale Transformation“*; den Ausdruck

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdot \cdot + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

bezeichnen wir mit Xf und nennen ihn das *„Symbol“* der infinitesimalen Transformation (34). Die eingliedrige Gruppe (30) ist durch Angabe der infinitesimalen Transformation Xf vollständig bestimmt; wir sagen daher: die Gruppe (30) wird von der infinitesimalen Transformation Xf *„erzeugt“*.

Da bei jeder Transformation der Gruppe (30) der Punkt P auf der durch ihn gehenden Charakteristik verschoben wird, so bezeichnen wir die ∞^{n-1} Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung $Xf = 0$ auch als die *„Bahnkurven“* der Gruppe (30) oder der infinitesimalen Transformation Xf. Zu allen infinitesimalen Transformationen der Form $\varrho(x_1 \, . \, . \, x_n) \, . \, Xf$, bezw. zu den von ihnen erzeugten eingliedrigen Gruppen gehört das gleiche System von ∞^{n-1} Bahnkurven.

55. Der Ausdruck $Xf \, . \, \delta t$ giebt den Zuwachs an, den die Funktion f erleidet, wenn die x_i die Inkremente (34) erhalten. Wir sagen nun: *„die Funktion f gestattet die infinitesimale Transformation Xf“*, wenn $Xf \equiv 0$, wenn also f eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung (1) ist.

Wir sagen ferner, die Funktion f *„gestattet alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe* (30)“ wenn vermöge (30) für jedes beliebige Wertsystem $x_1 x_2 \, . \, . \, x_n, t$ die Identität

$$f(x_1' \, . \, . \, x_n') \equiv f(x_1 x_2 \, . \, . \, x_n)$$

stattfindet. Dazu ist offenbar notwendig, dafs f die infinitesimale Transformation Xf gestattet; umgekehrt, ist dies der Fall, so hat man wegen (33):

$$\frac{\partial}{\partial t} f(F_1 F_2 \, . \, . \, F_n) \equiv \sum \frac{\partial f}{\partial F_i} \frac{\partial F_i}{\partial t} \equiv \sum a_i (F_1 \, . \, . \, F_n) \frac{\partial f}{\partial F_i} \equiv 0,$$

d. h. die Funktion $f(F_1 \, . \, . \, F_n)$ ist von t unabhängig, also mit $f(x_1 \, . \, . \, x_n)$ identisch.

Damit eine Funktion f alle Transformationen der von Xf erzeugten eingliedrigen Gruppe gestatte, ist sonach notwendig und hinreichend, dafs sie die infinitesimale Transformation Xf gestatte, also eine Lösung der Gleichung $Xf = 0$ sei.

Durch das r-gliedrige Gleichungensystem:

$$(35) \qquad \Omega_i(x_1 x_2 \,..\, x_n) = 0 \qquad (i = 1 \,..\, r)$$

sei eine μ_{n-r} des R_n definirt, die ∞^{n-r} Punkte allgemeiner Lage enthält; es wird also angenommen, daſs nicht alle a_i vermöge (35) verschwinden. Wir sagen dann, diese μ_{n-r} (oder das Gleichungensystem (35)) *gestattet alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe* (30), wenn die Relationen

$$\Omega_i(x_1' x_2' \,..\, x_n') = 0 \qquad (i = 1 \,..\, r)$$

eine Folge von (35) sind, wenn also jeder auf der μ_{n-r} gelegene Punkt allgemeiner Lage durch die Transformationen (30) wiederum in Punkte der μ_{n-r} übergeführt wird.

Dazu ist offenbar notwendig und hinreichend, daſs unsere μ_{n-r} von $n-r-1$-fach unendlich vielen Bahnkurven der eingliedrigen Gruppe (30) erzeugt wird, d. h. also eine charakteristische μ_{n-r} der partiellen Differentialgleichung $Xf = 0$ darstellt (Art. 53).

Wir sagen, das Gleichungensystem (35) gestattet die infinitesimale Transformation Xf, wenn die Relationen

$$(36) \qquad X\Omega_i \equiv \sum_1^n {}^h a_h \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_h} = 0 \qquad (i = 1 \,..\, r)$$

eine Folge von (35) sind. Wir nehmen, um die Ideen zu fixiren, an, daſs die Relationen (35) nach $x_1 x_2 \,..\, x_r$ auflösbar seien, d. h. daſs die r-reihige Determinante

$$(37) \qquad \left| \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k} \right| \qquad (i, k = 1, 2 \,..\, r)$$

vermöge (35) nicht verschwinde. Denkt man sich $x_1 \,..\, x_r$ aus (35) als Funktionen der andern x berechnet und wieder in (35) eingesetzt, so erhält man durch Differentiation der so entstehenden Indentitäten:

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_{r+h}} + \sum_1^r {}^k \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{r+h}} = 0 \quad (i = 1 \,..\, r,\ h = 1 \,..\, n-r).$$

Ersetzt man in (36) die Ableitungen $\dfrac{\partial \Omega_i}{\partial x_{r+h}}$ durch ihre soeben erhaltenen Werte, so folgt:

$$\sum_1^r {}^k \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k} \left(\sum_1^{n-r} {}^h a_{r+h} \frac{\partial x_k}{\partial x_{r+h}} - a_k \right) = 0 \quad (i = 1 \,..\, r).$$

Da nun die Determinante (37) vermöge (35) nicht null ist, so muſs man vermöge dieses Systems identisch haben:

$$\sum_1^{n-r} {}^h a_{r+h} \frac{\partial x_k}{\partial x_{r+h}} - a_k = 0 \quad (k = 1 \,.\,.\, r);$$

nach Artikel 49 ist also die Mannigfaltigkeit μ_{n-r} notwendig eine charakteristische μ_{n-r} der Gleichung $Xf = 0$, m. a. W. das Gleichungensystem (35) kann auf die Form (18) gebracht werden. Damit ist gezeigt:

Damit ein Gleichungensystem (35), *vermöge dessen nicht alle a_i verschwinden, alle Transformationen der von Xf erzeugten eingliedrigen Gruppe gestatte, ist notwendig und hinreichend, dafs es die infinitesimale Transformation Xf gestatte; es definirt dann eine charakteristische Mannigfaltigkeit der partiellen Differentialgleichung $Xf = 0$.*

Beiläufig folgt noch der wichtige Satz:

Gestattet ein Gleichungensystem die infinitesimale Transformation Xf, so gestattet auch jedes äquivalente Gleichungensystem diese infinitesimale Transformation.

Dieser Satz gilt offenbar auch für solche Gleichungensysteme, vermöge deren alle a_i null sind.

56. Sind $f_1 f_2 \,.\,.\, f_{n-1}$ irgend $n - 1$ unabhängige Lösungen der partiellen Differentialgleichung $Xf = 0$, so besteht nach der Schlufsbemerkung des Art. 47 für jedes f eine Identität der Form

$$(38) \qquad \varrho\,(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) \,.\, Xf \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man mit D die rechtsstehende Determinante, ferner mit D_{ik} den Koeffizienten, mit dem die Ableitung $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ 1) in der Entwickelung von D behaftet ist, so hat man identisch

$$(39) \qquad \varrho\, a_k \equiv D_{n\,k} \qquad (k = 1, 2 \,.\,.\, n).$$

Die Funktion ϱ, deren Beschaffenheit natürlich von der Wahl der Lösungen $f_1 \,.\,.\, f_{n-1}$ abhängt, heifst ein *„Jacobischer Multiplikator"* der partiellen Differentialgleichung $Xf = 0$. Bezüglich dieses Multiplikators gelten folgende Sätze.

1) Jeder Multiplikator ϱ der Gleichung (1) genügt identisch der nicht homogenen, linearen partiellen Differentialgleichung:

---

1) $f_n \equiv f$.

$$\frac{\partial(\varrho a_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\varrho a_2)}{\partial x_2} + \cdot\cdot + \frac{\partial(\varrho a_n)}{\partial x_n} \equiv 0$$

oder also:

$$(40) \qquad a_1 \frac{\partial \varrho}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \varrho}{\partial x_2} + \cdot\cdot + a_n \frac{\partial \varrho}{\partial x_n} = -\varrho \cdot \sum_1^n{}^i \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

In der That, ist $D_{\iota k \atop r s}$ der Koeffizient, mit dem das Produkt $\frac{\partial f_\iota}{\partial x_k} \frac{\partial f_r}{\partial x_s}$ in der Entwickelung von D multiplizirt auftritt, so hat man:

$$(41) \qquad \sum_1^n{}^k \frac{\partial D_{\iota k}}{\partial x_k} \equiv \sum_1^n{}^k \sum_1^n{}^r \sum_1^n{}^s D_{\iota k \atop r s} \frac{\partial^2 f_r}{\partial x_k \partial x_s}.$$

Der Koeffizient, mit dem auf der rechten Seite die Ableitung $\frac{\partial^2 f_r}{\partial x_k \partial x_s}$ multiplizirt ist, hat die Form:

$$D_{\iota k \atop r s} + D_{\iota s \atop r k},$$

verschwindet also nach einem bekannten, von Laplace herrührenden Determinantensatz identisch; jede Summe der Form (41) ist daher identisch null, und unser Satz folgt jetzt unmittelbar aus (39).

2) Sind ϱ, ϱ' zwei Multiplikatoren der Gleichung $Xf = 0$, so ist der Quotient $\frac{\varrho}{\varrho'}$ konstant oder ein Integral dieser Gleichung.

In der That, multiplizirt man die Gleichung (40) mit ϱ', ferner die analoge Gleichung, der ϱ' genügt, mit ϱ und subtrahirt, so folgt:

$$\sum_1^n{}^i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right) = 0.$$

3) Ist ϱ ein Multiplikator von $Xf = 0$ und ω eine beliebige Lösung dieser Gleichung, so ist auch $\varrho\omega$ ein Multiplikator, und jeder Multiplikator läſst sich in dieser Form darstellen.

Der letzte Teil des Satzes folgt aus 2); der erste ergiebt sich, indem man die Identität (38) mit ω multiplizirt, und beachtet, daſs ω eine Funktion der f_ι allein ist, und daſs identisch:

$$\omega\varrho D \equiv \begin{pmatrix} \Omega_1 f_2 \cdot\cdot f_{n-1}, f \\ x_1 x_2 \cdot\cdot x_{n-1}, x_n \end{pmatrix}$$

wenn mit Ω die Funktion

$$\int_{f_1'}^{f_1} \omega(f_1 f_2 \cdot\cdot f_{n-1}) df_1$$

bezeichnet wird.

4) Genügt eine Funktion ϱ identisch der partiellen Differentialgleichung (40), so ist sie ein Multiplikator der Gleichung $Xf = 0$.

In der That, ist ϱ' ein Multiplikator und setzen wir $\varrho = \omega\varrho'$, so folgen aus den gemachten Annahmen der Reihe nach die Identitäten:

$$0 \equiv \sum \frac{\partial(\omega\varrho' a_i)}{\partial x_i} \equiv \omega \sum \frac{\partial(\varrho' a_i)}{\partial x_i} + \varrho' X\omega \equiv \varrho' X\omega,$$

d. h. ω ist ein Integral von $Xf = 0$, und infolge dessen nach 3) ϱ ein Multiplikator.

5) Verwandelt sich vermöge der Variabelntransformation

$$y_i = \varphi_i(x_1 x_2 \ldots x_n) \qquad (i = 1 \ldots n) \tag{42}$$

der Ausdruck Xf in den folgenden:

$$Yf \equiv \sum_1^n {}_h\, b_h(y_1 y_2 \ldots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_h}$$

und ist ϱ ein Multiplikator von $Xf = 0$, so ist der Quotient:

$$\frac{\varrho}{\begin{pmatrix} y_1 y_2 \ldots y_n \\ x_1 x_2 \ldots x_n \end{pmatrix}},$$

wenn man ihn durch die y_i allein ausdrückt, ein Multiplikator der partiellen Differentialgleichung $Yf = 0$.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus den vermöge (42) bestehenden Identitäten:

$$\varrho Xf \equiv \begin{pmatrix} f_1 f_2 \ldots f_{n-1} f \\ x_1 x_2 \ldots\ldots x_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_1 f_2 \ldots f \\ y_1 y_2 \ldots y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 y_2 \ldots y_n \\ x_1 x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} \equiv \varrho \,.\, Yf.$$

6) Kennt man einen Multiplikator $\varrho(x_1 x_2)$ der partiellen Differentialgleichung

$$a_1(x_1 x_2) \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2(x_1 x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \tag{43}$$

so erhält man durch eine Quadratur ein Integral $\omega(x_1 x_2)$ derselben.

In der That, man hat der Annahme nach:

$$\frac{\partial(\varrho a_1)}{\partial x_1} \equiv -\frac{\partial(\varrho a_2)}{\partial x_2};$$

also ist der Ausdruck

$$\varrho a_2 dx_1 - \varrho a_1 dx_2$$

das exakte Differential einer Funktion ω, die durch eine Quadratur ermittelt wird und offenbar die Gleichung (43) befriedigt.

7) Kennt man $n - 2$ unabhängige Integrale $f_1 f_2 \ldots f_{n-2}$ von

$Xf = 0$ und eine Funktion ϱ, die der Bedingung (40) genügt (d. h. also nach 4) einen Multiplikator), so läfst sich durch eine Quadratur eine $n-1^{\text{te}}$ Lösung f_{n-1} bestimmen, und zwar so, dafs die Identität (38) stattfindet.

Denn vermöge der Variabelntransformation

$$(44) \qquad y_1 = f_1 \ldots y_{n-2} = f_{n-2};\ y_{n-1} = x_{n-1};\ y_n = x_n$$

nimmt Xf nach Art. 51 die Gestalt:

$$Yf = \varrho_{n-1}(y_1 y_2 \ldots y_n)\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} + \varrho_n(y_1 y_2 \ldots y_n)\frac{\partial f}{\partial y_n}$$

an, und der Quotient

$$\frac{\varrho}{\begin{pmatrix} y_1 y_2 \ldots y_n \\ x_1 x_2 \ldots x_n \end{pmatrix}} = \frac{\varrho}{\begin{pmatrix} f_1 \ldots f_{n-2} \\ x_1 \ldots x_{n-2} \end{pmatrix}}$$

verwandelt sich vermöge (44) in einen Multiplikator σ von $Yf = 0$; bestimmt man jetzt nach 6) mittels einer Quadratur eine Funktion $\omega(y_1 \ldots y_n)$ derart, dafs

$$\frac{\partial \omega}{\partial y_{n-1}} \equiv \sigma \varrho_n, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y_n} \equiv -\sigma \varrho_{n-1},$$

so hat man, wie leicht zu ersehen, vermöge (44) die Identitäten

$$\varrho \cdot Yf \equiv \begin{pmatrix} y_1 \ldots y_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega & f \\ y_{n-1} & y_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y_1 \ldots y_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \ldots y_{n-2}\,\omega & f \\ y_1 \ldots y_{n-2}\, y_{n-1} & y_n \end{pmatrix}.$$

Nennt man also $f_{n-1}(x_1 \ldots x_n)$ das, was aus ω wird, wenn man die y durch ihre Werte (44) ersetzt, so erhält man die Identitäten, die beim Beweis von Satz 5) benutzt wurden, in umgekehrter Reihenfolge, womit unsere Behauptung nachgewiesen ist.

Genügen z. B. die Koeffizienten a_i der Gleichung $Xf = 0$ der Bedingung:

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n} = 0$$

d. h. besitzt $Xf = 0$ den Multiplikator 1, und kennt man $n-2$ unabhängige Lösungen von $Xf = 0$, so erhält man durch eine Quadratur das noch fehlende $n-1^{\text{te}}$ Integral.

Solches ist z. B. der Fall bei der Gleichung

$$\left(\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

mit den Independenten xyz, ferner bei der linearen partiellen Differentialgleichung

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{2}^{m}{}_h \left(\frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial f}{\partial x_h} - \frac{\partial H}{\partial x_h} \frac{\partial f}{\partial p_h} \right) = 0,$$

worin die $2m - 1$ Independenten mit $x_1 x_2 \ldots x_m p_2 \ldots p_m$ bezeichnet sind, und H irgend eine Funktion derselben bedeutet.

§ 3. Systeme linearer partieller Differentialgleichungen.

57. Wir nennen die partiellen Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \sum_{1}^{n}{}_s \, \xi_{ks}(x_1 x_2 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots p)$$

ein *p-gliedriges System* partieller Differentialgleichungen, wenn sie linear unabhängig sind, d. h. wenn nicht alle p-reihigen Determinanten der Matrix

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdot\ \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \xi_{p1} & \xi_{p2} & \cdot\ \cdot & \xi_{pn} \end{matrix} \right\|$$

identisch verschwinden. Ist $x_1^0 \ldots x_n^0$ eine Stelle, an der alle Funktionen ξ_{ks} regulär sind, so können wir (Art. 38, 3), 6)) immer annehmen, dafs die Determinante

$$(3) \qquad | \xi_{ik} | \qquad (i, k = 1, 2 \ldots p)$$

an jener Stelle nicht null sei; der Punkt $P(x_1^0 \ldots x_n^0)$ heifse dann ein „Punkt allgemeiner Lage" des R_n (hinsichtlich der Gleichungen (1)).

Es erhebt sich die Frage, ob die Gleichungen (1) Integrale gemein haben können, und wie man alle etwaigen gemeinsamen Integrale findet.

Setzen wir

$$X_k f \equiv \sum_{1}^{n}{}_s \, \xi_{ks} \frac{\partial f}{\partial x_s}$$

und ist f eine gemeinsame Lösung von (1), d. h. verschwinden alle Ausdrücke $X_k f$ identisch, so gilt dasselbe von den beiden Ausdrücken

$$X_i(X_k f) \quad \text{und} \quad X_k(X_i f).$$

Man hat nun aber, wenn $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ irgend welche Funktionen bedeuten:

$$\begin{aligned} X_i(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots) &\equiv X_i\varphi_1 + X_i\varphi_2 + \cdots \\ X_i(\varphi_1 \varphi_2) &\equiv \varphi_2 X_i \varphi_1 + \varphi_1 X_i \varphi_2. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$X_i(X_k f) \equiv \sum_1^n{}^s X_i(\xi_{ks}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_s} + \sum_1^n{}^s \xi_{ks} X_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_s}\right)$$

$$X_k(X_i f) \equiv \sum_1^n{}^s X_k(\xi_{is}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_s} + \sum_1^n{}^s \xi_{is} X_k\left(\frac{\partial f}{\partial x_s}\right).$$

Die zweiten Summen rechts sind aber, wie die Ausrechnung lehrt, identisch, und es folgt:

$$X_i(X_k f) - X_k(X_i f) \equiv \sum_1^n{}^s (X_i \xi_{ks} - X_k \xi_{is}) \frac{\partial f}{\partial x_s},$$

so dafs also die rechte Seite keine zweiten Ableitungen von f enthält. Setzen wir zur Abkürzung

$$(X_i X_k) \equiv X_i(X_k f) - X_k(X_i f),$$

so können wir den Satz aussprechen:

Jede gemeinsame Lösung der Gleichungen (1) *genügt auch den folgenden linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:*

(4) $$(X_i X_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2 \,..\, p).$$

Ist jede dieser Gleichungen eine *Folge* des Systems (1) (Art. 9), d. h. giebt es Funktionen ϱ_{iks} derart, dafs:

$$(X_i X_k) \equiv \varrho_{ik1} X_1 f + \varrho_{ik2} X_2 f + \cdots + \varrho_{ikp} X_p f \quad (i, k = 1 \cdot\cdot p)$$

für jedes beliebige f, d. h. also, dafs identisch:

$$X_i \xi_{ks} - X_k \xi_{is} \equiv \sum_1^p{}^l \varrho_{ikl} \xi_{ls} \qquad (i, k = 1 \,..\, p)$$

so nennt man die Gleichungen (1) ein „*p-gliedriges vollständiges System*“. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Vollständigkeit des Systems (1) bestehen also in dem identischen Verschwinden aller $p+1$-zeiligen Determinanten sämtlicher Matrices der Form:

$$\begin{Vmatrix} X_i \xi_{k1} - X_k \xi_{i1}, & \xi_{11}, & \xi_{21}, & .. & \xi_{p1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_i \xi_{kn} - X_k \xi_{in}, & \xi_{1n}, & \xi_{2n} & .. & \xi_{pn} \end{Vmatrix} \qquad (i, k = 1, 2 \,..\, p).$$

Ein n-gliedriges System ist natürlich stets vollständig.

58. Ist das System (1) unvollständig, so bilden die Relationen (1) (4) zusammen mehr als p linear unabhängige Gleichungen, die wir so schreiben:

$$X_1 f = 0, \; X_p f = 0, \; X_{p+1} f = 0, \,..\, X_{p+q} f = 0.$$

Dieses System ist entweder vollständig, oder man erhält durch Bildung der Relationen

$$(X_i X_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2 \,.\,.\, p + q)$$

neue, von den vorigen unabhängige Relationen. Da es nun ein mehr als n-gliedriges System nicht giebt, so gelangt man durch Wiederholung dieses Verfahrens in allen Fällen zu einem r-gliedrigen vollständigen System, dem alle etwaigen gemeinsamen Lösungen von (1) genügen müssen.

Die Ermittelung der gemeinsamen Lösungen eines nicht vollständigen p-gliedrigen Systems (1) *kommt also stets auf die Integration eines r-gliedrigen vollständigen Systems hinaus, wo $p < r \leqq n$. Ist $r = n$, so haben die gegebenen Gleichungen* (1) *augenscheinlich keine nichtkonstante Lösung f gemein.*

59. *Ist das System* (1) *vollständig, so ist auch jedes mit* (1) *äquivalente System* (Art. 10) *vollständig.* In der That, setzt man

$$X_i' f \equiv \sum_1^p {}^s\, \Psi_{is} X_s f \qquad (i = 1 \,.\,.\, p)$$

unter der Voraussetzung, daſs die Determinante der p^2 Funktionen Ψ_{is} nicht identisch null ist, d. h. daſs auch umgekehrt die $X_s f$ sich als lineare Kombinationen der $X_k' f$ ausdrücken lassen, so hat der Ausdruck $(X_i' X_k')$ die Form

$$\sum_1^p {}^s \sum_1^p {}^t\, \Psi_{is} \Psi_{kt} (X_s X_t) + \sigma_{ik1} X_1 f + \cdots + \sigma_{ikp} X_p f;$$

daher lassen sich die $(X_i' X_k')$ als Linearkombinationen der Ausdrücke $X_k f$, mithin auch als solche der $X_k' f$ darstellen.

Man kann die Ψ_{is} so wählen, daſs alle Ausdrücke $(X_i' X_k')$ *identisch verschwinden* (vgl. Art. 65); dann nennt man die Gleichungen

$$X_1' f = 0, \,.\,.\, X_p' f = 0$$

ein p-gliedriges *„Jacobi'sches System"*. Der einfachste Weg, das gegebene vollständige System durch ein äquivalentes Jacobi'sches zu ersetzen, besteht darin, es in der Form

$$(5) \qquad 0 = A_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + a_{i,p+1} \frac{\partial f}{\partial x_{p+1}} + a_{i,p+2} \frac{\partial f}{\partial x_{p+2}} + \cdots + a_{in} \frac{\partial f}{\partial x_n}$$
$$(i = 1 \,.\,.\, p)$$

aufzulösen; daſs dies möglich ist, können wir nach Art. 57 stets annehmen. Die Ausdrücke $(A_i A_k)$ sind nach dem eben Gesagten lineare

Kombinationen der $A_\iota f$, aber andrerseits von den Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \cdot \frac{\partial f}{\partial x_p}$$

frei, also in der That identisch null.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daſs p Gleichungen der Form (5) ein Jacobi'sches System bilden, schreiben sich daher folgendermaſsen:

(6) $A_\iota(a_{k,p+h}) - A_k(a_{\iota,p+h}) \equiv 0 \quad (i, k = 1 \,.\,. p;\ h = 1, \,.\,. n-p)$

oder etwas ausführlicher:

$$\frac{\partial a_{k,p+h}}{\partial x_i} + \sum_1^{n-p} {}^l\, a_{\iota,p+l} \frac{\partial a_{k,p+h}}{\partial x_{p+l}} \equiv \frac{\partial a_{\iota,p+h}}{\partial x_k} + \sum_1^{n-p} {}^l\, a_{k,p+l} \frac{\partial a_{\iota,p+h}}{\partial x_{p+l}}.$$

60. Führt man mittels der Formeln

(7) $$y_\iota = \varphi_i(x_1 \,.\,. x_n) \qquad (i = 1 \,.\,. n)$$

statt der x_i die neuen Variabeln $y_1 \,.\,. y_n$ in die Ausdrücke $X_k f$ ein, so mögen sich diese letzteren bez. in die folgenden

$$Y_k f \equiv \sum_1^n {}^s\, \eta_{ks}(y_1 y_2 \,.\,. y_n) \frac{\partial f}{\partial y_n} \qquad (k = 1, 2 \,.\,. p)$$

verwandeln. Dann geht der Ausdruck $X_\iota(X_k f)$ in $Y_\iota(Y_k f)$, ebenso der Ausdruck $X_k(X_i f)$ in $Y_k(Y_\iota f)$, also der Klammerausdruck $(X_\iota X_k)$ direkt in $(Y_i Y_k)$ über.

„*Nimmt also ein p-gliedriges (vollständiges oder unvollständiges) System* (1) *vermöge der Variabelntransformation* (7) *die Gestalt*

$$Y_1 f = 0,\ Y_2 f = 0, \,.\,.\ Y_p f = 0$$

an, so verwandelt sich gleichzeitig das Gleichungsystem

(8) $$X_\iota f = 0,\ (X_i X_k) = 0, \qquad (i, k = 1 \,.\,. p)$$

in das folgende:

$$Y_i f = 0,\ (Y_\iota Y_k) = 0 \qquad (i, k = 1 \,.\,. p)^{1)}.$$

Wir drücken dies dadurch aus, daſs wir sagen: das Gleichungensystem (8) ist mit dem System (1) „*invariant verknüpft*".[1])

Wenden wir den eben erhaltenen Satz auf (8) von neuem an, so ergiebt sich, daſs auch das Gleichungensystem

$$X_i f = 0, \quad (X_i X_k) = 0, \quad (X_i (X_h X_l)) = 0 \quad ((X_i X_k)(X_h X_l)) = 0$$
$$(i, k, h, l = 1 \,.\,. p)$$

---

1) Engel II.

mit (8), oder was dasselbe besagt, mit (1) invariant verknüpft ist, d. h. sich vermöge (7) in das entsprechende, aus dem $Y_i f$ gebildete System verwandelt; durch Wiederholung dieser Schlufsweise erhält man eine gewisse Anzahl von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen, die mit dem ursprünglichen invariant verknüpft sind.

Als Korollar dieses Satzes ergiebt sich noch, dafs durch eine beliebige Variabelntransformation jedes p-gliedrige vollständige System wieder in ein solches, ebenso jedes p-gliedrige Jacobi'sche System wieder in ein p-gliedriges Jacobi'sches System verwandelt wird. Auch erkennt man sofort, dafs die Gliederzahl r desjenigen vollständigen Systems, dem nach Art. 58 alle etwaigen Lösungen eines unvollständigen Systems (1) genügen, bei jeder Variabelntransformation invariant bleibt.

61. Wir wollen nunmehr die Frage nach den gemeinsamen Lösungen des p-gliedrigen Jacobi'schen Systems (5) beantworten; dies System werden wir kurz mit J bezeichnen. Es seien

$$x_2' x_3' \,.\,.\, x_p' x_{p+1}' \,.\,.\, x_n' \tag{9}$$

$n-1$ unabhängige Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$0 = A_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{p+1}^{n} {}^k a_{1k} \frac{\partial f}{\partial x_k}. \tag{10}$$

Die $n-1$ Funktionen (9) sind hinsichtlich $x_2 \,.\,.\, x_n$ unabhängig (Schlufssatz des Art. 46); die Funktionen $x_2' \,.\,.\, x_p'$ können mit $x_2 \,.\,.\, x_p$ identifizirt werden. Wir führen dann die Funktionen (9) nebst $x_1' \equiv x_1$ als neue Variable in J ein, wodurch dieses System nach Art. 51 die folgende Form erhält:

$$A_1' f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1'} = 0$$

$$(J')\quad \begin{cases} A_2' f \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_2'} + \sum\limits_{p+1}^{n} {}^k a_{2k}' \dfrac{\partial f}{\partial x_k'} = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ A_p' f \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_p'} + \sum\limits_{p+1}^{n} {}^k a_{pk}' \dfrac{\partial f}{\partial x_k'} = 0. \end{cases}$$

Diese p Gleichungen bilden nach der vor. Nr. wieder ein Jacobi'sches System; insbesondere hat man:

$$(A_1' A_i') \equiv 0 \qquad (i = 2, 3 \,.\,.\, p)$$

oder also:

$$\frac{\partial a_{ik}'}{\partial x_1'} = 0 \quad (i = 2, 3 \,.\,.\, p;\ k = p+1, p+2 \,.\,.\, n),$$

d. h. die Koeffizienten der $p-1$ mit J' bezeichneten Gleichungen sind von x_1' unabhängig. *Durch unsere Transformation ist also die Aufsuchung der gemeinsamen Lösungen von J auf die Integration des $p-1$-gliedrigen Jacobi'schen Systems J' in $n-1$ Independenten zurückgeführt.* Denn aus jeder Lösung $\varphi(x_2' \ldots x_n')$ von J' erhält man ein Integral von J, wenn man die x_i' durch die x ausdrückt, und jede Lösung von J wird auf diesem Wege erhalten.

Auf J' wenden wir jetzt dieselbe Schlufsweise an. Es seien

$$(11) \qquad x_3'' x_4'' \ldots x_p'' x_{p+1}'' \ldots x_n''$$

$n-2$ unabhängige Integrale der Gleichung $A_2' f = 0$; die $p-2$ ersten dieser Funktionen sind mit $x_3' \ldots x_p'$ identisch. Führt man die Gröfsen (11) nebst $x_2'' = x_2'$ als neue Variable in J' ein, so erhält man die Relation $\frac{\partial f}{\partial x_2''} = 0$ und ein $p-2$-gliedriges, von x_2'' ganz unabhängiges Jacobi'sches System J'' mit den $n-2$ Independenten (11); und jede Lösung von J'' liefert eine Lösung von J und umgekehrt. Durch Wiederholung dieser Schlufsweise gelangt man endlich zu *einer* homogenen partiellen Differentialgleichung:

$$(J^{p-1}) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_p^{(p-1)}} + \sum_{p+1}^{n} {}_k\, a_{pk}^{(p-1)} \frac{\partial f}{\partial x_k^{(p-1)}} = 0 \text{ [1]},$$

deren Koeffizienten nur von den Variabeln

$$(12) \qquad x_p^{(p-1)},\ x_{p+1}^{(p-1)} \ldots x_n^{(p-1)}$$

abhängen. Jede Lösung $\varphi(x_p^{(p-1)} \ldots x_n^{(p-1)})$ dieser Gleichung liefert, wenn man der Reihe nach zu den vorhergehenden Variabelnsystemen, endlich zu den $x_1 \ldots x_n$ zurückgeht, ein Integral von $J^{(p-2)}, J^{(p-3)} \ldots J', J$, und umgekehrt erhält man aus jeder Lösung von J durch die benutzten Variabeltransformationen eine solche der partiellen Differentialgleichung $J^{(p-1)}$.

Ein p-gliedriges Jacobi'sches System in n Independenten besitzt daher $n-p$ und nicht mehr unabhängige Lösungen; sein allgemeinstes Integral ist eine arbiträre Funktion dieser letzteren.

Die Ermittelung jener $n-p$ unabhängigen Lösungen erfordert nach dem Vorigen die Integration je einer homogenen linearen partiellen Differentialgleichung in $n, n-1, \ldots n-p+1$ Independenten, von der bezw. $p-1, p-2, \ldots 1, 0$ Integrale von vorneherein bekannt sind, also nach Art. 51 $p$mal je eine Operation $n-p, n-p-1, \ldots 3, 2, 1$.

---

1) Es wird $x_i^{(1)} = x_i'$, $x_i^{(2)} = x_i''$ etc. gesetzt.

62. Wir wollen nun die analytische Beschaffenheit der $n-p$ unabhängigen Lösungen von J näher untersuchen.[1]) Es sei $x_1^0 \,..\, x_n^0$ ein Punkt allgemeiner Lage (Art. 57). Dann sind alle Koeffizienten a_{ik} des Jacobi'schen Systems J, das durch Auflösung der Gleichungen (1) entsteht, an der Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ regulär (Art 3; Art. 38, 5), 6)). Es werde der Einfachheit halber $x_1^0 = 0, \,..\, x_n^0 = 0$ angenommen. Unter den Funktionen (9) verstehen wir jetzt die Hauptintegrale der Gleichung $A_1 f = 0$ hinsichtlich $x_1 = 0$ (Art. 46). Die x_i' hängen dann mit den x_i folgendermaßsen zusammen:

$$x_i' = x_i;\ x'_{p+k} = x_{p+k} + x_1 \mathfrak{P}_k(x_1, x_2, \,..\, x_n),$$
$$(i = 1 \,..\, p;\ k = 1 \,..\, n-p)$$

(13) $$x_i = x_i';\ x_{p+k} = x'_{p+k} - x_1' \mathfrak{P}_k(-x_1', x_2' \,..\, x_n')$$

wo $\mathfrak{P}_k$ beidemale dieselben Potenzreihen bedeuten. Die Koeffizienten a'_{ik} des Jacobi'schen Systems J' erhalten jetzt die Form:

$$a'_{ik} \equiv \frac{\partial x_k'}{\partial x_i} + \sum_{p+1}^{n}{}^s a_{is} \frac{\partial x_k'}{\partial x_s} \quad (i = 2 \,..\, p;\ k = p+1 \,..\, n)$$

wenn rechts die x_i mittels (13) durch die x_i' ausgedrückt werden. Da aber a'_{ik} von x_1' frei ist, so kann man darin, ohne seinen Wert zu ändern, x_1' durch 0 ersetzen. Man hat nun:

$$\left(\frac{\partial x_k'}{\partial x_s}\right)_{x_1'=0} = 0\ (s \gtrless k);\quad \left(\frac{\partial x_k'}{\partial x_k}\right)_{x_1'=0} = 1;$$

also folgt:

$$a'_{ik} \equiv a_{ik}(0, x_2' x_3' \,..\, x_n').$$

Die Form des Jacobi'schen Systems J' kann also sofort angegeben werden, auch für den Fall, daſs der Zusammenhang zwischen den x_i' und den x_i nicht bekannt wäre. Da die a'_{ik} an der Stelle $x_2' = 0 \,..\, x_n' = 0$ regulär sind, so können wir unter den Gröſsen (11) die Hauptintegrale der Gleichung $A_2' f = 0$ hinsichtlich $x_2' = 0$ verstehen. Wie soeben erkennt man, daſs die Koeffizienten a''_{ik} des Jacobi'schen Systems J'' nunmehr folgende Form annehmen:

$$a''_{ik} \equiv a_{ik}(0, 0, x_3'' x_4'' \,..\, x_n'').$$

Die Funktionen (11) sind gewöhnliche Potenzreihen der Gröſsen $x_2' \,..\, x_n'$, und reduziren sich vermöge $x_2' = 0$ bezw. auf $x_3' \,..\, x_n'$; sie sind also, in den ursprünglichen x ausgedrückt, nach Art. 38, 6) gewöhnliche Potenzreihen von $x_1 x_2 \,..\, x_n$, die sich vermöge $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

1) Lie I, 89.

bezw. auf $x_3 \ldots x_n$ reduziren. Schliefst man in dieser Weise weiter, d. h. versteht man allgemein unter

$$x_\lambda^{(k-1)}, x_{\lambda+1}^{(\lambda-1)} \ldots x_n^{(k-1)}$$

die Hauptintegrale der ersten Gleichung des Jacobi'schen Systems $J^{(k-2)}$ hinsichtlich $x_{\lambda-1}^{(k-2)} = 0$, so gelangt man durch das Verfahren der vorigen Nr. schliefslich zu einer partiellen Differentialgleichung $J^{(p-1)}$, deren Koeffizienten die Form

$$a_{p\lambda}^{(p-1)} = a_{p\lambda}(0, \ldots 0, x_p^{(p-1)} x_{p+1}^{(p-1)} \ldots x_n^{(p-1)}) \quad (k = p+1 \ldots n)$$

besitzen. Die $x_\iota^{(p-1)}$ sind dabei gewöhnliche Potenzreihen der Variabeln

$$x_{p-1}^{(p-2)} x_p^{(p-2)} \ldots x_n^{(p-2)},$$

die sich vermöge $x_{p-1}^{(p-2)} = 0$ bezw. auf $x_p^{(p-2)} \ldots x_n^{(p-2)}$ reduziren, ferner sind sie gewöhnliche Potenzreihen der Variabeln

$$x_{p-2}^{(p-3)} \ldots x_n^{(p-3)},$$

die sich vermöge $x_{p-2}^{(p-3)} = 0$, $x_{p-1}^{(p-3)} = 0$ bezw. auf $x_p^{(p-3)} \ldots x_n^{(p-3)}$ reduziren, etc., schliefslich sind sie gewöhnliche Potenzreihen von $x_1 \ldots x_n$, die für $x_1 = 0 \ldots x_{p-1} = 0$ bezw. in $x_p \ldots x_n$ übergehen.

Wir bezeichnen nun mit

$$x_{p+1}^{(p)} \ldots x_n^{(p)}$$

die $n-p$ Hauptintegrale von $J^{(p-1)}$, die sich für $x_p^{(p-1)} = 0$ bezw. auf $x_{p+1}^{(p-1)} \ldots x_n^{(p-1)}$ reduziren; diese liefern dann, in den ursprünglichen Variabeln x ausgedrückt, $n-p$ Integrale $h_1 h_2 \ldots h_{n-p}$ des Jacobi'schen Systems J, welche gewöhnliche Potenzreihen von $x_1 \ldots x_n$ sind, und sich für $x_1 = 0, \ldots x_p = 0$ bezw. auf $x_{p+1} \ldots x_n$ reduziren. Umgekehrt, besitzt J ein derartiges System von Lösungen, so verwandelt es sich offenbar beim Übergang zu den Variabeln $x_\iota^{(p-1)}$ in das System der Hauptintegrale von $J^{(p-1)}$ hinsichtlich $x_p^{(p-1)} = 0$. Indem wir statt der Stelle $0, \ldots 0$ einen beliebigen Punkt x_ι^0 allgemeiner Lage betrachten, können wir den Satz aussprechen:

„*Sind alle Funktionen* ξ_{ks} *an der Stelle* $x_1^0 \ldots x_n^0$ *regulär und verschwindet die Determinante* (3) *daselbst nicht, so besitzt das vollständige System* (1) *oder auch das damit äquivalente Jacobi'sche System* (5) *ein und nur ein System von* $n-p$ *unabhängigen Lösungen:*

$$(14) \qquad h_\iota(x_1 x_2 \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2 \ldots n-p),$$

welche an der Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ *regulär sind, und sich vermöge der Substitution*

(15) $$x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0 \,..\, x_p = x_p^0$$

bezw. auf

$$x_{p+1},\ x_{p+2},\ ..\ x_n$$

reduziren; diese Lösungen heifsen die Hauptintegrale des Systems (1) *hinsichtlich* $x_1 = x_1^0 \,..\, x_p = x_p^0$.

Jede andere, an der Stelle x_i^0 reguläre Lösung von (1) hat die Form $\varphi(h_1 h_2 \,..\, h_{n-p})$, wo φ an der Stelle $x_{p+1}^0 \,..\, x_n^0$ regulär, im Übrigen beliebig ist. Daraus folgt:

Ist unter den Annahmen des vorigen Satzes die Funktion

(16) $$\varphi(x_{p+1},\ x_{p+2}\ ..\ x_n)$$

an der Stelle $x_{p+1}^0 x_{p+2}^0 \,..\, x_n^0$ *regulär, im Übrigen willkürlich, so giebt es ein und nur ein Integral des vollständigen Systems* (1), *welches an der Stelle* $x_1^0 \,..\, x_n^0$ *regulär ist und vermöge der Substitution* (15) *in die vorgeschriebene Funktion* (16) *übergeht; dieses Integral wird durch* $\varphi(h_1 \,..\, h_{n-p})$ *dargestellt, und heifst das „allgemeine Integral des vollständigen Systems* (1)".

Wir wollen kurz andeuten, wie man diesen Satz direkt beweisen kann. Denkt man sich die in dem vorigen Satze definirte Integralfunktion in eine Potenzreihe der Form (1) pag. 44 entwickelt, so sind auf Grund der Angabe, dafs sich die gesuchte Funktion vermöge (15) auf $\varphi(x_{p+1} \,..\, x_n)$ reduziren soll, alle Koeffizienten der Form

$$c_{0,\,..\,0,\,\alpha_{p+1}\,\cdot\,\alpha_n}$$

bekannt. Alle andern Koeffizienten lassen sich dann mit Rücksicht auf den Satz 4) des Art. 38 aus dem gegebenen Jacobi'schen System (5) und den Relationen, die hieraus durch unbegrenzt wiederholte partielle Differentiationen nach den x_i folgen, der Reihe nach berechnen; dafs sich so für jeden Koeffizienten $c_{\alpha_1\ \alpha_n}$ immer nur je *ein* Wert ergiebt, erweist sich als eine Folge der Identitäten (6). Es erübrigt dann noch, die Konvergenz der so erhaltenen Reihenentwickelung nachzuweisen.[1])

63. Ganz ähnlich wie in Art. 46 schliefsen wir jetzt:

„Ist die Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ *wie vorhin definirt, so sind irgend* $n - p$ *unabhängige, an der Stelle* $x_1^0 \,..\, x_n^0$ *reguläre Lösungen*

(17) $$f_i \equiv \varphi_i(h_1, h_2 \,..\, h_{n-p}) \qquad (i = 1, 2 \,..\, n - p)$$

insbesondere hinsichtlich der Variabeln $x_{p+1} x_{p+2} \,..\, x_n$ *unabhängig."*

Dies läfst sich auch folgendermafsen zeigen:

Da der Annahme nach die Identitäten:

---

1) Vgl. z. B. Méray I 217.

$$\sum_1^n {}_s \xi_{ks} \frac{\partial f_i}{\partial x_s} = 0 \qquad (k = 1 \,..\, p;\; i = 1 \,..\, n - p)$$

bestehen, und nicht alle $n-p$-reihigen Determinanten der Matrix

$$(18) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_{n-p}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-p}}{\partial x_2} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_{n-p}}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

verschwinden, so sind die beiden Matrices (2) und (18) *korrespondirend*[1]); ist somit Ω die p-reihige Determinante, die aus der $k_1^{\text{ten}}, k_2^{\text{ten}} \,..\, k_p^{\text{ten}}$ Spalte von (2) besteht, und Ω' die dazu komplementäre $n-p$-reihige Determinante von (18), die also erhalten wird, wenn man die Spalten mit den Indices $k_1 k_2 \,..\, k_p$ aus (18) fortläſst, so existirt eine von der Wahl dieser Indices unabhängige Funktion $\varrho(x_1 \,..\, x_n)$, derart, daſs identisch

$$\Omega' \equiv \pm \varrho \Omega.$$

Die zu der Determinante (3) komplementäre ist die folgende

$$(19) \qquad \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdot\cdot & f_{n-p} \\ x_{p+1} & x_{p+2} & \cdot\cdot & x_n \end{pmatrix}$$

und da ϱ nicht identisch null sein kann, so ist unsere Behauptung erwiesen.

Die Funktion ϱ heiſst ein „*Lie'scher Multiplikator*"[2]) des vollständigen Systems (1); in diesem Begriff ist der des Jacobi'schen Multiplikators als Spezialfall ($p = 1$) enthalten, und es läſst sich für ihn eine ganz analoge Theorie entwickeln, wie für den letzteren, worauf wir aber nicht eingehen können.

Ist $x_1^0 \,..\, x_n^0$ ein Punkt allgemeiner Lage, und sind die f_ι wie vorhin definirt, so läſst sich jede an der Stelle x_ι^0 reguläre Lösung des Systems (1) auch als Funktion von $f_1 f_2 \,..\, f_{n-p}$ allein darstellen. Daraus folgt sofort, daſs das Gleichungensystem, welches sich durch Nullsetzen aller $n-p+1$-reihigen Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_{n-p}}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_{n-p}}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

---

1) s. z. B. Gordan-Kerschensteiner I 95.

2) Lie Math. Ann. 11 p. 501; Mayer Math. Ann. 12 p. 132.

ergiebt, im Sinne von Art. 10 mit dem System (1) äquivalent ist; es kann auch ersetzt werden durch die folgenden Gleichungen

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} & \frac{\partial f_2}{\partial x_i} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_{n-p}}{\partial x_i} & \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{p+1}} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_{n-p}}{\partial x_{p+1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{p+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_{n-p}}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 1\,..\,p).$$

Denn erfüllt f diese Relationen, so verschwinden nach Art. 7 überhaupt alle $n - p + 1$-reihigen Determinanten von obiger Funktionalmatrix, da die Determinante (19) nicht identisch null ist.

Kennt man die Lösungen $f_1 f_2 \,..\, f_{n-p}$, so gewinnt man die Hauptintegrale h_i, indem man die Relationen

$$f_i(x_1 x_2 \,..\, x_n) = f_i(x_1{}^0 x_2{}^0 \,..\, x_n{}^0) \qquad (i = 1\,..\,n-p)$$

in der Form

$$x^0_{p+i} = h_i(x_1 x_2 \,..\, x_n) \qquad (i = 1\,..\,n-p)$$

auflöst.

Wir erwähnen noch folgenden Satz, der sich durch eine ganz ähnliche Betrachtung wie das Theorem des Art. 49 ergiebt:

„*Ist das System* (1) *vollständig, und* $x_1{}^0 \,..\, x_n{}^0$ *ein Punkt allgemeiner Lage* (Art. 57), *bedeutet ferner* $\psi(x_{p+1} \,..\, x_{n-1})$ *eine arbiträre Funktion, die an der Stelle* $x^0_{p+1} \,..\, x^0_{n-1}$ *regulär ist und daselbst den Wert* $x_1{}^0$ *annimmt, so besitzen die nicht homogenen, linearen partiellen Differentialgleichungen:*

$$(20) \qquad \sum_1^{n-1}{}_s\, \xi_{ks} \frac{\partial x_n}{\partial x_s} - \xi_{kn} = 0 \qquad (k = 1\,..\,p)$$

mit der unbekannten Funktion x_n *und den unabhängigen Variabeln* $x_1 \,..\, x_{n-1}$ *eine und nur eine an der Stelle* $x_1{}^0 \,..\, x^0_{n-1}$ *reguläre Integralfunktion* x_n, *die bei der Substitution*

$$x_1 = x_1{}^0 \,..\, x_p = x_p{}^0$$

in die vorgeschriebene Funktion $\psi(x_{p+1} \,..\, x_{n-1})$ *übergeht. Diese Integralfunktion ergiebt sich durch Auflösung der Gleichung*

$$h_{n-p} = \psi(h_1 h_2 \,..\, h_{n-p-1})$$

nach x_n."

Die allgemeinste, an der Stelle x_i^0 reguläre Integralfunktion des obigen Systems kann demnach auch durch eine willkürliche Relation der Form

$$\varphi(f_1 f_2 \ldots f_{n-p}) = 0$$

definirt werden[1]). Aufser den genannten Integralfunktionen kann das genannte System nicht homogener partieller Differentialgleichungen nur noch Integralfunktionen

$$x_n = \xi(x_1 x_2 \ldots x_{n-1})$$

von der Eigenschaft besitzen, dafs vermöge dieser Relation alle p-reihigen Determinanten der Matrix (2) null sind.

64. Bedenkt man, dafs ein mehr als p-gliedriges vollständiges System nicht $n-p$ unabhängige Lösungen besitzen kann, so erhält man mit Rücksicht auf Art. 61 den folgenden, oft zu benützenden Satz:

Besitzt ein p-gliedriges Gleichungensystem der Form (1) $n-p$ Lösungen, die hinsichtlich $x_{p+1} x_{p+2} \ldots x_n$ unabhängig sind, so ist es vollständig und nach den Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f}{\partial x_p}$ auflösbar.

Beiläufig ergiebt sich noch:

Besitzt ein System von mehr als p linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen in n Independenten $n-p$ unabhängige Lösungen, so reduzirt es sich auf höchstens p linear unabhängige Gleichungen.

65. Die Gleichungen

$$(21) \qquad B_i f \equiv \sum_1^n {}_s\, \eta_{is} \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0 \qquad (i = 1 \ldots p)$$

mögen ein p-gliedriges Jacobi'sches System bilden, d. h. es sollen die Bedingungen

$$(22) \qquad B_i(B_k f) - B_k(B_i f) \equiv 0 \qquad (i, k = 1 \ldots p)$$

identisch erfüllt sein. *Ist dann φ ein Integral der Gleichung $B_i f = 0$, so ist auch jeder Ausdruck der Form $B_k \varphi$ ein Integral dieser Gleichung*[2]); dies folgt unmittelbar, wenn in (22) die Funktion f durch φ ersetzt wird. Es seien nun

$$(23) \qquad f_1 f_2 \ldots f_{n-p}$$

unabhängige Lösungen des Jacobi'schen Systems (21); die $p-1$ Gleichungen

$$(24) \quad B_1 f = 0,\ B_2 f = 0,\ \ldots\ B_{i-1} f = 0,\ B_{i+1} f = 0,\ \ldots\ B_p f = 0$$

bilden ein $p-1$-gliedriges Jacobi'sches System, das aufser (23) noch eine

1) Einen etwas allgemeineren Satz, der demjenigen des Art. 49 analog ist, s. bei Mayer, Lpz. Ber. 1899 p. 16.

2) Jacobi I Bd. 5, pag. 29; vgl. Clebsch IV, 260.

$n - p + 1^{\text{te}}$, von den f_ι unabhängige Lösung ψ_i besitzt. Dann ist die Funktion $B_\iota \psi_i$ nicht identisch null, und nach dem oben Gesagten ebenfalls eine Lösung von (24), d. h. es besteht eine Identität der Form:

$$B_\iota \psi_i \equiv \Psi_\iota(f_1, f_2 \,.\,.\, f_{n-p} \psi_\iota).$$

Definirt man jetzt die Funktion φ_ι durch die Formel

$$\varphi_i \equiv \int_{\psi_i^0}^{\psi_i} \frac{d\psi_i}{\Psi_\iota},$$

so ist $B_\iota \varphi_i \equiv 1$, und es folgt:

Bilden die Gleichungen (21) ein p-gliedriges Jacobi'sches System, so giebt es immer n augenscheinlich unabhängige Funktionen

$$(25) \qquad \varphi_1 \varphi_2 \,.\,.\, \varphi_p,\; f_1 f_2 \,.\,.\, f_{n-p}$$

derart, dafs identisch:

$$(26) \qquad B_\iota f_h \equiv B_i \varphi_k \equiv 0,\; B_i \varphi_i \equiv 1 \quad (i, k = 1 \,.\,.\, p;\; h = 1 \,.\,.\, n - p).$$

Umgekehrt, giebt es ein solches Funktionensystem, so bilden die Gleichungen (21) ein Jacobi'sches System, da ja jede der linearen partiellen Differentialgleichungen (22) von allen n unabhängigen Funktionen (25) befriedigt wird, also für jedes f identisch erfüllt sein mufs.

Ist das Jacobi'sche System (21) mit dem vollständigen System (1) äquivalent, d. h. bestehen Identitäten der Form

$$(27) \qquad X_\iota f \equiv \sum_1^p{}_s\, \varrho_{is} B_s f \qquad (i = 1 \,.\,.\, p),$$

so sind die Funktionen (23) $n - p$ unabhängige Lösungen von (1). Ersetzt man in (27) die Funktion f durch φ_k, so folgt mit Rücksicht auf (26):

$$X_i \varphi_k \equiv \varrho_{ik} \qquad (i, k = 1 \,.\,.\, p).$$

Umgekehrt, ist dies der Fall, und ist die Determinante $|\varrho_{ik}|$ nicht identisch null, so bestehen die Identitäten (26), also bilden die Gleichungen (21) ein mit (1) äquivalentes Jacobi'sches System. Damit haben wir folgenden Satz gewonnen:

Man erhält das allgemeinste, mit dem vollständigen System (1) *äquivalente Jacobi'sche System*

$$(21) \qquad B_1 f = 0,\; B_2 f = 0,\; .\,.\; B_p f = 0,$$

indem man p Funktionen $\varphi_1 \varphi_2 \,.\,.\, \varphi_p$ beliebig wählt, doch so, dafs die Determinante

$$|X_i \varphi_k| \qquad (i, k = 1 \,.\,.\, p)$$

nicht identisch verschwindet, und die Relationen

$$X_i f \equiv \sum_1^p {}^k X_i \varphi_k \,.\, B_k f \qquad (i = 1 \,..\, p)$$

nach den Unbekannten $B_k f$ auflöst.[1])

Wählt man beispielsweise $x_1 x_2 \,..\, x_p$ statt der φ_ι, so erhält man das mit (1) äquivalente Jacobi'sche System (5).

66. Ist das Jacobi'sche System (21) gegeben und kennt man $n - p$ unabhängige Lösungen $f_1 f_2 \,..\, f_{n-p}$ desselben, so lassen sich die Funktionen $\varphi_1 \varphi_2 \,..\, \varphi_p$ durch je eine Quadratur bestimmen. Denn führt man mittels der Variabelntransformation

$$y_\iota = x_\iota, \; y_{k+p} = f_k \qquad (i = 1 \,..\, p;\; k = 1 \,..\, n - p)$$

die y statt der x ein, so nehmen die rechten Seiten von (21) bez. die Form

$$\overline{B}_\iota f \equiv \sum_1^p {}^s \sigma_{is}(y_1 \,..\, y_n) \frac{\partial f}{\partial y_s} \qquad (i = 1 \,..\, p)$$

an (Art. 51). Die Gleichungen $\overline{B}_1 f = 0 \,..\, \overline{B}_p f = 0$ sind mit

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0 \,..\, \frac{\partial f}{\partial y_p} = 0$$

äquivalent und bilden ein Jacobi'sches System (Art. 60); also giebt es p Funktionen $\psi_i(y_1 \,..\, y_n)$, derart, daſs

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} \equiv \sum_1^p {}^s \frac{\partial \psi_s}{\partial y_\iota} \overline{B}_s f \equiv \sum_1^p {}^s \sum_1^p {}^t \frac{\partial \psi_s}{\partial y_\iota} \sigma_{st} \frac{\partial f}{\partial y_t},$$

woraus folgt:

$$0 \equiv \sum_1^p {}^s \sigma_{st} \frac{\partial \psi_s}{\partial y_i} \qquad (i \gtrless t)$$

$$1 \equiv \sum_1^p {}^s \sigma_{s\iota} \frac{\partial \psi_s}{\partial y_i}\,.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich sämtliche Ableitungen

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial y_i} \qquad (i, s = 1 \,..\, p)$$

als Funktionen von $y_1 \,..\, y_n$ berechnen, die ψ_s werden also durch je eine Quadratur ermittelt und sind bis auf je eine additive arbiträre Funktion von $y_{p+1} \,..\, y_n$ bestimmt. Durch Übergang zu den ursprünglichen Variabeln x verwandeln sie sich in die gesuchten Funktionen φ, die natürlich ebenfalls nur bis auf additive arbiträre Funktionen von $f_1 f_2 \,..\, f_{n-p}$ bestimmt sind.

1) Vgl. Clebsch IV 257.

67. Wir denken uns das gegebene vollständige System (1) durch ein äquivalentes Jacobi'sches System (21) ersetzt. Dann läfst sich aus dem zu Anfang des Art. 65 aufgestellten Satz folgende Methode zur Integration des Systems (21) gewinnen.

Von der partiellen Differentialgleichung

$$B_1 f = 0 \tag{28}$$

sind von vorneherein die Integrale $\varphi_2 \varphi_3 \ldots \varphi_p$ bekannt; wir denken uns ein weiteres Integral χ_1 dieser Gleichung bestimmt. Dann sind auch alle Funktionen

$$\chi_2 \equiv B_2 \chi_1; \; \chi_3 \equiv B_2 \chi_2 \;\ldots\; \chi_i = B_2 \chi_{i-1} \tag{29}$$

Integrale der Gleichung (28). Da diese Gleichung nicht mehr als $n-1$ unabhängige Integrale besitzen kann, so mufs es einen kleinsten Index i geben, derart, dafs

$$B_2 \chi_i \equiv \Phi(\varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_p, \chi_1, \chi_2, \ldots \chi_i). \tag{30}$$

Es giebt dann, behaupten wir, eine Funktion

$$\Omega(\varphi_2 \varphi_3 \ldots \varphi_p, \; \chi_1 \chi_2 \ldots \chi_i),$$

welche nicht nur die Gleichung (28), sondern auch die Gleichung $B_2 f = 0$ erfüllt. Denn die Bedingung:

$$0 = B_2 \Omega \equiv \sum_2^p {}_h \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_h} B_2 \varphi_h + \sum_1^i {}_s \frac{\partial \Omega}{\partial \chi_s} B_2 \chi_s$$

schreibt sich mit Rücksicht auf (26) (29) (30) folgendermafsen:

$$0 = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_2} + \chi_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \chi_1} + \chi_3 \frac{\partial \Omega}{\partial \chi_2} + \cdots + \chi_i \frac{\partial \Omega}{\partial \chi_{i-1}} + \Phi \frac{\partial \Omega}{\partial \chi_i}. \tag{31}$$

Dies ist eine lineare homogene partielle Differentialgleichung mit den Independenten $\varphi_2, \chi_1 \ldots \chi_i$; das zugehörige simultane System hat die Form

$$\frac{d\varphi_2}{1} = \frac{d\chi_1}{\chi_2} = \frac{d\chi_2}{\chi_3} = \cdots = \frac{d\chi_{i-1}}{\chi_i} = \frac{d\chi_i}{\Phi};$$

die Integration desselben kommt offenbar auf diejenige der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^i \chi_1}{d\varphi_2^i} = \Phi\left(\varphi_2 \cdots \varphi_p; \; \chi_1, \frac{d\chi_1}{d\varphi_2}, \frac{d^2 \chi_1}{d\varphi_2^2} \cdots \frac{d^{i-1} \chi_1}{d\varphi_2^{i-1}}\right)$$

hinaus. Es sei nun ω_1 ein Integral der Gleichung (31); dann ist ω_1, in den Variabeln $x_1 \ldots x_n$ ausgedrückt, ein Integral des zweigliedrigen Jacobi'schen Systems:

$$B_1 f = 0,\ B_2 f = 0$$

und augenscheinlich keine Funktion von $\varphi_3 \ldots \varphi_p$ allein. Dieses zweigliedrige Jacobi'sche System wird auch von allen Funktionen

$$\omega_2 \equiv B_3 \omega_1;\ \omega_3 \equiv B_3 \omega_2 \text{ etc.}$$

erfüllt, und es giebt einen kleinsten Index k, derart, dafs

$$B_3 \omega_k \equiv \Psi(\varphi_3 \varphi_4 \ldots \varphi_p;\ \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_k).$$

Bestimmt man dann eine Lösung ϖ_1 der linearen partiellen Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_3} + \omega_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_1} + \omega_3 \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_2} + \cdots + \omega_k \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{k-1}} + \Psi \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_k},$$

worin $\varphi_3, \omega_1 \ldots \omega_k$ als Independente figuriren, so ist ϖ_1 eine gemeinsame, von $\varphi_4 \ldots \varphi_p$ unabhängige Lösung des dreigliedrigen Jacobi'schen Systems

$$B_1 f = 0,\ B_2 f = 0,\ B_3 f = 0.$$

Indem man in dieser Weise weiter schliefst, gewinnt man, ausgehend von dem Integral χ_1 der Gleichung $B_1 f = 0$, schliefslich mindestens *eine* Lösung ψ des gegebenen Jacobi'schen Systems. Führt man ψ statt einer der Variabeln x als neue Independente ein, so verwandelt sich das System (21) nach Art. 51 und 60 wiederum in ein p-gliedriges Jacobi'sches System, das die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial \psi}$ nicht enthält, mithin als System mit nur $n-1$ Independenten betrachtet werden kann. Auf dieses System läfst sich dann obiges Verfahren von neuem anwenden etc. bis alle $n-p$ unabhängigen Lösungen von (21) gefunden sind. Oftmals erreicht man diesen letztern Zweck auch dadurch, dafs man bei dem vorhin geschilderten Verfahren der Reihe nach von mehreren unabhängigen Integralen der Gleichung $B_1 f = 0$ ausgeht.

Wir wollen diese Methode durch zwei Beispiele[1]) erläutern. Die Gleichungen

$$B_1 f \equiv x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$$

$$B_2 f = x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$$

bilden ein zweigliedriges Jacobi'sches System; $\chi_1 \equiv x_1 x_2$ ist ein Integral der ersten Gleichung; dasselbe gilt daher von den Funktionen:

---

1) Goursat I Chap. 2, p. 69.

$$\chi_2 \equiv B_2 \chi_1 \equiv x_1 x_4 + x_2 x_3\,,$$
$$\chi_3 \equiv B_2 \chi_3 \equiv 2(x_3 x_4 - x_1 x_2),$$

und man hat:

$$B_2 \chi_3 \equiv -4\chi_2.$$

Wir suchen eine Funktion $\Omega(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$, die auch die Gleichung $B_2 f = 0$ erfüllt. Man findet die Bedingung:

$$0 = B_2 \Omega = \chi_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \chi_1} + \chi_3 \frac{\partial \Omega}{\partial \chi_2} - 4\chi_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \chi_3}.$$

Das zugehörige simultane System

$$\frac{d\chi_1}{\chi_2} = \frac{d\chi_2}{\chi_3} = \frac{d\chi_3}{-4\chi_2}$$

besitzt die Integrale:

$$\chi_2^2 + \frac{1}{4}\chi_3^2 \equiv (x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_4^2)$$

$$2\chi_1 + \frac{1}{2}\chi_3 \equiv x_1 x_2 + x_3 x_4$$

womit zwei unabhängige Lösungen des gegebenen Systems gefunden sind.

Als zweites Beispiel betrachten wir das dreigliedrige Jacobi'sche System:

$$B_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{x_3^2}{2x_2 x_4}\frac{\partial f}{\partial x_4} + \frac{x_3^2 x_5}{2x_2 x_4^2}\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$$

$$B_2 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{x_4}{2x_2}\frac{\partial f}{\partial x_4} + \frac{x_5}{2x_2}\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$$

$$B_3 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{x_1 x_3}{x_2 x_4}\frac{\partial f}{\partial x_4} + \frac{x_1 x_3 x_5}{x_2 x_4^2}\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0.$$

Die Funktion $x_4 x_5 \equiv \chi_1$ ist eine Lösung von $B_2 f = 0$; man hat

$$B_1 \chi_1 \equiv \chi_2 \equiv \frac{x_3^2 x_5}{x_2 x_4};\; B_1 \chi_2 \equiv 0,$$

womit eine gemeinsame Lösung der ersten zwei Gleichungen schon gefunden ist.

Man findet ferner

$$B_3 \chi_2 \equiv \frac{2x_3 x_5}{x_2 x_4} \equiv \frac{2\chi_2}{x_3}.$$

Soll daher die Funktion $\Omega(x_3, \chi_2)$ die dritte Gleichung befriedigen, so mufs man haben

$$B_3 \Omega \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} + \frac{2\chi_2}{x_3}\frac{\partial \Omega}{\partial \chi_2} = 0.$$

Das zugehörige simultane System hat die Form:

$$\frac{d\chi_2}{2\chi_2} = \frac{dx_3}{x_3},$$

also das Integral $\frac{\chi_2}{x_3^2} \equiv \frac{x_5}{x_2 x_4}$.

Die Gleichung $B_2 f = 0$ besitzt ferner die Lösung $\omega_1 = x_2 x_4^2$, und man hat $B_1 \omega_1 \equiv x_3^2$; soll daher die Funktion $\Omega(x_1 x_3 \omega_1)$ der ersten Gleichung genügen, so mufs man haben:

$$B_1 \Omega \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + x_3^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_1} = 0:$$

also $\Omega \equiv \omega_1 - x_3^2 x_1$; die beiden ersten Gleichungen werden daher von der Funktion $x_1 x_3^2 - x_2 x_4^2$ erfüllt, und dies gilt auch für die dritte Gleichung; das gegebene Involutionssystem besitzt also die unabhängigen Lösungen:

$$x_1 x_3^2 - x_2 x_4^2, \; \frac{x_5}{x_2 x_4}.$$

68. Ist (21) ein Jacobi'sches System, dann und nur dann bilden die Gleichungen

$$(32) \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial t_i} + B_i f \equiv B_i' f = 0 \qquad (i = 1, 2 \,..\, p)$$

ein p-gliedriges vollständiges (und zwar Jacobi'sches) System mit den Independenten $x_1 x_2 \,..\, x_n, t_1, t_2 \,..\, t_p$. Denn die Gleichungen

$$(B_i' B_k') \equiv (B_i B_k) \equiv 0$$

können nur dann eine Folge von (32) sein, wenn sie identisch erfüllt sind. Das System (32) besitzt die n unabhängigen Lösungen

$$f_1 f_2 \cdot\cdot f_{n-p}, \; -t_1 + \varphi_1, \; -t_2 + \varphi_2, \; \cdot\cdot \; -t_p + \varphi_p.$$

Sind die n Funktionen f_i, φ_k an der Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ regulär und ist ihre Funktionaldeterminante daselbst nicht null, bedeutet ferner $x_1' \,..\, x_n'$ ein Wertsystem in der Umgebung dieser Stelle, so erhält man durch Auflösung der Relationen

$$(33) \qquad \begin{aligned} f_i(x_1 x_2 \,..\, x_n) &= f_i(x_1' x_2' \,..\, x_n') \qquad &(i = 1 \,..\, n - p) \\ -t_k + \varphi_k(x_1 x_2 \,..\, x_n) &= \varphi_k(x_1' x_2' \,..\, x_n') \qquad &(k = 1, \,..\, p) \end{aligned}$$

die Gleichungensysteme:

$$(34) \quad x_i' = x_i + \mathfrak{P}_i(x_1 - x_1^0, \,..\, x_n - x_n^0, t_1, t_2, \,..\, t_p) \quad (i = 1 \,..\, n)$$

$$(35) \quad x_i = x_i' + \mathfrak{P}_i(x_1' - x_1^0 \cdot\cdot x_n' - x_n^0, -t_1, -t_2 \cdot\cdot - t_p),$$

worin die $\mathfrak{P}_i$ beidemale dieselben Potenzreihen bedeuten und für $t_1 = 0 \,..\, t_p = 0$ verschwinden. Die rechten Seiten von (34) sind die

Hauptintegrale des Systems (32) hinsichtlich $t_1 = 0, \ldots t_p = 0$. Die durch (35) dargestellten Funktionen genügen, wie man leicht erkennt, für jedes beliebige Konstantensystem x_i' identisch den partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_k} = b_{ki}(x_1 x_2 \ldots x_n),$$

wenn

$$B_k f \equiv \sum b_{ks} \frac{\partial f}{\partial x_s}$$

gesetzt wird.

69. Sind $n - p$ Lösungen $f_1 f_2 \ldots f_{n-p}$ des vollständigen Systems (1) gegeben, so definiren die Gleichungen

(36) $\quad f_i(x_1 x_2 \ldots x_2) = c_i \quad (i = 1 \ldots n - p;\ c_i = \text{arb. Konst.})$

eine „Zerlegung[1]) des Raums $R_n(x_1 \ldots x_n)$“ in $n - p$-fach unendlich viele Punktmannigfaltigkeiten μ_p, welche die „*Charakteristiken*“ des vollständigen Systems (1) heifsen, und von denen wir eine einzelne mit C_p bezeichnen wollen. Durch jeden Punkt $x_1' \ldots x_n'$ allgemeiner Lage geht eine und nur eine dieser C_p; sie wird durch die Relationen (33), oder auch, wenn das Jacobi'sche System (21) mit (1) äquivalent ist, durch die Gleichungen (34) oder (35) dargestellt. Nennen wir eine μ_{n-1}, die durch eine Relation der Form

$$\varphi(f_1 f_2 \ldots f_{n-1}) = 0$$

definirt wird, eine „*Integralfläche*“ des Systems (1) oder des zugehörigen nicht homogenen Systems (20), so folgt ohne weiteres: Die allgemeinste Integralfläche wird von ∞^{n-p-1} Charakteristiken C_p erzeugt, d. h. enthält eine Integralfläche einen Punkt P allgemeiner Lage, so enthält sie die ganze durch P gehende C_p. Man kann darnach eine und nur eine Integralfläche so bestimmen, dafs sie eine beliebig vorgegebene aus ∞^{n-p-1} Punkten allgemeiner Lage bestehende μ_{n-p-1} enthält; die im Satze des Art. 63 p. 83 erwähnte Fläche erhält man z. B., wenn man die folgende μ_{n-p-1}:

$$x_1 = x_1^0 \ldots x_p = x_p^0;\ x_n = \varphi(x_{p+1} x_{p+2} \ldots x_{n-1})$$

als Ausgangsmannigfaltigkeit wählt.

Die durch P gehende Charakteristik C_p enthält offenbar auch die durch P gehende charakteristische Kurve (Art. 53) jeder partiellen Differentialgleichung der Form

---

1) Lie I Kap. 6.

$$\sum_1^p {}^s \varrho_s(x_1 x_2 \ldots x_n) X_s f = 0,$$

insbesondere also auch die durch P gehende Charakteristik jeder einzelnen Gleichung (1); ferner ist jede C_p von ∞^{p-1} charakteristischen Kurven jeder der Gleichungen (1) erzeugt, also eine *gemeinsame charakteristische* μ_p *der Gleichungen* (1) (Art. 53).

70. Sind nun p linear unabhängige Gleichungen (1) beliebig gegeben, und betrachten wir die durch einen Punkt P gehende charakteristische Kurve der Gleichung $X_1 f = 0$, so erzeugen die ∞^1 Charakteristiken von $X_2 f = 0$, die von den Punkten jener ersten Kurve auslaufen, eine μ_2; ebenso alle ∞^2 charakteristischen Kurven von $X_3 f = 0$, die bez. von den Punkten dieser μ_2 ausgehen, eine μ_3 etc. So gelangen wir schliefslich zu einer charakteristischen μ_p der Gleichung $X_p f = 0$. Hierbei wurden die Gleichungen (1) in einer bestimmten Reihenfolge benutzt; wählt man eine andere, so erhält man eine charakteristische μ_p irgend einer andern Gleichung $X_\iota f = 0$. Sind nun die Gleichungen (1) beliebig, so werden die so erhaltenen μ_p im allgemeinen verschieden ausfallen.

Damit die Gleichungen (1) *ein vollständiges System bilden, ist notwendig und hinreichend, dafs alle auf diese Weise erhaltenen, durch P gehenden μ_p identisch sind, und dafs dies für jeden Punkt P allgemeiner Lage zutrifft.* Die Notwendigkeit der genannten Bedingung folgt unmittelbar aus der Schlufsbemerkung der vor. Nr.; umgekehrt, ist diese Bedingung erfüllt, so ist eine Zerlegung des Raums in ∞^{n-p} Mannigfaltigkeiten μ_p definirt, welch' letztere durch ein Gleichungensystem der Form (36) dargestellt werden. Da aber die genannten μ_p gemeinsame charakteristische μ_p aller Gleichungen (1) sein müssen, so sind die f_i nach Art. 53 gemeinsame Lösungen dieser Gleichungen. Die letzteren bilden sonach ein vollständiges System (Art. 64).

Hat man z. B. im $R_3(xyz)$ zwei lineare partielle Differentialgleichungen:

$$Xf \equiv X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0;\ X'f \equiv X'\frac{\partial f}{\partial x} + Y'\frac{\partial f}{\partial y} + Z'\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

und betrachten wir die durch $P(xyz)$ gehenden charakteristischen Kurven C und C' dieser beiden Gleichungen, so erzeugen die durch die Punkte von C' gehenden ∞^1 charakteristischen Kurven von $Xf = 0$, und ebenso die von den Punkten von C auslaufenden Charakteristiken von $X'f = 0$ je eine Fläche. Diese beiden Flächen sind im allgemeinen verschieden; sind sie aber für jeden Punkt P identisch, dann und nur dann giebt es ∞^1 gemeinsame Integralflächen $\varphi(xyz) = c$ der beiden gegebenen Gleichungen. Wie man sieht, sind in diesem Falle die ∞^1 Charakteristiken C_2 des vollständigen Systems mit den Integralflächen identisch. Dies gilt natürlich für jedes $n-1$-gliedrige vollständige System in n Independenten, und nur für ein solches.

§ 4. Systeme linearer totaler Differentialgleichungen.

71.[1]) Wir sagen: ein Punkt $P(x_1 \,.\,.\, x_n)$ und ein zu ihm unendlich benachbarter Punkt $P'(x_1 + dx_1 \,.\,.\, x_n + dx_n)$ bestimmen zusammen „eine durch P gehende *Richtung*", nämlich die Richtung der Verbindungsgeraden von P und P', welche durch die Gleichungen (18) des Art. 44 definirt ist. Sind nun einem Punkte P durch die p Systeme von Relationen

$$\frac{dx_1}{\xi_{i1}} = \frac{dx_2}{\xi_{i2}} = \cdot\cdot \frac{dx_n}{\xi_{in}} \qquad (i = 1 \cdot\cdot p)$$

ebenso viele durch ihn gehende Richtungen zugewiesen, so sagen wir, dieselben seien „*linear unabhängig*", wenn die p Gröfsensysteme $\xi_{i1} \,.\,.\, \xi_{in}$ es sind, d. h. wenn nicht alle p-reihigen Determinanten der Matrix (2) pag. 73 verschwinden, oder geometrisch ausgedrückt: wenn die zu den p Richtungen gehörigen, durch P gehenden Geraden nicht in einer und derselben ebenen μ_{p-1} liegen. Dafs beide Aussagen gleichbedeutend sind, erkennt man daraus, dafs unter den gemachten Annahmen genau $n-p$ linear unabhängige Gröfsensysteme $\eta_{i1} \,.\,.\, \eta_{in}$ existiren, die den Relationen

$$(1) \qquad \sum_1^n {}^s\, \xi_{is}\eta_{ks} = 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, p;\ k = 1 \,.\,.\, n-p)$$

genügen, dafs also eine lineare μ_p

$$(2) \qquad \sum_1^n {}^s\, \eta_{ks}(\xi_s - x_s) = 0 \qquad (k = 1 \,.\,.\, n-p)$$

aber keine lineare $\mu_q (q < p)$ existirt, welche die in Rede stehenden p Geraden sämtlich enthält. Die allgemeinste, durch P gehende Richtung, die ebenfalls in die lineare Mannigfaltigkeit (2) hineinfällt, ist durch die Gleichungen

$$(3) \qquad dx_i = \left(\sum_1^p {}^h\, \varrho_h\, \xi_{hi}\right) dt \qquad (i = 1 \,.\,.\, n)$$

---

1) Lie I 101 ff.

definirt, wobei dt eine unendlich kleine Konstante und die ϱ_h willkürliche Gröfsen bedeuten. Die Gesamtheit dieser ∞^{p-1} Richtungen nennt man ein „Büschel".

72. Ein beliebiges p-gliedriges System partieller Differentialgleichungen

$$(4) \qquad X_i f \equiv \sum_1^n {}^s\, \xi_{is} \frac{\partial f}{\partial x_s} \qquad (i = 1, 2 \,..\, p)$$

ordnet jedem Punkt allgemeiner Lage ein Büschel von ∞^{p-1} Richtungen, oder auch: eine ganz bestimmte, durch P gehende lineare μ_p zu; jenes Büschel wird durch die Gleichungen (3) oder auch durch die Relationen

$$(5) \qquad \sum_1^n {}^s\, \eta_{ks}(x_1 x_2 \,..\, x_n)\, dx_s = 0 \qquad (k = 1 \,..\, n - p)$$

dargestellt, wenn die η_{ks} wie oben definirt sind. Die lineare μ_p, welche dieses Büschel enthält, besitzt die Definitionsgleichungen (2); sie ist, falls das System (4) vollständig ist, offenbar nichts anderes als die Tangential-μ_p, welche zu der durch P gehenden Charakteristik C_p im Punkte P gehört (Art. 44 und 69).

Das $n - p$-gliedrige System (5) linearer totaler Differentialgleichungen und das p-gliedrige System (4) linearer partieller Differentialgleichungen bestimmen sich wechselseitig und heifsen zu einander „*adjungirt*". Im Falle $p = n - 1$ erhalten wir die Beziehung zwischen einer linearen partiellen Differentialgleichung und dem adjungirten System gewöhnlicher Differentialgleichungen (Art. 48). Wegen (1) sind die beiden Matrices $\| \xi_{is} \|$ und $\| \eta_{ks} \|$ korrespondirend. Man schliefst daraus leicht, dafs ein mit (5) äquivalentes Gleichungensystem erhalten wird, wenn man in der Matrix

$$(6) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} dx_1 & dx_2 & .. & dx_n \\ \xi_{11} & \xi_{12} & .. & \xi_{1n} \\ . & . & . & . \\ \xi_{p1} & \xi_{p2} & .. & \xi_{pn} \end{array} \right\|$$

alle $p + 1$-reihigen Determinanten gleich null setzt, dafs ferner ein mit (4) gleichbedeutendes System durch Nullsetzen aller $n - p + 1$-reihigen Determinanten des Schema's

$$(7) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & .. & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \eta_{11} & \eta_{12} & .. & \eta_{1n} \\ . & . & . & . \\ \eta_{n-p,1} & \eta_{n-p,2} & .. & \eta_{n-p,n} \end{array} \right\|$$

hervorgeht, endlich dafs die Gleichungen (5) hinsichtlich $dx_{p+1}\, dx_{p+2} \ldots dx_n$ aufgelöst werden können, wenn das System (4) nach $\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f}{\partial x_p}$ auflösbar ist, und umgekehrt. Hat die letztgenannte Auflösung die Form:

$$(8) \qquad A_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + a_{i,p+1} \frac{\partial f}{\partial x_{p+1}} + \cdots + a_{in} \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (i = 1 \ldots p),$$

so lautet die Auflösung des adjungirten Systems (5) folgendermafsen

$$(9) \; dx_{p+k} = a_{1,p+k} dx_1 + a_{2,p+k} dx_2 + \cdots + a_{p,p+k} dx_p \; (k = 1 \ldots n-p)$$

73. Wir betrachten nun einen beliebigen Pfaff'schen Ausdruck

$$\nabla \equiv \sum_1^n {}_s\, \eta_s(x_1 x_2 \ldots x_n) dx_s$$

und gleichzeitig eine beliebige infinitesimale Transformation

$$Xf \equiv \sum_1^n {}_s\, \xi_s(x_1 x_2 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_s}.$$

Vermöge der Variabelntransformation

$$(10) \qquad \begin{aligned} y_i &= \varphi_i(x_1 x_2 \ldots x_n) \\ x_i &= \psi_i(y_1 y_2 \ldots y_n) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

verwandle sich ∇ in ∇' und Xf in $X'f$, wobei gesetzt ist:

$$\nabla' \equiv \sum_1^n \eta_s'(y_1 y_2 \ldots y_n) dy_s; \quad X'f \equiv \sum_1^n {}_s\, \xi_s'(y_1 \ldots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_s}.$$

Nun hat man vermöge (10) identisch:

$$\eta_s' \equiv \sum_h \eta_h \frac{\partial x_h}{\partial y_s}; \quad \xi_s' \equiv \sum_k \xi_k \frac{\partial y_s}{\partial x_k},$$

wo auf den rechten Seiten alles durch die y auszudrücken ist. Mithin folgt:

$$\sum_1^n \eta_s' \xi_s' \equiv \sum_1^n {}_s \sum_1^n {}_h \sum_1^n {}_k\, \eta_h \xi_k \frac{\partial x_h}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial x_k}.$$

Bezeichnet jetzt δ_{hk} die Einheit, wenn $h = k$, und die Null, wenn $h \gtrless k$, so hat man:

$$(11) \qquad \sum_s \frac{\partial x_h}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial x_k} = \delta_{hk} \quad (h, k = 1 \ldots n)$$

und infolge dessen:

$$(12) \qquad \Delta \equiv \Sigma \xi_s \eta_s \equiv \Sigma \xi_s' \eta_s'.$$

Dieser Thatsache geben wir dadurch Ausdruck, daſs wir sagen: Die Funktion $\varDelta = \Sigma\xi_s\eta_s$ ist *„eine simultane Invariante der infinitesimalen Transformation Xf und des Pfaff'schen Ausdrucks ∇“*. Darnach drückt die Bedingung $\varDelta = 0$ eine invariante Beziehung zwischen Xf und ∇ aus. Nennen wir ∇_k die linken Seiten der Pfaff'schen Gleichungen (5), bedenken wir ferner, daſs jede infinitesimale Transformation Xf, die mit allen Pfaff'schen Ausdrücken ∇_i in der eben genannten invarianten Beziehung steht, die Form:

$$\varrho_1 X_1 f + \varrho_2 X_2 f + \cdots + \varrho_p X_p f \tag{13}$$

besitzt, und bezeichnen wir den Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen (13) als die zu dem System (5) *adjungirte Schar infinitesimaler Transformationen*, so können wir den Satz aussprechen: *„Die zu (5) adjungirte Schar infinitesimaler Transformationen ist mit dem System (5) Pfaff'scher Gleichungen invariant verknüpft*, m. a. W.: verwandelt sich vermöge der Variabelntransformation (10) das System (5) in das folgende:

$$\nabla_k' \equiv \sum_1^n {}_s\, \eta_{ks}'(y_1 y_2 \ldots y_n)\, dy_s = 0, \tag{14}$$

so geht gleichzeitig eine beliebige infinitesimale Transformation Xf der adjungirten Schar (13) in eine infinitesimale Transformation

$$X'f = \sum \xi_i' \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

der zu (14) adjungirten Schar über. Dabei verwandelt sich natürlich auch das zu (5) adjungirte System (4) in das zu (14) adjungirte System:

$$0 = X_i' f \equiv \sum \xi_{is}'(y_1 \ldots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_s}, \qquad (i = 1 \ldots p)$$

dessen Koeffizienten also den Identitäten

$$\sum \xi_{is}' \eta_{ks}' = 0 \qquad (i = 1 \ldots p;\ k = 1 \ldots n - p)$$

genügen; d. h. *die Beziehung zwischen einem System linearer partieller Differentialgleichungen und dem adjungirten System Pfaff'scher Gleichungen ist gegenüber allen Punkttransformationen des Raums R_n invariant.*

74. Ist f eine gemeinsame Lösung der linearen partiellen Differentialgleichungen (4), so verschwinden alle $n - p + 1$-reihigen Determinanten der Matrix (7); es giebt also dann $n - p$ Funktionen $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n-p}$ derart, daſs identisch:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \varrho_1 \eta_{1i} + \varrho_2 \eta_{2i} + \cdots + \varrho_{n-p} \eta_{n-p,i} \quad (i = 1 \,..\, n)$$

d. h. dafs für alle Werte der x_i und ihrer Differentiale:

$$df \equiv \varrho_1 \nabla_1 + \varrho_2 \nabla_2 + \cdots + \varrho_{n-p} \nabla_{n-p}.$$

Umgekehrt: ist dies der Fall, so ist f eine gemeinsame Lösung der Gleichungen (4). Eine lineare Kombination der Ausdrücke ∇_s, welche in der Form df darstellbar ist, heifst eine *„integrable Kombination"* der Ausdrücke ∇_s oder der Pfaff'schen Gleichungen (5) und f selbst wird auch als ein „Integral" des Systems (5) bezeichnet. Jedem gemeinsamen Integral der Gleichungen (4) entspricht demnach eine integrable Kombination (ein Integral) der Gleichungen (5) und umgekehrt. Besitzt das Gleichungensystem (4) k und nicht mehr unabhängige Integrale $f_1 \,..\, f_k$, so existiren k und nicht mehr linear unabhängige integrable Kombinationen:

$$df_i \equiv \varrho_1^{(i)} \nabla_1 + \varrho_2^{(i)} \nabla_2 + \cdots + \varrho_{n-p}^{(i)} \nabla_{n-p} \quad (i = 1 \cdots k)$$

und umgekehrt.[1]) In der That, verschwänden alle k-reihigen Determinanten der Matrix

$$\| \varrho_h^{(i)} \| \qquad (i = 1 \,..\, k;\ h = 1, 2 \,..\, n-p)$$

d. h. bestände eine Identität $\sum_1^k \sigma_i df_i \equiv 0$, so wären die Funktionen f_i nicht unabhängig, und umgekehrt.

Die Aufsuchung aller etwaigen integrabeln Kombinationen der Gleichungen (5) kommt darnach auf die Ermittelung aller etwaigen gemeinsamen Lösungen der partiellen Differentialgleichungen (4) hinaus.

Ein $n-p$-gliedriges System Pfaff'scher Gleichungen (5), das $n-p$ linear unabhängige integrable Kombinationen $df_1 df_2 \,..\, df_{n-p}$ zuläfst, dessen adjungirtes System (4) also vollständig ist, heifst *„unbeschränkt integrabel"*. Ein derartiges System kann auf unbegrenzt viele Arten ersetzt werden durch ein System *„exakter Gleichungen"*

$$d\varphi_1 = 0,\ d\varphi_2 = 0,\ ..\ d\varphi_{n-p} = 0,$$

worin die φ_i irgend $n-p$ unabhängige Funktionen der f_i bedeuten.

Aus dem Begriff des unbeschränkt integrablen Systems folgt unmittelbar, dafs vermöge einer beliebigen Variabelntransformation jedes unbeschränkt integrable System wiederum in ein solches übergeht.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die un-

---

1) Boole I Supplementary Volume Chap. 25 = Philosophical Transactions 1862 p 437. Goursat I Kap. III.

beschränkte Integrabilität des Systems (5) bestehen nach dem eben Gesagten darin, dafs das adjungirte System (4) vollständig sei, und werden sonach, wenn das System (5) in der Form (9) aufgelöst wird, durch die Relationen[1])

$$(15) \quad A_i a_{ks} - A_k a_{is} \equiv 0 \quad (i, k = 1 \,..\, p;\ s = p + 1, p + 1, \,..\, n)$$

dargestellt (vgl. Art. 59).

75. Es sei $q < n - p$, und es werde angenommen, dafs in den $n - p - q$ letzten Gleichungen (9), d. h. also in den Pfaff'schen Gleichungen

$$(16) \qquad dx_{p+q+h} = a_{1,p+q+h} dx_1 + \cdots + a_{p,p+q+h} dx_p$$
$$(h = 1, 2 \,..\, n - p - q)$$

alle Koeffizienten von den Variabeln $x_{p+1}, x_{p+2} \,..\, x_{p+q}$ unabhängig seien. Schreiben wir dann

$$A_i' f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{p+q+1}^{n} {}^h\, a_{ih} \frac{\partial f}{\partial x_h},$$

so nehmen diejenigen unter den Bedingungen (15), für die $s > p + q$ ist, folgende Form an:

$$A_i' a_{ks} - A_k' a_{is} = 0 \quad (i, k = 1 \,..\, p;\ s = p + q + 1 \,..\, n).$$

Da nun die p Gleichungen $A_i' f = 0$ das zu (16) adjungirte System darstellen, so bilden die Pfaff'schen Gleichungen (16), falls das System (5) unbeschränkt integrabel ist, für sich genommen ebenfalls ein unbeschränkt integrables System mit $n - q$ Variabeln:

$$x_1, \,..\, x_p, x_{p+q+1} \,..\, x_n.$$

Damit ist der wichtige, später oft zu benützende Satz[2]) bewiesen:

„Ist $q < n - p$, und erhält man aus dem $n - p$-gliedrigen unbeschränkt integrabeln System Pfaff'scher Gleichungen

$$(5) \qquad \sum_{1}^{n} {}^s\, \eta_{is}(x_1 x_2 \,..\, x_n) dx_s = 0 \quad (i = 1, 2, \,..\, n - p)$$

durch Bildung linearer Kombinationen $n - p - q$ und nicht mehr linear unabhängige Gleichungen, die gewisse q unter den Variabeln, etwa $x_{p+1} x_{p+2} \,..\, x_{p+q}$, weder in den Differentialen, noch auch in den Koeffizienten enthalten, so bilden diese Gleichungen für sich genommen ein $n - p - q$-gliedriges **unbeschränkt integrables** *System in $n - q$ Va*

1) Deahna I.
2) Natani I.

riabeln. Das zu diesen Gleichungen adjungirte p-gliedrige System partieller Differentialgleichungen entsteht aus dem adjungirten System von (5) *dadurch, dafs man daraus alle Terme fortläfst, die mit einer der Ableitungen* $\frac{\partial f}{\partial x_{p+1}} \cdot\cdot \frac{\partial f}{\partial x_{p+q}}$ *multiplizirt sind.*"

76. Es ist von Wichtigkeit, die Bedingungen der unbeschränkten Integrabilität eines Systems Pfaff'scher Gleichungen auch für die unaufgelöste Form (5) anzugeben. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit $u_1 \,..\, u_n$ und $v_1 \,..\, v_n$ irgend zwei Funktionensysteme, die den linearen Gleichungen:

$$\sum_1^n {}^\alpha\, \eta_{i\alpha} u_\alpha = 0, \quad \sum_1^n {}^\alpha\, \eta_{i\alpha} v_\alpha = 0 \quad (i = 1 \,..\, n - p) \tag{17}$$

identisch genügen, und es werde

$$Uf \equiv \sum u_\beta \frac{\partial f}{\partial x_\beta}; \quad Vf \equiv \sum v_\beta \frac{\partial f}{\partial x_\beta}$$

geschrieben. Dann sind $Uf = 0$ und $Vf = 0$ zwei beliebige Gleichungen des zu (5) adjungirten Systems. Damit dieses vollständig sei, ist notwendig und hinreichend, dafs in ihm jede Gleichung der Form:

$$(UV) \equiv \sum_1^n (Uv_\alpha - Vu_\alpha) \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = 0$$

enthalten sei, m. a. W., dafs vermöge (17) die Identitäten:

$$\sum_1^n {}^\alpha \sum_1^n {}^\beta\, \eta_{i\alpha} \left(u_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - v_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \equiv 0 \quad (i = 1 \,..\, n - p) \tag{18}$$

stattfinden. Man findet aber:

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_\beta} \sum_\alpha \eta_{i\alpha} v_\alpha \equiv \sum_\alpha v_\alpha \frac{\partial \eta_{i\alpha}}{\partial x_\beta} + \sum_\alpha \eta_{i\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} \quad (\beta = 1 \,..\, n) \tag{19}$$

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_\beta} \sum_\alpha \eta_{i\alpha} u_\alpha \equiv \sum_\alpha u_\alpha \frac{\partial \eta_{i\alpha}}{\partial x_\beta} + \sum_\alpha \eta_{i\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \quad (\beta = 1 \,..\, n). \tag{20}$$

Multiplizirt man die n Identitäten (19) mit $u_1 \,..\, u_n$, die Identitäten (20) mit $-v_1 \cdot\cdot -v_n$ bezw., so folgt durch Addition:

$$\sum_1^n {}^\alpha \sum_1^n {}^\beta\, \eta_{i\alpha} \left(u_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - v_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \equiv \sum_1^n {}^\alpha \sum_1^n {}^\beta\, u_\alpha v_\beta \left(\frac{\partial \eta_{i\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \eta_{i\beta}}{\partial x_\alpha} \right).$$

Setzen wir daher zur Abkürzung:

$$H^{(i)}_{\alpha\beta} \equiv - H^{(i)}_{\beta\alpha} \equiv \frac{\partial \eta_{i\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \eta_{i\beta}}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1 \,.\,. n;\; i = 1 \,.\,. n - p)$$

so können wir den Satz aussprechen:

„Damit das System (5) *unbeschränkt integrabel sei, ist notwendig und hinreichend, dafs die $n - p$ Bilinearformen*

$$(21) \qquad \sum_1^n{}^{\alpha} \sum_1^n{}^{\beta} H^{(i)}_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta \qquad (i = 1 \,.\,. n - p)$$

für jedes Funktionensystem $u_1 \,.\,. u_n$, $v_1 \,.\,. v_n$, das den linearen Gleichungen

$$(17) \qquad \sum_\alpha \eta_{i\alpha} u_\alpha = 0 \quad \sum_\alpha \eta_{i\alpha} v_\alpha = 0 \qquad (i = 1 \,.\,. n - p)$$

genügt, alle identisch verschwinden.“[1])

77. Um für die soeben erhaltenen Bedingungen der unbeschränkten Integrabilität eines Systems (5) noch eine andere Ausdrucksform abzuleiten, die auf dem Begriff „infinitesimale Transformation“ beruht, schicken wir in dieser und der nächsten Nr. einige Hülfsbetrachtungen voraus. Es sei

$$Xf \equiv \sum \xi_i (x_1 x_2 \,.\,. x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

das Symbol einer beliebigen infinitesimalen Transformation, ferner

$$\nabla \equiv \sum a_i (x_1 x_2 \,.\,. x_n) dx_i$$

ein beliebiger Pfaff'scher Ausdruck. Dann definiren wir das Symbol $X\nabla$ durch die folgende Identität:

$$(22) \qquad X\nabla \equiv \sum_1^n X a_i \cdot dx_i + \sum_1^n a_i d\xi_i.$$

Diese Definition ist keineswegs willkürlich gewählt, sondern befindet sich mit unseren früheren Festsetzungen im Einklang (Art. 55). In der That, setzen wir

$$(23) \qquad \delta x_i \equiv \xi_i \delta t,$$

unter δt eine unendlich kleine Konstante verstanden, so werden wir nach Art. 55 unter $X\nabla \cdot \delta t$ den unendlich kleinen Zuwachs zu verstehen haben, den ∇ erleidet, wenn man darin die x_i durch $x_i + \delta x_i$ ersetzt, und unendlich kleine Gröfsen dritter Ordnung vernachlässigt. Geht durch die genannte Ersetzung ∇ in ∇' über, so hat man

---

1) Frobenius I p. 267—282.

$$\nabla' \equiv \sum_1^n {}^{\iota} a_\iota(x_1 + \delta x_1, \ldots x_n + \delta x_n) d(x_\iota + \delta x_\iota)$$

$$\equiv \nabla + \sum_1^n {}^{i} \sum_1^n {}^{k} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \delta x_k dx_i + \sum_1^n a_\iota d\delta x_\iota .$$

Berücksichtigt man jetzt die Gleichungen (23), so ergiebt sich für die Differenz $\nabla' - \nabla$ in der That die mit δt multiplizirte rechte Seite von (22).

Bezüglich des Symbols $X\nabla$ gelten augenscheinlich folgende Rechnungsregeln:

$$X(\nabla + \nabla_1) \equiv X\nabla + X\nabla_1$$
$$X(df) \equiv d(Xf)$$
$$X(\varrho\nabla) \equiv \varrho X\nabla + \nabla \cdot X\varrho$$

wenn ϱ und f beliebige Funktionen der x_i bedeuten.

78. Aus der Identität (22) schliefsen wir nun weiter:

$$(24) \qquad X\nabla \equiv \sum_1^n {}^{i} Xa_i \cdot dx_i + d\left(\sum_1^n {}^{i} a_i \xi_i\right) - \sum_1^n {}^{k} \xi_k da_k$$

$$\equiv dA + \sum_1^n {}^{i} \sum_1^n {}^{k} \xi_k \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right) dx_i$$

wenn mit A die schon in Art. 73 eingeführte simultane Invariante des Pfaff'schen Ausdrucks ∇ und der infinitesimalen Transformation Xf bezeichnet wird. Wir sagen nun: *„Der Pfaff'sche Ausdruck ∇ gestattet die infinitesimale Transformation Xf“*, oder auch *„wird von derselben in sich übergeführt“*, oder endlich: *„Xf läfst den Ausdruck ∇ invariant“*, wenn der Pfaff'sche Ausdruck $X\nabla$ identisch null ist, d. h. wenn die Beziehungen

$$-\frac{\partial A}{\partial x_i} \equiv \sum_1^n {}^{k} \xi_k \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_\iota}\right) \quad (i = 1 \ldots n)$$

erfüllt sind. Wir sagen ferner *„die Pfaff'sche Gleichung $\nabla = 0$ gestattet die infinitesimale Transformation Xf“*, oder auch: *„Xf führt die Gleichung $\nabla = 0$ in sich über, oder läfst die Gleichung $\nabla = 0$ invariant“*, wenn der Ausdruck $X\nabla$ in der Form $\varrho \cdot \nabla$ darstellbar ist, d. h. also vermöge $\nabla = 0$ verschwindet. Endlich sagen wir, das System Pfaff'scher Gleichungen

$$(5) \qquad \nabla_\iota \equiv \sum_1^n {}^{s} \eta_{is} dx_s = 0 \quad (i = 1 \ldots n - p)$$

„gestattet die infinitesimale Transformation Xf, oder *wird von ihr in sich übergeführt (invariant gelassen)*“, wenn $n-p$ Funktionensysteme $\varrho_1^{(\iota)}\varrho_2^{(\iota)}\ldots\varrho_{n-p}^{(\iota)}$ existiren, derart, dafs für alle Werte der x_ι und ihrer Differentiale identisch:

$$X\nabla_s \equiv \varrho_1^{(s)}\nabla_1 + \varrho_2^{(s)}\nabla_2 + \cdots + \varrho_{n-p}^{(s)}\nabla_{n-p} \qquad (s = 1\ldots n-p),$$

wenn also die Gleichungen $X\nabla_s = 0$ eine Folge des Systems (5) sind.

Ist Xf eine infinitesimale Transformation der zu (5) adjungirten Schar (Art. 73), so gelten die Identitäten:

$$(25) \qquad 0 \equiv \sum_1^n{}^s \xi_s \eta_{\iota s} \equiv A_i \qquad (i = 1\ldots n-p).$$

Aus (24) folgt daher

$$(26) \qquad X\nabla_s = \sum_1^n{}^\iota \sum_1^n{}^k \xi_k \left(\frac{\partial \eta_{s\iota}}{\partial x_k} - \frac{\partial \eta_{sk}}{\partial x_\iota}\right) dx_\iota.$$

Daraus ergiebt sich beiläufig: Gestattet das System (5) Pfaff'scher Gleichungen die infinitesimale Transformation Xf der adjungirten Schar, so gestattet es auch alle infinitesimalen Transformationen der Form ϱXf. Ferner: gestattet das System (5) die der adjungirten Schar angehörenden infinitesimalen Transformationen $X_1f\ldots X_kf$, so gestattet es auch alle infinitesimalen Transformationen der Form

$$\varrho_1 X_1 f + \varrho_2 X f + \cdots + \varrho_k X_k f.$$

Das System (5) gestattet nun dann und nur dann *alle* infinitesimalen Transformationen der adjungirten Schar, wenn die rechten Seiten von (26) vermöge (5) und (25) identisch verschwinden. Diese rechten Seiten verwandeln sich aber in die Bilinearformen (21), wenn man u_k statt ξ_k und v_ι statt dx_ι schreibt. Demnach können wir sagen:

„Damit das System (5) Pfaff'scher Gleichungen unbeschränkt integrabel sei, ist notwendig und hinreichend, dafs es alle infinitesimalen Transformationen der adjungirten Schar gestatte“.

79. Ehe wir die Bedingungen des Art. 76 weiter umformen, verwenden wir sie zum Beweise des folgenden Theorems:[1])

„Sind die n^2 Funktionen $a_{\iota k}$ aus n beliebigen Funktionen $a_1\ldots a_n$ der Variabeln x in folgender Weise gebildet:

$$(27) \qquad a_{ik} \equiv -a_{ki} \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_\iota} \quad (i, k = 1\ldots n),$$

1) Frobenius I pag. 286.

so stellen die unabhängigen unter den Pfaff'schen Gleichungen:

$$(28) \qquad \sum_1^n a_{is} dx_s = 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, n)$$

ein unbeschränkt integrables System dar."

Der Satz wird bedeutungslos, wenn n eine gerade Zahl und der Rang der schiefsymmetrischen Matrix

$$(29) \qquad \| a_{ik} \| \qquad (i, k = 1 \,.\,.\, n)$$

gleich n ist, da dann das System (28) mit dem folgenden

$$dx_1 = 0, \,.\,.\, dx_n = 0$$

äquivalent ist. Wir nehmen daher an, daſs der Rang $2l$ der Matrix (29) (Art. 25) kleiner als n ist. Es mögen nun die Funktionensysteme u, v den Relationen:

$$(30) \qquad \sum_\alpha a_{\beta\alpha} u_\alpha = 0, \quad \sum_\alpha a_{\beta\alpha} v_\alpha = 0 \qquad (\beta = 1 \,.\,.\, n)$$

genügen; dann folgt:

$$\sum_\alpha \frac{\partial a_{\beta\alpha}}{\partial x_i} \cdot v_\alpha \equiv - \sum_\alpha a_{\beta\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} \quad (i = 1 \,.\,.\, n).$$

Indem wir diese Gleichungen bezw. mit $u_1 \,.\,.\, u_n$ multipliziren und addiren, so erhalten wir mit Rücksicht auf (30)

$$(31) \qquad \sum_\alpha \sum_\beta v_\alpha u_\beta \frac{\partial a_{\beta\alpha}}{\partial x_i} \equiv 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, n)$$

vorausgesetzt, daſs die $u_i v_i$ den Relationen (30) genügen. Nun besteht aber vermöge (27) die Identität:

$$\frac{\partial a_{\beta\alpha}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{\alpha i}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial a_{i\beta}}{\partial x_\alpha} \equiv 0; \quad (\alpha, \beta, i = 1 \,.\,.\, n)$$

ersetzt man $\frac{\partial a_{\beta\alpha}}{\partial x_i}$ durch seinen hieraus folgenden Wert, so erhält man aus (31) die vermöge (30) bestehenden Identitäten:

$$\sum_\alpha \sum_\beta v_\alpha u_\beta \left(\frac{\partial a_{i\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial x_\beta} \right) \equiv 0 \quad (i = 1, \,.\,.\, n),$$

was zu zeigen war.

Wir können den soeben bewiesenen Satz auch so formuliren:

Sind die n^2 Funktionen a_{ik} durch die Formeln (27) definirt, und ist $2l$ der Rang der Matrix

$$\| a_{ik} \|,$$

bedeuten ferner

$$\eta_1^{(i)} \eta_2^{(i)} \ldots \eta_n^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots n - 2l)$$

irgend $n - 2l$ linear unabhängige Lösungensysteme der linearen Gleichungen:

$$\sum_k a_{ik} \eta_k = 0 \qquad (i = 1 \ldots n),$$

so bilden die Gleichungen

$$X_i f \equiv \eta_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \eta_n^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

ein $n - 2l$-gliedriges vollständiges System."

80. Wir wenden uns nunmehr dazu, die in Art. 76 erhaltenen Integrabilitätsbedingungen auf eine übersichtlichere Form zu bringen.[1])

Zu diesem Zwecke schreiben wir die Gleichungen (17) in der Gestalt

$$(17) \qquad U_i = 0, \quad V_i = 0 \qquad (i = 1 \ldots n - p).$$

Die n Gleichungen $U_i = 0$ besitzen genau p linear unabhängige Lösungensysteme

$$u_1^{(k)} u_2^{(k)} \ldots u_n^{(k)} \qquad (i = 1 \ldots p).$$

Damit nun die in Art. 76 genannten $n - p$ Bilinearformen vermöge (17) verschwinden, ist offenbar notwendig und hinreichend, dafs die $p(n - p)$ Ausdrücke

$$(32) \qquad \sum_\alpha \sum_\beta H^{(s)}_{\alpha\beta} u^{(k)}_\alpha v_\beta \quad (s = 1 \ldots n - p;\ k = 1 \ldots p),$$

als Linearformen in den Variabeln v betrachtet, vermöge der Relationen $V_i = 0$ verschwinden, d. h. also in der Form:

$$(33) \qquad \sigma_1^{(s,k)} V_1 + \sigma_2^{(s,k)} V_2 + \cdots + \sigma_{n-p}^{(s,k)} V_{n-p}$$

darstellbar seien, wobei die σ gewisse Funktionen der x bedeuten (vgl. Art. 9 und 10). Indem wir die Koeffizienten der Variabeln v_β in den Ausdrücken (32) und (33) vergleichen, erhalten wir den Satz:

„*Damit das System Pfaff'scher Gleichungen* (5) *unbeschränkt integrabel sei, ist notwendig und hinreichend, dafs jedes der* $n - p$ *Gleichungensysteme mit den Unbekannten* $u_1 \ldots u_n \sigma_1 \ldots \sigma_{n-p}$:

---

1) Frobenius I 276 f.

$$(s=1,2\,..\,n-p)\begin{cases}\sum_1^n{}^\alpha H^{(s)}_{\alpha\beta}u_\alpha = \sum_1^{n-p}{}^h \sigma_h \eta_{h\beta} & (\beta = 1\,..\,n)\\ \sum_1^n{}^\alpha \eta_{h\alpha}u_\alpha = 0 & (h=1,2\,..\,n-p)\end{cases}$$

genau p linear unabhängige Lösungensysteme zulasse, mit andern Worten, (vgl. Art. 11) *dafs jede der $n-p$ schiefsymmetrischen Matrices:*

$$(34)\quad \left\|\begin{matrix} 0 & H^{(s)}_{12} & H^{(s)}_{13} & .. & H^{(s)}_{1n} & \eta_{11} & \eta_{21} & .. & \eta_{n-p,1}\\ H^{(s)}_{21} & 0 & H^{(s)}_{23} & .. & H^{(s)}_{2n} & \eta_{12} & \eta_{22} & .. & \eta_{n-p,2}\\ . & . & . & .. & . & . & . & .. & .\\ H^{(s)}_{n1} & H^{(s)}_{n2} & H^{(s)}_{n3} & .. & 0 & \eta_{1n} & \eta_{2n} & .. & \eta_{n-p,n}\\ -\eta_{11} & -\eta_{12} & -\eta_{13} & .. & -\eta_{1n} & 0 & 0 & .. & 0\\ . & . & . & .. & . & . & . & .. & .\\ -\eta_{n-p,1} & . & . & .. & -\eta_{n-p,n} & 0 & 0 & .. & 0\end{matrix}\right\| \quad (s=1,2\,..\,n-p)$$

den Rang $2n-2p$ besitze. Ist das gegebene System Pfaff'scher Gleichungen (5) nach $dx_{p+1}\,dx_{p+2}\,..\,dx_n$ auflösbar, so ist die $n-p$-reihige Determinante

$$(35)\qquad |\eta_{ik}| \qquad (i=1\,..\,n-p;\ k=p+1\,..\,n)$$

nicht identisch null. Dem Quadrate dieser Determinante aber ist nach dem Laplace'schem Theorem diejenige $2n-2p$-reihige Hauptunterdeterminante gleich, die aus (34) durch Streichung der p ersten Zeilen und Spalten entsteht, und die wir mit D bezeichnen wollen. Um also auszudrücken, dafs $2n-2p$ der Rang der Matrix (34) sei, haben wir nach Art. 26 nur alle diejenigen $2n-2p+2$-reihigen Hauptunterdeterminanten, welche D enthalten, gleich null zu setzen. Um die in Art. 18 eingeführte Symbolik benutzen zu können, setzen wir

$$(36)\begin{cases}(i,k)^{(s)} = H^{(s)}_{ik} = \dfrac{\partial \eta_{si}}{\partial x_k} - \dfrac{\partial \eta_{sk}}{\partial x_i} & (i,k=1,\,..\,n)\\ (i,n+l)^{(s)} = -(n+l,i)^{(s)} = \eta_{li} & (i=1\,..\,n;\ l=1\,..\,n-p)\\ (n+h,n+l)^{(s)} = 0 & (h,l=1,2\,..\,n-p).\end{cases}$$

Wird nun das Pfaff'sche Aggregat

$$(k_1k_2\,..\,k_{2r})^{(s)}$$

genau so mit Hülfe der Elemente (36) gebildet, wie das auf pag. 24 definirte Pfaff'sche Aggregat mittels der Elemente (ik), *so schreiben sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dafs das*

System (5) *unbeschränkt integrabel sei, folgendermaßen:*

$$(37)\qquad (i, k, p+1, p+2, \ldots n, n+1 \ldots 2n-p)^{(s)} = 0$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots p;\; s = 1, 2 \ldots n-p).$$

81. Eine Pfaff'sche Gleichung

$$(38)\qquad \nabla = \sum_1^n a_\iota (x_1 x_2 \ldots x_n)\, dx_\iota = 0,$$

deren linke Seite die Form

$$\nabla \equiv \varrho (x_1 x_2 \ldots x_n)\, d\varphi (x_1 \ldots x_n)$$

erhalten kann, die also mit einer Relation der Form $d\varphi = 0$ äquivalent ist, heifst eine *exakte Gleichung.* Wir können a_n als nicht identisch verschwindend voraussetzen. Damit dann die Gleichung (38) exakt sei, oder anders ausgedrückt, damit die $n-1$ partiellen Differentialgleichungen, die sich durch Nullsetzen aller zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \cdot\,\cdot & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \\ a_1 & a_2 & \cdot\,\cdot & a_n \end{Vmatrix}$$

ergeben, eine Lösung $\varphi(x_1 \ldots x_n)$ gemein haben, ist nach dem vorigen Artikel notwendig und hinreichend, dafs der Rang der Matrix

$$(39)\qquad \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdot\,\cdot & a_{1n} & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\,\cdot & 0 & a_n \\ -a_1 & -a_2 & \cdot\,\cdot & -a_n & 0 \end{vmatrix}$$

worin die a_{ik} durch die Formeln (27) definirt sind, gleich *zwei* ist, mit andern Worten, dafs alle diejenigen 4-reihigen Hauptunterdeterminanten verschwinden, welche die zweireihige Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & a_n \\ -a_n & 0 \end{vmatrix}$$

als Unterdeterminante enthalten. Wir kommen so auf die folgenden Bedingungen:

$$(40)\quad 0 = \left(\frac{\partial a_\iota}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_\iota}\right) a_n + \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_n} - \frac{\partial a_n}{\partial x_k}\right) a_\iota + \left(\frac{\partial a_n}{\partial x_\iota} - \frac{\partial a_\iota}{\partial x_n}\right) a_k$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots n-1).$$

Sind diese befriedigt, so sind überhaupt alle Relationen der Form:

$$0 = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right) a_l + \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_l} - \frac{\partial a_l}{\partial x_k}\right) a_i + \left(\frac{\partial a_l}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_l}\right) a_k$$

$$(i, k, l = 1 \,..\, n)$$

erfüllt, und es verschwinden auch alle übrigen, aus dem Schema (39) zu bildenden Pfaff'schen Aggregate der Ordnung 4 (Art. 26).

So schreibt sich z. B. die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Pfaff'sche Gleichung

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

exakt sei, folgendermafsen:

$$0 = X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right).$$

§ 5. Die Mayer'sche Transformation.[1]

82. Es sei ein k-gliedriges Gleichungensystem

(1) $$\varphi_s(x_1 x_2 \,..\, x_n) = 0 \qquad (s = 1, 2 \,..\, k)$$

vorgelegt. Wir denken uns mittels desselben k der Gröfsen x, etwa $x_{n-k+1}, x_{n-k+2} \,..\, x_n$, als Funktionen der übrigen Variabeln $x_1 \,..\, x_{n-k}$ dargestellt und die so erhaltenen Ausdrücke in ein System Pfaff'scher Gleichungen

(2) $$\sum_1^n {}^s\, \eta_{is}(x_1 \,..\, x_n) dx_s = 0 \qquad (i = 1, 2 \,..\, n - p)$$

substituirt, wodurch sich deren linke Seiten in lineare homogene Ausdrücke in $dx_1 \,..\, dx_{n-k}$ verwandeln, deren Koeffizienten nur von $x_1 \,..\, x_{n-k}$ abhängen. Haben nun die Relationen (1) die Eigenschaft, dafs alle diese Substitutionsresultate identisch verschwinden, d. h. dafs die Koeffizienten der Differentiale $dx_1 \,..\, dx_{n-k}$ für jedes beliebige Wertsystem $x_1 \,..\, x_{n-k}$ null sind, so sagen wir: die Relationen (1) *„befriedigen"* das System (2), oder auch sie bilden ein *„Integraläquivalent"* des Systems (2); die durch (1) definirte Punktmannigfaltigkeit heifst dementsprechend eine *„Integral-μ_{n-k}"* des Systems Pfaff'scher Gleichungen (2).

Selbstverständlich wird dabei vorausgesetzt, dafs es eine Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ giebt, an der nicht nur die Gesamtheit der Funktionen η_{si}, sondern auch das Gleichungensystem (1) im Sinne von Art. 40 regulär ist.

1) Mayer I p. 458f.; Goursat I Kap. 2.

Aus der Definition des Integraläquivalents folgt unmittelbar:

„Erfüllen die k Gleichungen (1) *das System Pfaff'scher Gleichungen* (2), *so gilt dasselbe von jedem mit* (1) *äquivalenten Gleichungensystem.“*

„Verwandelt sich bei einer beliebigen Variabelntransformation das System (2) *in ein System* (2)′ *mit den Variabeln $y_1 \ldots y_n$, so verwandelt sich gleichzeitig jedes k-gliedrige Integraläquivalent von* (2) *in ein k-gliedriges Integraläquivalent des Systems* (2)′.“

83. Ist das System (2) unbeschränkt integrabel, und sind $f_1 f_2 \ldots f_{n-p}$ unabhängige Lösungen des adjungirten Systems

$$(3) \qquad X_k f \equiv \sum_1^n {}^s\, \xi_{ks}(x_1 x_2 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_s} \quad (k = 1, 2 \ldots p)$$

so sind die Gleichungen

$$df_1 = 0, \; df_2 = 0, \; \ldots \; df_{n-p} = 0$$

einerseits mit (2) äquivalent (Art. 74), andererseits identisch erfüllt, wenn man darin die durch Auflösung des Systems

$$(4) \qquad f_\iota(x_1 x_2 \ldots x_n) = c_\iota \qquad (c_\iota = \text{arb. Konst.})$$

erhaltenen Ausdrücke für $x_{p+1} \ldots x_n$ substituirt. Die Gleichungen (4) bilden daher für jedes Wertsystem der Konstanten c_ι ein Integral der Pfaff'schen Gleichungen (2), und werden das *„allgemeine Integral“* oder auch die *„allgemeinen Integralgleichungen“* des Systems (2) genannt.

Ist also das System (2) unbeschränkt integrabel, dann und nur dann besitzt es $n-p$-fach unendlich viele p-fach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeiten, die offenbar mit den Charakteristiken C_p des adjungirten Systems (3) identisch sind. Kann das System (3) auf die Form

$$(5) \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{p+1}^n {}^h\, a_{ih} \frac{\partial f}{\partial x_h} \equiv A_i f \qquad (i = 1 \ldots p)$$

und mithin das System (2) auf die Gestalt

$$(6) \quad dx_{p+k} = a_{1,p+k} dx_1 + a_{2,p+k} dx_2 + \cdots + a_{p,p+k} dx_p \quad (k = 1 \ldots n-p)$$

gebracht werden, und sind alle a_{ih} sowie die f_ι an der Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ regulär, bedeutet ferner

$$(7) \qquad x_1^0 \ldots x_p^0 x'_{p+1} \ldots x'_n$$

eine Stelle in der Umgebung von $x_1^0 \ldots x_n^0$, so lassen sich die Relationen

$$(8) \qquad f_\iota(x_1 x_2 \ldots x_n) = f_\iota(x_1^0 \ldots x_p^0 x'_{p+1} \ldots x'_n)$$

auf folgende beiden Arten auflösen:

(9) $x'_{p+k} = x_{p+k} + \mathfrak{P}_k(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0 \ldots x_n - x_n^0)$ $(k = 1 \ldots n - p)$,

(10) $x_{p+k} = x'_{p+k} + \mathfrak{P}_k(x_1^0 - x_1, \ldots x_p^0 - x_p, x'_{p+1} - x^0_{p+1} \ldots x'_n - x^0_n)$

$$(k = 1, 2, \ldots n - p),$$

wobei die $\mathfrak{P}_k$ vermöge der Substitution

(11) $$x_1 = x_1^0 \ldots x_p = x_p^0$$

alle verschwinden. Die rechten Seiten von (9) sind nichts anderes als die Hauptintegrale h_k des Systems (3) hinsichtlich $x_1 = x_1^0 \ldots x_p = x_p^0$. Die durch (10) definirten Funktionen befriedigen nach dem eben Gesagten die Pfaff'schen Gleichungen (6) identisch, sie erfüllen also auch die folgenden partiellen Differentialgleichungen

(12) $$\frac{\partial x_{p+k}}{\partial x_i} = a_{i,\,p+k}(x_1 x_2 \ldots x_n) \quad (i = 1, \ldots p;\ k = 1, \ldots n - p);$$

sie sind ferner an der Stelle $x_1^0 \ldots x_p^0$ regulär und nehmen daselbst bezw. die Werte $x'_{p+1} \ldots x_n'$ an. Wir behaupten nun, dafs es auch nur ein einziges Funktionensystem

$$x_{p+k} = \xi_k(x_1 x_2 \ldots x_p)$$

mit diesen Eigenschaften geben kann. Denken wir uns nämlich die Funktionen ξ_k in Potenzreihen entwickelt

$$\xi_k = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_p=0}^{\infty} c^k_{\alpha_1 \alpha_2 \cdot \alpha_p} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} \cdots (x_p - x_p^0)^{\alpha_p},$$

so sind die Koeffizienten $c^k_{0 \cdot 0}$ von vornherein bekannt, nämlich bezw. gleich x'_{p+k}. Da ferner die ξ_k den Gleichungen (12) identisch genügen sollen, so kennt man die Werte, welche die Ableitungen $\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$ an der Stelle (11) annehmen, also alle Konstanten c^k_{100} $c^k_{010 \cdot}$; sie sind bezw. gleich $a_{i,p+k}(x_1^0 \ldots x_p^0 x'_{p+1} \ldots x_n')$. Ferner folgt durch Differentiation von (12):

$$\frac{\partial^2 x_{p+k}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial a_{i,\,p+k}}{\partial x_j} + \sum_{p+1}^{n}{}_h \frac{\partial a_{i,\,p+k}}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial x_j} \quad (i, j = 1 \ldots p),$$

womit auch alle zweiten Ableitungen der ξ_k an der Stelle (11), und demnach alle Koeffizienten $c^k_{2\,\cdot}$ c^k_{110} c^k_{020} etc. bekannt sind. Man erkennt so, dafs alle Koeffizienten $c^k_{\alpha_1 \cdot \alpha_p}$ der Reihe nach bestimmt werden können. Dafs die Gleichungen, die zur successiven Bestimmung dieser Koeffizienten dienen, auch immer mit einander verträglich sind, dafs man also z. B. durch Differentiation der Gleichung für $\frac{\partial x_{p+k}}{\partial x_i}$ nach x_j für die Ableitung

$$\left(\frac{\partial^2 x_{p+k}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{x_1 = x_1^0 \quad x_p = x_p^0}$$

denselben Wert findet wie durch Differentiation der Gleichung für $\frac{\partial x_{p+k}}{\partial x_j}$ nach x_i, schliefst man ohne weiteres aus der oben bewiesenen Existenz eines Funktionensystems der geforderten Eigenschaften; es läfst sich aber mit Hülfe der Identitäten

$$(13) \qquad A_i(a_{ks}) - A_k(a_{is}) = 0 \quad (i, k = 1 \,.\,. p;\ s = p + 1 \,.\,. n),$$

denen die Funktionen a_{ks} unseren Voraussetzungen nach genügen (Art. 74), auch direkt nachweisen.[1])

Ein System partieller Differentialgleichungen der Form (12), dessen rechte Seiten den Identitäten (13) genügen, heifst ein *„Mayer'sches System"*. Bezüglich eines solchen Systems gilt nach dem Obigen folgender Satz:

„Bilden die partiellen Differentialgleichungen (12) *ein Mayer'sches System, und sind alle Funktionen $a_{i,p+k}$ an der Stelle*

$$(7) \qquad x_1^0 \,.\,. x_p^0 x_{p+1}' x_{p+2}' \,.\,. x_n'$$

regulär, so giebt es ein und nur ein System von Funktionen x_{p+1}, $x_{p+2} \,.\,. x_n$ der unabhängigen Veränderlichen $x_1 \,.\,. x_p$, die an der Stelle $x_1^0 \,.\,. x_p^0$ regulär sind, daselbst die vorgeschriebenen Werte $x_{p+1}' \,.\,. x_n'$ annehmen, und die partiellen Differentialgleichungen (12) *identisch befriedigen."*

Die Ermittelung dieser $n - p$ Funktionen (10) kommt nach dem Obigen auf die Bestimmung der Hauptintegrale des Jacobi'schen Systems (5) hinaus; die Gleichungen (10) definiren die durch den Punkt (7) gehende Charakteristik C_p dieses Jacobi'schen Systems.

84. Es ist nützlich, die Existenz der Integrale eines Mayer'schen Systems (12) bezw. des zugehörigen unbeschränkt integrabeln Systems (6) noch auf einem etwas andern Wege zu erweisen, ohne die Existenz der Lösungen eines vollständigen Systems als bekannt vorauszusetzen. Zu diesem Zwecke betrachten wir die in (12) enthaltenen Gleichungen:

---

1) Auch die Thatsache, dafs die für die ξ_k erhaltenen Reihenentwickelungen konvergiren, läfst sich direkt begründen, und damit ein von der Theorie der vollständigen Systeme unabhängiger Beweis für das im Texte folgende Theorem erbringen; vgl. Bouquet I.

$$(14) \qquad \frac{\partial x_{p+1}}{\partial x_1} = a_{1,p+1}; \quad \frac{\partial x_{p+2}}{\partial x_1} = a_{1,p+2}; \ \ldots \ \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = a_{1n},$$

die als ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit den Unbekannten $x_{p+1} \ldots x_n$ und der Independenten x_1 aufgefafst werden können, wenn $x_2 \ldots x_p$ Parameter bedeuten. Es seien

$$\begin{gathered} \omega_{p+1}(x_1 \ldots x_p x_{p+1} \ldots x_n) = \alpha_{p+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_n(x_1 \ldots x_p x_{p+1} \ldots x_n) = \alpha_n \end{gathered}$$

die allgemeinen Integralgleichungen dieses simultanen Systems. Da wir wissen, dafs die Funktionen ω_ι hinsichtlich $x_{p+1} \ldots x_n$ unabhängig sind (Art. 46), so können wir sie statt dieser Variablen in das System (12), oder was dasselbe besagt, in das System (6) als neue Veränderliche einführen. Nun erhält man vermöge (6) für das totale Differential $d\omega_{p+i}$

$$(15) \qquad d\omega_{p+i} \equiv \sum_1^p {}_s A_s \omega_{p+i} \cdot dx_s \qquad (i = 1 \ldots n - p).$$

Durch unsere Variabelntransformation verwandelt sich also das System (6) in (15), wenn darin rechts alles durch $x_1 \ldots x_p \omega_{p+1} \ldots \omega_n$ ausgedrückt wird. Es ist aber $A_1 \omega_{p+i} \equiv 0$, da ja die ω Integrale der partiellen Differentialgleichnug $A_1 f = 0$ sind. Aus demselben Grunde sind nach einer Bemerkung des Art. 65 auch alle Ausdrücke $A_s \omega_{p+i}$ Integrale dieser Gleichung, mithin durch

$$x_2 \ldots x_p \omega_{p+1} \ldots \omega_n$$

allein ausdrückbar. Ferner ist das transformirte System (15) wieder unbeschränkt integrabel, da das adjungirte System partieller Differentialgleichungen nach Art. 60 wiederum vollständig ist. Endlich erhält man aus jedem Integral von (15) durch Rückübergang zu den alten Variabeln offenbar ein Integral von (6).

Durch unsere Transformation ist also die Integration von (6) auf diejenige eines $n - p$-gliedrigen unbeschränkt integrablen Systems mit nur $n - 1$ Variabeln zurückgeführt.

Wir schreiben nun die allgemeinen Integralgleichungen des simultanen Systems (14) insbesondere in der Form

$$(16) \quad x'_{p+i} = x_{p+i} + (x_1 - x_1^0)\mathfrak{P}_i(x_1 - x_1^0 \ldots x_n - x_n^0) \quad (i = 1 \ldots n - p)$$

so dafs also die rechten Seiten die aufser $x_2 \ldots x_p$ noch vorhandenen Hauptintegrale von $A_1 f = 0$ hinsichtlich $x_1 = x_1^0$ bedeuten, und führen die so definirten Funktionen x'_{p+i} statt der x_{p+i} in (6) ein. Durch Auflösung von (16) folgt:

$$(17)\quad x_{p+i} = x'_{p+i} + (x_1^0 - x_1)\mathfrak{P}_i(x_1^0 - x_1,\ x_2 - x_2^0 \ldots x'_n - x_n^0)$$

und hieraus:

$$(18)\qquad dx_{p+i} = dx'_{p+i} - \mathfrak{P}_i\, dx_1 + (x_1 - x_1^0)\, d\mathfrak{P}_i.$$

Die so bestimmten Werte der x_{p+i} und ihrer Differentiale substituiren wir in (6). Wir wissen aber bereits, dafs die so entstehenden Gleichungen die Variable x_1 weder in den Koeffizienten noch in der Form dx_1 enthalten, also vollständig ungeändert bleiben, wenn man x_1 durch den Spezialwert x_1^0 ersetzt. Das transformirte System hat daher die Form:

$$(19)\quad dx'_{p+k} = \sum_2^p {}_s\, a_{s,\,p+k}(x_1^0 x_2 \ldots x_p x'_{p+1} \ldots x_n')\, dx_s \qquad (k = 1 \ldots n-p).$$

Auf dieses System, das nach dem Obigen gleichfalls unbeschränkt integrabel ist, können wir jetzt wiederum dasselbe Verfahren anwenden, wie auf (6), und gelangen durch Wiederholung dieser Methode schliefslich zu einem $n-p$-gliedrigen System Pfaff'scher Gleichungen mit nur $n-p+1$ Variabeln, d. h. also zu einem simultanen System gewöhnlicher Differentialgleichungen, aus dessen $n-p$ Integralen diejenigen des ursprünglichen Systems (6) durch Rückübergang zu den alten Variabeln gewonnen werden. Wie man sieht, ist dieses Verfahren von dem in Art. 62 auseinandergesetzten nicht wesentlich verschieden. Der ganze Unterschied besteht darin, dafs statt der a. a. O. gebrauchten successiven vollständigen Systeme J, J' .. jedesmal die adjungirten unbeschränkt integrabeln Systeme Pfaff'scher Gleichungen benutzt werden.

85. Aus der Form (19), die das gegebene unbeschränkt integrable System vermöge unserer Variabelntransformation annimmt, läfst sich aber noch ein anderer wichtiger Schlufs ziehen. Verschwänden nämlich alle Funktionen

$$a_{2,\,p+k},\ a_{3,\,p+k} \ldots a_{p,\,p+k} \qquad (k = 1 \ldots n-p)$$

vermöge der Substitution $x_1 = x_1^0$ *identisch*, so hätte das transformirte System (19) die Form

$$dx'_{p+1} = 0,\ dx'_{p+2} = 0,\ \ldots\ dx'_n = 0;$$

die Aufgabe, das gegebene System zu integriren, wäre somit auf die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung $A_1 f = 0$ in $n-p+1$ Independenten, bezw. des simultanen Systems (14) zurückgeführt. Es ist nun eine bemerkenswerte Thatsache, dafs durch eine einfache Variabelntransformation der genannte Fall stets realisirt werden kann. Setzt man nämlich unter der Annahme, dafs alle $a_{i,\,p+k}$ an der Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ regulär sind:

$$(20)\quad x_1 = x_1^0 + y_1;\ x_2 = x_2^0 + y_1 y_2,\ x_3 = x_3^0 + y_1 y_3 \ldots x_p = x_p^0 + y_1 y_p$$

so folgt:

$$dx_1 = dy_1;\ dx_k = y_1 dy_k + y_k dy_1 \qquad (k = 2 \ldots p)$$

und das System (6) nimmt vermöge der Transformation (20) folgende Form an:

$$(21)\quad dx_{p+k} = ([a_{1,\,p+k}] + y_2[a_{2,\,p+k}] + \cdots + y_p[a_{p,\,p+k}])dy_1 + y_1 \sum_2^p {}^h [a_{h,\,p+k}]\, dy_h \qquad (k = 1, 2 \ldots n-p).$$

Darin bedeutet $[a_{\iota k}]$ die Funktion, in die sich $a_{\iota k}$ vermöge der Substitution (20) verwandelt. Da die $a_{\iota k}$ der Annahme nach gewöhnliche Potenzreihen der n Gröfsen $x_\iota - x_\iota^0$ bedeuten, so sind auch die $[a_{\iota k}]$ gewöhnliche Potenzreihen der n Gröfsen

$$(22)\qquad y_1, y_1 y_2, \ldots y_1 y_p, x_{p+1} - x_{p+1}^0 \ldots x_n - x_n^0.$$

Es seien nun $\psi_1 \ldots \psi_{n-p}$ die Hauptintegrale hinsichtlich $y_1 = 0$ der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(23)\quad \frac{\partial f}{\partial y_1} + \sum_1^{n-p} {}^h ([a_{1,\,p+h}] + y_2[a_{2,\,p+h}] + \cdots + y_p[a_{p,\,p+h}]) \frac{\partial f}{\partial x_{p+h}} = 0,$$

worin $y_2 \ldots y_p$ als Konstante betrachtet werden; die ψ_i sind also an der Stelle

$$y_1 = 0,\ x_{p+1} = x_{p+1}^0 \ldots x_n = x_n^0$$

regulär, und gehen vermöge $y_1 = 0$ bezw. in x_{p+i} über. Führt man jetzt in das System (21) die ψ_i statt der x_{p+i} als neue Veränderliche ein, und beachtet man, dafs die Koeffizienten der Differentiale $dy_2 \ldots dy_p$ alle mit dem Faktor y_1 behaftet sind, so reduzirt sich unser System in der That auf das folgende:

$$d\psi_1 = 0,\ d\psi_2 = 0, \ldots d\psi_{n-p} = 0,$$

und *die Integration des Systems* (6) *oder des Jacobi'schen Systems* (5) *ist sonach mit Hülfe der Variabelntransformation* (20) *auf diejenige der linearen partiellen Differentialgleichung* (23) *bezw. des zugehörigen simultanen Systems:*

$$(24)\quad \frac{dx_{p+i}}{dy_1} = [a_{1,\,p+i}] + y_2[a_{2,\,p+i}] + \cdots + y_p[a_{p,\,p+i}] \quad (i = 1 \ldots n-p)$$

zurückgeführt.

Die Variabelntransformation (20) wollen wir kurz als die *„Mayer'sche Transformation“* [1]) bezeichnen.

Das vorstehende wichtige Resultat läfst sich auch unmittelbar aus der Betrachtung des Jacobi'schen Systems (5) ableiten. Führt man nämlich in dieses System statt $x_1 \dots x_p$ mittels der Formeln (20) die neuen Independenten $y_1 \dots y_p$ ein, so erhält man mit Hülfe der Beziehungen:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + y_p \frac{\partial f}{\partial x_p}; \ \frac{\partial f}{\partial y_2} = y_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}; \dots \frac{\partial f}{\partial y_p} = y_1 \frac{\partial f}{\partial x_p}$$

die nachstehenden transformirten Gleichungen:

$$(23) \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} + \sum_1^{n-p} {}^h ([a_{1,p+h}] + y_2 [a_{2,p+h}] + \dots + y_p [a_{p,p+h}]) \frac{\partial f}{\partial x_{p+h}} = 0,$$

$$(25) \quad \frac{\partial f}{\partial y_k} + y_1 \sum_1^{n-p} {}^h [a_{k,p+h}] \frac{\partial f}{\partial x_{p+h}} = 0 \qquad (k = 2, 3, \dots p).$$

Gleichzeitig verwandeln sich die Hauptintegrale $h_1 \dots h_{n-p}$ des Jacobi'schen Systems (5) in Integrale der Gleichung (23), die sich durch gewöhnliche Potenzreihen der n Gröfsen (22) darstellen lassen, und vermöge der Substitution $y_1 = 0$ bezw. in $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots x_n$ übergehen. Wir wissen aber, dafs die lineare partielle Differentialgleichung (23), wenn man darin lediglich die Variabeln $y_1, x_{p+1}, \dots x_n$ als Independente, die $y_2 \dots y_p$ aber als konstante Parameter betrachtet, ein und nur ein System von Hauptintegralen $\psi_1 \dots \psi_{n-p}$ besitzt, die sich vermöge $y_1 = 0$ auf $x_{p+1} \dots x_n$ reduziren. Die Funktionen h_ι müssen daher bezw. mit ψ_ι identisch werden, wenn man die $x_1 \dots x_p$ durch ihre Werte (20) ersetzt. Auch erkennen wir jetzt hinterher, dafs die Integrale ψ_i der Gleichung (23) die Parameter $y_2 \dots y_p$ lediglich in den Verbindungen $y_1 y_2, y_1 y_3 \dots y_1 y_p$ enthalten können, insbesondere, dafs sie gewöhnliche Potenzreihen der n Gröfsen (22) sind, und dafs die Koeffizienten dieser Potenzreihen von den Parametern $y_2 \dots y_p$ nicht abhängen.

Damit ist folgender Satz bewiesen:

„Die Hauptintegrale hinsichtlich $y_1 = 0$ *der linearen partiellen Differentialgleichung* (23) *verwandeln sich direkt in die Hauptintegrale des Jacobi'schen Systems* (5) *hinsichtlich* $x_1 = x_1^0 \dots x_p = x_p^0$, *wenn man die* y_ι *mittels der Formeln* (20) *wieder durch die* x *ausdrückt.“*

Die Integration eines p-gliedrigen vollständigen Systems in n Inde-

1) Für den Spezialfall $n = 3$ wurde diese Methode im Wesentlichen bereits von Du-Bois Reymond angegeben; vgl. Du-Bois I, II. Siehe auch Art. 367, 369.

pendenten kommt auf diejenige einer einzigen linearen partiellen Differentialgleichung in $n-p+1$ Independenten hinaus, erfordert also je eine Integrationsoperation der Ordnung

$$n-p,\ n-p-1,\ ..\ 3,\ 2,\ 1$$

Kennt man $n-p$ beliebige unabhängige Integrale

$$f_i(y_1, y_2, ..\ y_p,\ x_{p+1} x_{p+2}\ ..\ x_n) \qquad (i = 1, 2\ ..\ n-p)$$

der Gleichung (23) oder was dasselbe besagt, des simultanen Systems (24), so erhält man die Hauptintegrale ψ_i, indem man die $n-p$ Relationen

$$f_i(y_1\ ..\ y_p,\ x_{p+1}\ ..\ x_n) = f_i(0, y_2\ ..\ y_p,\ \psi_1\ ..\ \psi_{n-p}) \quad (i = 1\ ..\ n-p)$$

nach $\psi_1\ ..\ \psi_{n-p}$ auflöst. Diejenige Lösung des Jacobi'schen Systems (5), die sich vermöge $x_1 = x_1^0\ ..\ x_p = x_p^0$ auf die vorgeschriebene Funktion $\varphi(x_{p+1}\ ..\ x_n)$ reduzirt, ergiebt sich dann, indem man mittels (20) die y_i aus der Funktion $\varphi(\psi_1\ ..\ \psi_{n-p})$ eliminirt.

86. Wir wollen das erhaltene Resultat durch eine geometrische Betrachtung[1]) erläutern.

Die p Gleichungen

$$(26) \qquad x_1 = x_1^0\ ..\ x_p = x_p^0$$

definiren im Raum $R_n(x_1\ ..\ x_n)$ eine $n-p$-fach ausgedehnte ebene Punktmannigfaltigkeit, die mit A bezeichnet werde. Es sei P ein beliebiger auf A gelegener Punkt mit den Koordinaten $x_1^0\ ..\ x_n^0$. Ist P hinsichtlich des Jacobi'schen Systems (5) von allgemeiner Lage, d. h. sind alle a_{ik} an der Stelle x_i^0 regulär, so geht durch P eine und nur eine Integral-μ_p des unbeschränkt integrabeln Systems (6), oder, was dasselbe besagt, eine und nur eine Charakteristik C_p des Jacobi'schen Systems (5) hindurch. Diese C_p ist definirt durch die Gleichungen

$$(27) \qquad x_{p+i}^0 = h_i(x_1 - x_1^0\ ..\ x_n - x_n^0) \quad (i = 1\ ..\ n-p).$$

Verstehen wir unter $y_2\ ..\ y_p$ willkürliche Parameter, so stellen die Gleichungen

$$(28) \qquad x_k - x_k^0 = y_k(x_1 - x_1^0) \qquad (k = 2, ..\ p)$$

ein System von $p-1$-fach unendlich vielen ebenen, $n-p+1$-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten μ_{n-p+1} dar, die sämtlich die Mannigfaltigkeit A enthalten. Wir können dieses System als ein

1) Vgl. Lie Math. Ann. 9.

„*Büschel*“, die Mannigfaltigkeit A als dessen „*Axe*“, endlich die Gröſsen $y_2 \,.\,.\, y_p$ als die „*Parameter*“ des Büschels bezeichnen. Es sei nun E irgend eine der ∞^{p-1} Mannigfaltigkeiten (28); unter $y_2 \,.\,.\, y_p$ wollen wir also für den Augenblick bestimmte numerische Werte verstehen. Setzen wir noch zur Abkürzung

$$(29) \qquad x_1 - x_1^0 = y_1$$

so können wir die Gröſsen

$$(30) \qquad y_1,\; x_{p+1} \,.\,.\, x_n$$

als Koordinaten eines beliebigen Punktes von E interpretiren: wir können E geradezu als einen $n - p + 1$-fach ausgedehnten *Raum* mit den Punktkoordinaten (30) betrachten. Der Raum E schneidet nun die durch P gehende Charakteristik C_p nach einer, natürlich durch P gehenden, *einfach* ausgedehnten Mannigfaltigkeit („*Kurve*“); in der That stellen ja die Gleichungen (27) (28) zusammen ein $n - 1$-gliedriges Gleichungensystem dar. Die Definitionsgleichungen dieser Kurve lauten, in Punktkoordinaten des Raums E geschrieben, folgendermaſsen:

$$(31) \quad x^0_{p+i} = h_i(y_1, y_1 y_2 \,.\,.\, y_1 y_p, x_{p+1} - x^0_{p+1} \,.\,.\, x_n - x_n^0) \quad (i = 1 \,.\,.\, n - p).$$

Wir erhalten auf diese Weise, entsprechend den ∞^{n-p} Lagen des Punktes P auf der Axe A, im Raume E ein System von $n - p$-fach unendlich vielen Kurven, die sich andererseits als Integralkurven eines ganz bestimmten Systems von $n - p$ gewöhnlichen Differentialgleichungen in den Variabeln (30) deuten lassen; dieses simultane System ist nun offenbar das System (24), wie sich sofort daraus ergiebt, daſs die Gleichungen (6) in dieses System übergehen, wenn man darin die $x_1 \,.\,.\, x_p$ durch ihre aus (28) (29) oder auch aus (20) folgenden Ausdrücke ersetzt, und $y_2 \,.\,.\, y_p$ als Konstante behandelt.

Aus dieser Betrachtung folgt nun wieder wie oben, daſs die rechten Seiten von (31) mit den Hauptintegralen ψ_i der partiellen Differentialgleichung (23) hinsichtlich $y_1 = 0$ identisch sind, und daſs umgekehrt aus den letzteren Integralen durch Elimination der y_i mittels (20) die Hauptintegrale des Jacobi'schen Systems hervorgehen. Diese Elimination gestattet aber jetzt eine anschauliche geometrische Deutung. Denkt man sich nämlich unter Festhaltung des Punktes P den Parametern $y_2 \,.\,.\, y_p$ alle möglichen Werte beigelegt, so durchläuft die Mannigfaltigkeit E der Reihe nach alle Mannigfaltigkeiten des Büschels (28), m. a. W., sie dreht sich um die Axe A, wobei sie ∞^{p-1} Lagen annimmt. In jeder dieser Lagen enthält sie eine gewisse Kurve, nämlich die durch P gehende Integralkurve des zugehörigen simultanen Systems (25); *man erhält solcherweise* ∞^{p-1} *von* P *auslaufende Kurven, welche die durch* P *gehende Charakteristik* C_p *des Jacobi'schen Systems* (5) *erzeugen.*

Wählt man auf der Axe A eine $n-p-1$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit M, bestehend aus allen Punkten $P(x_1^0 \,.\,.\, x_n^0)$, die der Relation

$$\varphi(x_{p+1}^0 \,.\,.\, x_n^0) = 0 \tag{32}$$

genügen, so bilden die bezw. durch die Punkte von M hindurchgehenden Integralkurven des Systems (25) eine in E gelegene μ_{n-p}. Diese μ_{n-p} erzeugt, wenn E innerhalb des Büschels (28) alle ∞^{p-1} Lagen annimmt, eine *Integralfläche* des Jacobi'schen Systems (5), diejenige nämlich, welche durch die Gleichung

$$\varphi(h_1 h_2 \,.\,.\, h_{n-p}) = 0$$

dargestellt wird (Art. 69). Wesentliche Voraussetzung dabei ist, dafs die Gleichung (32) von $y_2 \,.\,.\, y_p$ vollkommen unabhängig, d. h. also, dafs die Mannigfaltigkeit M für alle Mannigfaltigkeiten E des Büschels (28) dieselbe sei.

87. Ist $\varphi(y_1 y_2 \,.\,.\, y_p x_{p+1} \,.\,.\, x_n)$ ein Integral der Gleichung (23), das an der Stelle

$$y_1 = 0,\; x_{p+1} = x_{p+1}^0 \,.\,.\, x_n = x_n^0 \tag{33}$$

regulär ist, und vermöge $y_1 = 0$ in eine von $y_2 \,.\,.\, y_p$ unabhängige Funktion $\omega(x_{p+1} \,.\,.\, x_n)$ übergeht, dann und nur dann ist φ eine gewöhnliche Potenzreihe der n Gröfsen (22), mit Koeffizienten, die von den Parametern $y_2 \,.\,.\, y_p$ nicht abhängen; es genügt ferner auch den partiellen Differentialgleichungen (25), verwandelt sich also, wenn man die y_i mittels (20) durch die x_i ausdrückt, in ein an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ reguläres Integral $f(x_1 \,.\,.\, x_n)$ des ursprünglichen Jacobi'schen Systems (5), und geht vermöge $x_1 = x_1^0 \,.\,.\, x_p = x_p^0$ in ω über.

Diese Behauptungen folgen unmittelbar aus der Zusammenstellung der folgenden drei Thatsachen: 1) das Jacobi'sche System (5) besitzt ein und nur ein Integral f mit den angegebenen Eigenschaften; 2) das Integral f verwandelt sich durch die Transformation (20) in eine Lösung φ des Jacobi'schen Systems (23) (25), die vermöge $y_1 = 0$ in ω übergeht und an der Stelle (33) regulär ist; 3) die Gleichung (23) besitzt ein und nur ein Integral φ mit diesen Eigenschaften.

Kennt man nun eine Lösung φ der Gleichung (23), derart, dafs die Funktion $\varphi(0, y_2 \,.\,.\, y_p x_{p+1} \,.\,.\, x_n)$ von den Parametern $y_2 \,.\,.\, y_p$ nicht unabhängig ist, aber mindestens eine der Variabeln x_{p+i} wirklich enthält, so fragt es sich, welchen Nutzen man aus dieser Kenntnis für die Integration des Jacobi'schen Systems (5) ziehen kann.

Es seien $\psi_1 \,..\, \psi_{n-p}$, wie früher, die (unbekannten) Hauptintegrale von (23) hinsichtlich $y_1 = 0$; dann läfst sich φ in folgender Weise darstellen:

$$\varphi = \varphi(0, y_2 \,..\, y_p, \psi_1 \,..\, \psi_{n-p}).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält der Voraussetzung nach mindestens eine der Gröfsen ψ_ι etwa ψ_1; durch Auflösung nach ψ_1 erhalte man:

$$\psi_1 = \chi_1(0, y_2 \,..\, y_p, x_{p+1} \,..\, x_n, \psi_2 \,..\, \psi_{n-p}). \tag{34}$$

Ist die Funktion χ_1 von den ψ frei, so haben wir das Hauptintegral ψ_1 von (23), und damit eine Lösung von (5) gefunden; im entgegengesetzten Falle beachten wir, dafs alle ψ auch den partiellen Differentialgleichungen (23) (25) genügen, dafs also, wenn die rechten Seiten dieser Gleichungen mit $Y_1 f \,..\, Y_p f$ bezeichnet werden:

$$Y_\iota \psi_1 = Y_\iota \chi_1 \equiv \frac{\partial \chi_1}{\partial y_i} + \sum_{p+1}^{n} {}_h \frac{\partial \chi_1}{\partial x_h} Y_i x_h = 0 \quad (i = 2 \,..\, p). \tag{35}$$

Der Ausdruck $Y_1 \chi_1$ verschwindet identisch, da χ_1 eine Funktion der Gröfsen $y_2 \,..\, y_p, \varphi, \psi_2 \,..\, \psi_{n-p}$ allein ist.

Die Relationen (35) sind Gleichungen in den Variabeln

$$y_1 \,..\, y_p, x_{p+1} \,..\, x_n, \psi_2 \,..\, \psi_{n-p} \tag{36}$$

und verwandeln sich in Identitäten, wenn man die ψ durch ihre Ausdrücke in $y_1 \,..\, y_p x_{p+1} \,..\, x_n$ ersetzt denkt. Enthalten also die Gleichungen (35) die Gröfsen ψ_i überhaupt nicht, so sind sie identisch erfüllt, und es ist dann χ_1 ein gemeinsames Integral des Jacobi'schen Systems (23) (25), wenn man die ψ durch beliebige Konstante ersetzt, liefert also nach Elimination der y_i mittels (20) eine Lösung des ursprünglich gegebenen Jacobi'schen Systems (5). Im entgegengesetzten Falle läfst sich mindestens eine der Gleichungen (35) nach einer der Gröfsen ψ_i etwa nach ψ_2 auflösen; es sei

$$\psi_2 = \chi_2(y_1 y_2 \,..\, y_p, x_{p+1} \,..\, x_n, \psi_3 \,..\, \psi_{n-p})$$

diese Auflösung. Dann bilden wir die Gleichungen

$$Y_i \chi_2 \equiv \frac{\partial \chi_2}{\partial y_i} + \sum_{p+1}^{n} {}_h \frac{\partial \chi_2}{\partial x_h} Y_i x_h = 0 \quad (i = 1, 2, \,..\, p). \tag{37}$$

Es sind dies Relationen in den Gröfsen

$$y_1 y_2 \,..\, y_p x_{p+1} \,..\, x_n \psi_3 \,..\, \psi_{n-p};$$

enthalten sie die ψ nicht, so sind sie identisch erfüllt, und χ_2 liefert eine gemeinsame Lösung des Gleichungensystems (23) (25), also auch des Jacobi'schen Systems (5), wenn man die $\psi_3 \,..\, \psi_{n-p}$ durch irgend welche Konstante ersetzt. Im entgegengesetzten Falle löse man eine der Relationen (37) etwa nach ψ_3 auf etc. Solcherweise gelangt man schliefslich entweder zu einer Relation der Form:

$$(38) \qquad \psi_k = \chi_k(y_1 \,..\, y_p x_{p+1} \,..\, x_n,\ \psi_{k+1},\ \psi_{k+2} \,..\, \psi_{n-p})$$

derart, dafs alle Relationen

$$Y_i \chi_k = \frac{\partial \chi_k}{\partial y_i} + \sum_{p+1}^{n} {}_h \frac{\partial \chi_k}{\partial x_h} Y_i x_h = 0 \quad (i = 1 \,..\, p)$$

von $\psi_{k+1} \,..\, \psi_{n-p}$ unabhängig sind, also identisch bestehen, und es ist dann χ_k, wenn man darin die ψ_i durch irgend welche Konstanten ersetzt, eine Lösung des Jacobi'schen Systems (23) (25), liefert also ein Integral von (5), wenn die y mittels (20) daraus eliminirt werden; oder man erhält ein System von $n - p$ Gleichungen der Form (38), welche alle ψ_k als Funktionen der Variabeln $y_1 \,..\, y_p x_{p+1} \,..\, x_n$ darzustellen erlauben, und findet damit alle Hauptintegrale der Gleichung (23), mithin auch alle Hauptintegrale $h_1 \,..\, h_{n-p}$ des Jacobi'schen Systems (5).

Damit ist der folgende wichtige Satz bewiesen:

Kennt man von der partiellen Differentialgleichung

$$(23) \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} + \sum_{1}^{n-p} {}_h ([a_{1,p+h}] + y_2 [a_{2,p+h}] + \cdots + y_p [a_{p,p+h}]) \frac{\partial f}{\partial x_{p+h}} = 0$$

eine beliebige Lösung $\varphi(y_1 \,..\, y_p x_{p+1} \,..\, x_n)$, die nicht eine Funktion der Parameter $y_2, y_3 \,..\, y_p$ allein ist, so kann man daraus mindestens eine Lösung des Jacobi'schen Systems

$$(5) \qquad A_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{1}^{n-p} {}_h a_{i,p+h} \frac{\partial f}{\partial x_{p+h}} = 0 \qquad (i = 1 \,..\, p).$$

durch blofse Differentiationen und Eliminationen ableiten.

88. Nach dem vorigen Satze erfordert die Ermittelung *eines* Integrals eines p-gliedrigen vollständigen Systems in n Variabeln aufser gewissen Differentiationen und Eliminationen eine Operation $n - p$ (Art. 51). Kennt man von einem p-gliedrigen vollständigen System k unabhängige Lösungen, und führt man dieselben statt ebensovieler Variabeln x als neue Independente ein, so verwandelt sich das System in ein p-gliedriges vollständiges System mit nur $n - k$ Variabeln; daraus folgt:

Sind von einem p-gliedrigen vollständigen System in n Independenten k unabhängige Lösungen von vorneherein bekannt, so erfordert die Aufsuchung eines weiteren Integrals eine Operation $n-p-k$, und die Ermittelung der übrigen $n-p-k-1$ unabhängigen Lösungen je eine Operation

$$n-p-k-1,\; n-p-k-2,\; .\,.\; 3,\; 2,\; 1.$$

89. Wir wollen die Sätze dieses § durch zwei Beispiele erläutern.

1) Die Koeffizienten des Jacobi'schen Systems:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_4} + (x_1 x_2 - x_2^2 - x_4)\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4} - (2x_1 x_2 - x_1^2)\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_4} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$$

sind an der Stelle $0\,.\,.\,0$ regulär; wenden wir die Mayer'sche Transformation

$$x_1 = y_1;\; x_2 = y_1 y_2;\; x_3 = y_1 y_3 \tag{39}$$

an, so wird die erste der transformirten Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} - (2y_1 y_2 + y_3)\frac{\partial f}{\partial x_4} + (2y_1^2 y_2 - 3y_1^2 y_2^2 + y_1 y_3 - x_4)\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0.$$

Ihre Hauptintegrale hinsichtlich $y_1 = 0$ sind:

$$x_4 + y_1^2 y_2 + y_1 y_3;\; x_5 + y_1^3 y_2^2 + y_1 x_4;$$

also besitzt das gegebene Jacobi'sche System hinsichtlich $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Hauptintegrale:

$$x_4 + x_1 x_2 + x_3;\; x_5 + x_1(x_2^2 + x_4).$$

2) Auf das Jacobi'sche System:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_3 \frac{x_2 + x_5}{1 + x_1}\frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{x_2 + x_5}{1 + x_1}\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{x_3}{1 + x_1}\frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{x_1}{1 + x_1}\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} - (x_2 + x_5)\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$$

läßt sich die Mayer'sche Transformation (39) ebenfalls anwenden; man erhält dadurch die transformirten Gleichungen:

$$0 = (1 + y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} - (2y_1y_2y_3 + y_3x_5)\frac{\partial f}{\partial x_4} - (2y_1y_2 + x_5)\frac{\partial f}{\partial x_5}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{y_1^{\,2}y_3}{1 + y_1}\frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{y_1^{\,2}}{1 + y_1}\frac{\partial f}{\partial x_5} \equiv Y_2 f$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y_3} - y_1(y_1y_2 + x_5)\frac{\partial f}{\partial x_4} \equiv Y_3 f.$$

Die erste dieser Gleichungen besitzt das unmittelbar ersichtliche Integral:

$$\varphi \equiv x_4 - y_3x_5;$$

sind also ψ_1 und ψ_2 die Hauptintegrale dieser Gleichung hinsichtlich $y_1 = 0$, so hat man:

$$\varphi \equiv \psi_1 - y_3\psi_2;$$

oder also:

$$\psi_1 = x_4 - y_3x_5 + y_3\psi_2.$$

Hieraus folgt:

$$Y_2\psi_1 \equiv Y_2x_4 - y_3 \cdot Y_2x_5 \equiv 0$$

$$Y_3\psi_1 \equiv - x_5 - y_1(y_1y_2 + x_5) + \psi_2 = 0.$$

Man findet also:

$$\psi_2 \equiv x_5(1 + y_1) + y_1^{\,2}y_2$$

und hieraus

$$\psi_1 \equiv x_4 + y_1y_3x_5 + y_1^{\,2}y_2y_3.$$

Das ursprüngliche Jacobi'sche System besitzt darnach hinsichtlich $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Hauptintegrale:

$$x_4 + x_3(x_2 + x_5);\ x_5 + x_1(x_2 + x_5).$$

§ 6. **Exakte Gleichungen und exakte Differentiale.**

90. In diesem § sollen die Theorien des gegenwärtigen Kapitels für den Fall $p = n - 1$ noch besonders behandelt werden. Wir betrachten zunächst die Annahme $p = 2$, $n = 3$, d. h. den Fall einer einzigen Pfaff'schen Gleichung

$$\Delta \equiv a dx + b dy + c dz = 0, \tag{1}$$

die wir unter der Voraussetzung $c \not\equiv 0$ so schreiben wollen:

$$dz = H(xyz)dx + K(xyz)dy. \tag{2}$$

Das adjungirte System linearer partieller Differentialgleichungen lautet hier:

$$Xf \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + H\frac{\partial f}{\partial z} = 0;\quad Yf \equiv \frac{\partial f}{\partial y} + K\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Damit dieses System vollständig, die Gleichung (2) also „unbeschränkt integrabel“ oder „exakt“ sei, ist notwendig und hinreichend, daſs für jedes Wertsystem xyz:

$$0 = XK - YH = \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} + H\frac{\partial K}{\partial z} - K\frac{\partial H}{\partial z},$$

oder, was dasselbe sagt, daſs die Identität:

$$0 \equiv a\left(\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z}\right) + c\left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}\right)$$

bestehe. Sind dann die Funktionen H, K an der Stelle $x_0y_0z_0$ regulär, so besitzt das Jacobi'sche System (3) ein und nur ein an dieser Stelle reguläres Integral $\varphi(xyz)$, das sich vermöge der Substitution

$$(4) \qquad x = x_0,\ y = y_0$$

identisch auf z reduzirt, also die Form

$$\varphi \equiv z + \mathfrak{P}(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$$

besitzt, wobei die Potenzreihe $\mathfrak{P}$ vermöge (4) verschwindet. Ist jetzt $x_0y_0\bar{z}$ ein Wertsystem in der Umgebung von $x_0y_0z_0$, so liefert uns die Gleichung

$$(5) \qquad z = \bar{z} + \mathfrak{P}(x_0 - x,\ y_0 - y,\ \bar{z} - z_0)$$

diejenige Integralfunktion z des Mayer'schen Systems

$$\frac{\partial z}{\partial x} = H(xyz);\ \frac{\partial z}{\partial y} = K(xyz),$$

die sich vermöge (4) auf die vorgeschriebene Konstante $\bar{z}$ reduzirt. Ist $f(xyz)$ irgend ein an der Stelle $x_0y_0z_0$ reguläres Integral des Jacobi'schen Systems (3), so erhält man die Gleichung $z_0 = \varphi$, indem man die Relation

$$(6) \qquad f(xyz) = f(x_0y_0z_0)$$

hinsichtlich z_0 auflöst.

Deuten wir xyz als rechtwinklige Koordinaten eines Raumes R_3, so stellen uns die Gleichungen

$$f(xyz) = C$$

die einfach unendlich vielen Integralflächen der Pfaff'schen Gleichung (1) dar. Der Punkt $P(x_0y_0z_0)$ heiſst ein Punkt „allgemeiner Lage“ wenn die Funktionen H, K an der Stelle $x_0y_0z_0$ regulär sind. Durch jeden solchen Punkt P geht eine und nur eine Integralfläche; sie wird durch (6) dargestellt. Denken wir uns nun durch P die zur z-Axe parallele Gerade gezogen, und betrachten wir das Ebenenbüschel, das diese Gerade zur Axe hat. Eine beliebige Ebene E dieses Büschels hat die Gleichung

(7) $$y - y_0 = y'(x - x_0)$$

wo y' einen Parameter bezeichnet. Setzen wir noch

(8) $$x - x_0 = x'$$

so können wir x' und z als Koordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene E deuten; offenbar sind dann

$$\xi = \frac{x'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \zeta = z$$

gewöhnliche cartesische Koordinaten in der Ebene E, wobei als ξ-Axe die Schnittlinie von E mit der xy-Ebene, als ζ-Axe die durch P gehende, zur z-Axe parallele Gerade genommen ist. Es sei nun $P'(x_0 y_0 \bar{z})$ ein beliebiger, auf dieser Geraden gelegener Punkt allgemeiner Lage. Dann schneidet die durch P' gehende Integralfläche von (3) die Ebene E nach einer durch P' gehenden Curve; wir erhalten so, entsprechend den ∞^1 Lagen des Punktes P' einfach unendlich viele Kurven in der Ebene E. Es sind dies die Integralkurven der gewöhnlichen Differentialgleichung

(9) $$\frac{dz}{dx'} = H(x_0 + x', y_0 + x'y', z) + y' \cdot K(x_0 + x', y_0 + x'y', z)$$

die aus (2) entsteht, wenn man darin mittels (7) (8), d. h. also mittels der Formeln

(10) $$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + x'y'$$

x, y durch x', y' ausdrückt, und y' als Konstante behandelt.

Ist jetzt

$$\omega(x'y'z) = \text{konst.}$$

die allgemeine Integralgleichung von (9), so stellt die Gleichung

(11) $$\omega(x'y'z) = \omega(0, y', \bar{z})$$

in den Koordinaten x', z die durch P' gehende Integralkurve von (9) dar. Löst man die zuletzt hingeschriebene Gleichung nach $\bar{z}$ auf:

$$\bar{z} = \psi(x', y'z)$$

so ist ψ das Hauptintegral hinsichtlich $x' = 0$ der zu (9) adjungirten Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x'} + [H(x_0 + x', y_0 + x'y', z) + y'K(x_0 + x', ..)] \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

also eine gewöhnliche Potenzreihe der drei Gröfsen $x', x'y', z - z^0$, und reduzirt sich unmittelbar auf das oben genannte Integral φ des Jacobi'schen Systems (3), wenn man die $x'y'$ mittels (10) eliminirt, oder geometrisch ausgedrückt: Läſst man, ohne den Punkt P' zu ändern, die Ebene E innerhalb des Büschels mit der Axe (4) der Reihe nach alle ∞^1 Lagen annehmen, so wird auch die von P' auslaufende, durch (11) definirte Integralkurve der Gleichung (9) der Reihe nach ∞^1 Lagen durchlaufen, und auf diese Weise die durch P' gehende Integralfläche der exakten Gleichung (1) erzeugen.

91. Wir betrachten ferner eine exakte Gleichung in n Variabeln:

$$\Delta \equiv \sum_1^n a_i (x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) dx_i = 0 \tag{12}$$

die wir unter der Annahme $a_n \not\equiv 0$ und unter Gebrauch der Bezeichnungen

$$\alpha_k \equiv -\frac{a_k}{a_n} \qquad (k = 1 \cdot . \, n-1)$$

so schreiben wollen:

$$dx_n = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \cdot \cdot + \alpha_{n-1} dx_{n-1}. \tag{13}$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der unbeschränkten Integrabilität, die in Art. 81 angegeben wurden, können auch in der Form:

$$0 \equiv \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} + \alpha_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_n} - \alpha_i \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_n} \qquad (i, k = 1 \,.\,.\, n-1) \tag{14}$$

geschrieben werden. Sind diese Bedingungen erfüllt, und alle α_i an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ regulär, so reduzirt sich die Integration des Jacobi'schen Systems

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \alpha_i (x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, n-1) \tag{15}$$

auf die Integration einer einzigen gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{d x_n}{d y_1} = [\alpha_1] + y_2 [\alpha_2] + \cdot \cdot + y_{n-1} [\alpha_{n-1}], \tag{16}$$

worin x_n die unbekannte Funktion, y_1 die Independente, endlich $y_2 \,.\,.\, y_{n-1}$ Parameter bedeuten, und

$$[\alpha_i] \equiv \alpha_i (x_1^0 + y_1, \; x_2^0 + y_1 y_2, \; x_{n-1}^0 + y_1 y_{n-1}, \; x_n)$$

gesetzt wurde. Ist nämlich:

$$\omega (y_1 y_2 \cdot \cdot y_{n-1} x_n) = c$$

irgend eine Form der allgemeinen Integralgleichung von (16), und löst man die Relation

$$\omega(y_1 y_2 \ldots y_{n-1} x_n) = \omega(0, y_2 \ldots y_{n-1} x_n')$$

folgendermaſsen auf:

$$x_n' = \varphi'(y_1 \ldots y_{n-1}, x_n)$$

so verwandelt sich φ' direkt in das Hauptintegral φ des Jacobi'schen Systems (15) hinsichtlich $x_1 = x_1^0 \ldots x_{n-1} = x_{n-1}^0$, wenn man die y_i mittels der Formeln

$$x_1 - x_1^0 = y_1, \; x_k - x_k^0 = y_1 y_k \quad (k = 2 \ldots n-1)$$

eliminirt.

Ist f irgend ein Integral des Jacobi'schen Systems (15), d. h. also eine Funktion von φ allein, so bestehen Identitäten der Form:

$$a_i \equiv \varrho(x_1 x_2 \ldots x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1 \ldots n). \tag{17}$$

Man erkennt sonach, daſs der Pfaff'sche Ausdruck Δ, falls die Bedingungen (14) erfüllt sind, durch eine einzige Operation 1 auf die Form ϱdf gebracht werden kann; ist f gefunden, so ergiebt sich ϱ aus irgend einer der Gleichungen (17).

92. Die Integrabilitätsbedingungen (40) pag. 106 sind erfüllt, wenn die Identitäten

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} = 0 \quad (i, k = 1 \ldots n) \tag{18}$$

stattfinden. Jetzt ist aber nicht nur die Gleichung (12), sondern auch die folgende:

$$dz - a_1 dx_1 - \cdots - a_n dx_n = 0 \tag{19}$$

in der z eine $n+1^{\text{te}}$ Independente bedeutet, unbeschränkt integrabel, d. h. die adjungirten Gleichungen

$$X_i' f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (i = 1 \ldots n) \tag{20}$$

bilden ein vollständiges System, da ja

$$X_i' a_k - X_k' a_i \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \equiv 0.$$

Sind jetzt alle a_i an der Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ regulär, und verwandelt sich a_i vermöge der Substitution

$$x_1 = x_1^0 + y_1; \; x_2 = x_2^0 + y_1 y_2 \ldots x_n = x_n^0 + y_1 y_n \tag{21}$$

in $[a_i]$, so kommt die Integration von (19) auf diejenige der Gleichung

$$\frac{dz}{dy_1} = [a_1] + y_2[a_2] + \cdots + y_n[a_n] \tag{22}$$

hinaus. Nennt man die rechte Seite dieser Gleichung $\psi(y_1 \,.\,. y_n)$, so ist diejenige Integralfunktion von (22), die sich für $y_1 = 0$ auf die Konstante c reduzirt, durch die Gleichung

$$(23) \qquad z = \int_0^{y_1} \psi dy_1 + c \equiv \Psi + c$$

gegeben, wenn bei der Ausführung der Quadratur die $y_2 \,.\,. y_n$ als Konstante behandelt werden.

Die Funktionen $[a_\iota]$ sind der Annahme nach in folgender Form darstellbar:

$$[a_i] \equiv \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \,.\,. \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} c^{(i)}_{\alpha_1 \alpha_2 \quad \alpha_n} y_1^{\alpha_1} (y_1 y_2)^{\alpha_2} \,.\,. (y_1 y_n)^{\alpha_n}.$$

Deutet man nun die Werte der komplexen Variabeln $y_1 = \xi + \sqrt{-1} \cdot \eta$ in bekannter Weise als Punkte einer Ebene mit den cartesischen Koordinaten ξ, η, und verbinden wir die beiden Punkte 0 und y_1 dieser Ebene durch eine beliebige Kurve (c), die lauter Punkte y_1' von der Eigenschaft enthält, dafs die Potenzreihen $[a_i]$ an der Stelle

$$y_1', \; y_1' y_2 \,.\,. y_1' y_n$$

regulär sind, so hat das Integral (23) bekanntlich einen ganz bestimmten Sinn, wenn (c) als Integrationsweg gewählt wird; auch kann man die Kurve (c), immer unter Beobachtung der soeben ausgesprochenen Bedingung, sonst aber beliebig variiren, ohne das Resultat der Integration zu ändern. Man erhält durch gliedweise Integration

$$\int_0^{y_1} [a_i] dy_1 \equiv \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \,.\,. \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \gamma^{(i)}_{\alpha_1 \quad \alpha_m} y_1 \cdot y_1^{\alpha_1} (y_1 y_2)^{\alpha_2} \,.\,. (y_1 y_n)^{\alpha_n} \equiv \Psi_i$$

wenn gesetzt wird:

$$\left(1 + \sum \alpha_i\right) \gamma^{(i)}_{\alpha_1 \,.\,\alpha_m} = c^{(i)}_{\alpha_1 \,.\,.\, \alpha_m} \quad (\alpha_1 = 0, \,.\,. \infty; \,.\,. \alpha_n = 0, \,.\,. \infty).$$

Daher ist die Funktion

$$\Psi \equiv \Psi_1 + y_2 \Psi_2 + \cdot\cdot + y_n \Psi_n$$

eine gewöhnliche Potenzreihe der n Gröfsen

$$y_1, \, y_1 y_2, \,.\,. \, y_1 y_n,$$

und die Koeffizienten dieser Potenzreihe hängen von $y_2 \,.\,. y_n$ nicht ab; also verwandelt sich Ψ vermöge (21) in eine an der Stelle $x_1^0 \,.\,. x_n^0$ reguläre Funktion von $x_1 \,.\,. x_n$ und man hat den Satz:

Sind die Bedingungen (18) *erfüllt, und alle a_ι an der Stelle $x_1^0 \,.\,. x_n^0$ regulär, so giebt es eine und nur eine Funktion $f(x_1 \,.\,. x_n)$, die an jener Stelle regulär ist, daselbst den vorgeschriebenen Wert c annimmt, und der Gleichung*

$$(24) \qquad df \equiv a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_n dx_n$$

identisch genügt.

Der Satz folgt auch leicht aus der Existenz eines Hauptintegrals des Jacobi'schen Systems (20).

Natürlich sind die Bedingungen (18) zum Bestehen einer Identität der Form (24) auch notwendig.

93. Wenn die Matrix

$$(25) \qquad \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdot\,\cdot & a_n \\ 0 & a_{12} & a_{13} & \cdot\,\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdot\,\cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot\,\cdot & 0 \end{matrix} \right\| \qquad \left(a_{ik} \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right)$$

den Rang *zwei* besitzt, so gilt nach Art. 27 dasselbe von der Matrix (39) pag. 106, also läfst sich der Pfaff'sche Ausdruck Δ mit Hülfe einer einzigen Operation 1 auf die Form ϱdf bringen. Die Funktionen ϱ und f sind offenbar von einander unabhängig; denn wäre ϱ in der Form $\psi(f)$ darstellbar, so liefse sich eine Funktion $F(f)$ derart bestimmen, dafs

$$\Delta \equiv \psi(f)df \equiv dF$$

d. h. Δ wäre ein exaktes Differential, es verschwänden also alle a_{ik}, und die Matrix (25) besäfse den Rang *eins.* Damit ist gezeigt:

„Besitzt die Matrix (25) *den Rang 2, dann und nur dann läfst sich der Pfaff'sche Ausdruck Δ auf die „Normalform" $\varrho \cdot df$ bringen, in der die beiden Funktionen ϱ und f von einander unabhängig sind."*

„Besitzt die Matrix (25) *den Rang 1, dann und nur dann läfst sich Δ auf die Form df bringen."*

Hat man in dem zuerst genannten Fall irgendwie zwei verschiedene Normalformen ϱdf und $\sigma d\varphi$ des Pfaff'schen Ausdrucks Δ ermittelt, so folgt aus der Identität

$$\varrho\, df \equiv \sigma d\varphi, \quad \text{oder} \quad \varrho \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

ohne weiteres das Verschwinden aller 2-reihigen Determinanten der zu den Funktionen f und φ gehörigen Funktionalmatrix, d. h. φ ist eine Funktion von f allein.

Aus einer speziellen Normalform $\varrho\, df$ des Pfaff'schen Ausdrucks Δ erhält man also die allgemeinste Normalform $\sigma\, d\varphi$, wenn man unter φ eine beliebige Funktion $F(f)$, unter σ den Quotienten $\varrho : \frac{dF}{df}$ versteht.

Die Verallgemeinerung der Resultate dieser Nr. für den Fall, dafs der Rang $\varkappa$ der Matrix (25) beliebig ist, bildet einen der Hauptgegenstände der Theorie des Pfaff'schen Problems.

94. Eine Funktion μ von der Eigenschaft, dafs der Ausdruck $\mu\,\Delta$ ein exaktes Differential ist, heifst ein *„Euler'scher Multiplikator"* der exakten Gleichung $\Delta = 0$. Damit μ ein Euler'scher Multiplikator sei, ist also notwendig und hinreichend, dafs die Identitäten:

$$0 \equiv \frac{\partial(\mu a_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\mu a_k)}{\partial x_i} \equiv \mu a_{ik} - a_k \frac{\partial \mu}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \quad (i, k = 1, 2 \,..\, n)$$

erfüllt sind. Ist $\varrho\, df$ eine beliebige Normalform von Δ, so ist $\frac{1}{\varrho}$ ein Euler'scher Multiplikator. Ist der Quotient zweier verschiedener Multiplikatoren μ, μ' nicht konstant, so kann die allgemeine Integralgleichung der exakten Gleichung $\Delta = 0$ in der Form

$$\frac{\mu}{\mu'} = \text{konst.}$$

geschrieben werden.

Der Euler'sche Multiplikator der exakten Gleichung $\Delta = 0$ ist nichts anderes als der Lie'sche Multiplikator des adjungirten, $n-1$-gliedrigen vollständigen Systems (Art. 63).

Kapitel III.

Die Klasse eines Pfaff'schen Ausdrucks.

§ 1. Die Invarianz der Zahlen $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

95. Zwei Pfaff'sche Ausdrücke in gleichviel Variabeln:

$$(1) \qquad \Delta \equiv \sum_1^n {}^i\, a_i(x_1 x_2 \,..\, x_n)\, dx_i$$

$$(2) \qquad \Delta \equiv \sum_1^n {}^i\, b_i(y_1 y_2 \,..\, y_n)\, dy_i$$

heifsen „äquivalent", wenn eine Variabelntransformation

$$(3) \qquad y_i = \varphi_i(x_1 x_2 \ldots x_n) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

$$(4) \qquad x_i = \psi_i(y_1 y_2 \ldots y_n)$$

existirt, welche den Ausdruck $\varDelta$ in $\varDelta'$ überführt, vermöge deren also die Identität

$$(5) \qquad \varDelta' \equiv \varDelta$$

stattfindet. Es entsteht die Frage:

Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dafs zwei Pfaff'sche Ausdrücke $\varDelta$ und $\varDelta'$ äquivalent sind? oder etwas anders ausgedrückt: Welche Eigenschaften eines Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$ bleiben bei jeder beliebigen Punkttransformation des Raumes $R_n(x_1 x_2 \ldots x_n)$ invariant?

96. Um zunächst eine notwendige Bedingung für die Äquivalenz zweier Ausdrücke $\varDelta$ und $\varDelta'$ aufzustellen, betrachten wir gleichzeitig die drei *fundamentalen Matrices*

$$\text{(A)} \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|; \quad \text{(B)} \left\| \begin{matrix} 0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ -a_1 & 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ -a_2 & a_{21} & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ -a_n & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|;$$

$$\text{(C)} \left\| \begin{matrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|,$$

in denen die a_{ik}, wie bisher, die Bedeutung

$$a_{ik} \equiv -a_{ki} \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$$

haben, und die wir in diesen Vorlesungen immer als die „Matrices (A) (B) (C)“ bezeichnen wollen.

Es sei $\varkappa$ der Rang der Matrix (A), d. h. also die Ordnung der höchsten, nicht identisch verschwindenden Unterdeterminanten von (A); diese Zahl $\varkappa$ heifst die „*Klasse des Pfaff'schen Ausdrucks* $\varDelta$“. Die Rangzahlen der beiden schiefsymmetrischen Matrices (B) und (C) sollen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ genannt werden; sie sind nach Art. 27 durch Angabe von $\varkappa$ eindeutig bestimmt; ist nämlich $\varkappa$ einer geraden Zahl 2λ gleich, so ist $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$; ist aber $\varkappa = 2\lambda - 1$, so ist $\varkappa_1 = 2\lambda$, $\varkappa_2 = 2\lambda - 2$, und immer hat man

$$2\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2.$$

Wie man die Zahlen $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ermittelt, falls der Pfaff'sche Ausdruck $\varDelta$ beliebig gegeben ist, wurde in Art. 30 auseinandergesetzt.

97. Um die Symbolik der Theorie der Pfaff'schen Aggregate gebrauchen zu können, führen wir wie früher die Bezeichnungen ein:

$$(i, k) \equiv -(k, i) \equiv a_{ik} \qquad (i, k = 1 \,..\, n);$$

außerdem setzen wir noch:

$$(0, i) \equiv -(i, 0) \equiv a_i \quad (i = 1 \,..\, n).$$

Die Bedeutung des Pfaff'schen Aggregats

$$(k_1 k_2 \,..\, k_{2\nu}),$$

worin die k_i irgendwelche Zahlen der Reihe $0, 1, \,..\, n$ bedeuten, ist dann aus dem § 2 des ersten Kapitels ohne weiteres zu entnehmen.

Ist nun zunächst die Klasse $\varkappa$ des Ausdrucks $\varDelta$ gleich 2λ, so können wir nach Art. 28, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, die Voraussetzung machen, daß insbesondere das Pfaff'sche Aggregat:

$$P \equiv (1, 2, \,..\, 2\lambda - 1, 2\lambda)$$

nicht identisch null sei; nötigenfalls läßt sich dies ja immer dadurch erreichen, daß wir die Variabeln x des Problems von vorneherein passend numeriren. Ferner dürfen wir annehmen, daß nicht alle Pfaff'schen Aggregate

$$\Pi_{1,0}, \quad \Pi_{2,0}, \quad .. \quad \Pi_{2\lambda,0} \quad \text{(vgl. pag. 38)}$$

identisch verschwinden. In der That hat man ja nach Art. 31 die Identitäten

$$\sum_1^{2\lambda}{}_s\, a_{is} \Pi_{s0} + a_i \;\; P \equiv 0 \quad (i = 1 \,..\, n).$$

Verschwänden also alle Aggregate Π_{s0}, so verschwänden entweder alle a_i oder die Funktion P identisch. Wir können nun offenbar, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, insbesondere die Funktion

$$\Pi_{2\lambda,0} \equiv (1, 2, \,..\, 2\lambda - 1, 0)$$

als nicht identisch verschwindend voraussetzen.

Der Fall $\varkappa = 2\lambda$ ist also nach Art. 28 vollständig charakterisirt durch die Bedingungen:

$$(6) \qquad \begin{cases} P \not\equiv 0; \quad \Pi_{2\lambda,0} \not\equiv 0 \\ (1, 2, \,..\, 2\lambda, \varrho, \sigma) \equiv 0; \; \varrho, \sigma = 0, 2\lambda + 1, 2\lambda + 2, \,..\, n. \end{cases}$$

Ist ferner $\varkappa = 2\lambda - 1$, so dürfen wir nach Art. 28 die beiden Aggregate:

$$P' \equiv (1, 2, \ldots 2\lambda - 2)$$
$$Q \equiv (0, 1, \ldots 2\lambda - 2, 2\lambda - 1)$$

als nicht identisch verschwindend annehmen. *Darnach ist der Fall* $\varkappa = 2\lambda - 1$ *durch die Bedingungen*

$$(7) \qquad \begin{cases} P' \mathrel{\equiv\!\!\!|\!\!\!\equiv} 0; \quad Q \mathrel{\equiv\!\!\!|\!\!\!\equiv} 0; \\ (1, 2, \ldots 2\lambda - 2, \varrho, \sigma) \equiv 0; \; \varrho, \sigma = 2\lambda - 1, 2\lambda, \ldots n \end{cases}$$

vollkommen charakterisirt.

Die Zahl $\varkappa$ ist natürlich niemals gröfser als die Variabelnzahl n. Im Falle $\varkappa = n$ unterliegen die Funktionen a_i und die aus ihnen abgeleiteten Funktionen a_{ik} gar keinen Bedingungs*gleichungen*; ein Pfaff'scher Ausdruck $\varDelta$, dessen Klasse gleich der Variabelnzahl ist, heifst aus diesem Grunde ein „bedingungsloser“ Ausdruck; ist dagegen $\varkappa < n$, so wird $\varDelta$ ein „bedingter“ Ausdruck genannt.

98. Wir behaupten nun: *Die Klasse* $\varkappa$ *ist eine Invariante des Pfaff'schen Ausdrucks* $\varDelta$ *gegenüber beliebigen Punkttransformationen,* m. a. W.: *verwandelt sich* $\varDelta$ *vermöge der Variabelntransformation* (3) (4) *in* $\varDelta'$, *so besitzt* $\varDelta'$, *als Pfaff'scher Ausdruck in den neuen Variabeln* y_i *betrachtet, dieselbe Klasse wie* $\varDelta$.

Um unsere Behauptung zu beweisen, beachten wir die aus (5) folgenden Gleichungen:

$$(8) \qquad a_i \equiv \sum_1^n {}^h b_h \frac{\partial y_h}{\partial x_i} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

die identisch bestehen, wenn die y_i durch die Funktionen φ_i ersetzt werden. Wir erhalten hieraus:

$$(9) \qquad \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \equiv \sum_1^n {}^h \sum_1^n {}^l \frac{\partial b_h}{\partial y_l} \frac{\partial y_h}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_k} + \sum_1^n {}^h b_h \frac{\partial^2 y_h}{\partial x_i \partial x_k}$$

$$(10) \qquad \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \equiv \sum_1^n {}^h \sum_1^n {}^l \frac{\partial b_l}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_k} + \sum_1^n {}^h b_h \frac{\partial^2 y_h}{\partial x_i \partial x_k}$$

$$(11) \qquad a_{ik} \equiv \sum_1^n {}^h \sum_1^n {}^l b_{hl} \frac{\partial y_h}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_k},$$

wenn gesetzt wird

$$b_{hl} \equiv \frac{\partial b_h}{\partial y_l} - \frac{\partial b_l}{\partial y_h}.$$

Aus (11) folgt, dafs die Matrix (C) durch zeilenweise Komposition (pag. 42, Anm.) der folgenden beiden Schemata entsteht:

$$
(12) \qquad \left\| \begin{matrix} \sum_l b_{1l}\frac{\partial y_l}{\partial x_1}, & \sum_l b_{2l}\frac{\partial y_l}{\partial x_1} & \cdots & \sum_l b_{nl}\frac{\partial y_l}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_l b_{1l}\frac{\partial y_l}{\partial x_n}, & \sum_l b_{2l}\frac{\partial y_l}{\partial x_n} & \cdots & \sum_l b_{nl}\frac{\partial y_l}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|
$$

$$
(13) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|.
$$

Es sei D diejenige ν-reihige Unterdeterminante von (C), in deren Elementen sich die Zeilen mit den Indices $i_1 i_2 \ldots i_\nu$ und die Spalten $k_1 k_2 \ldots k_\nu$ schneiden. Dann entsteht D durch zeilenweise Komposition der beiden ν-zeiligen Schemata:

$$
(14) \qquad \left\| \begin{matrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_l b_{1l}\frac{\partial y_l}{\partial x_{i_s}}, & \sum_l b_{2l}\frac{\partial y_l}{\partial x_{i_s}} & \cdots & \sum_l b_{nl}\frac{\partial y_l}{\partial x_{i_s}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\| \quad (s = 1 \ldots \nu);
$$

$$
(15) \qquad \left\| \begin{matrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_{k_s}} & \frac{\partial y_2}{\partial x_{k_s}} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{k_s}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\| \quad (s = 1 \ldots \nu).
$$

Nach einem bekannten Determinantensatz ist also D gleich der Summe aller Produkte aus je einer ν-zeiligen Determinante von (14) in die entsprechende ν-zeilige Determinante von (15). Das Schema (14) entsteht nun aber seinerseits durch Zeilenkomposition der folgenden beiden:

$$
(C') \qquad \| b_{ik} \| \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)
$$

$$
(16) \qquad \left\| \begin{matrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_s}} & \frac{\partial y_2}{\partial x_{i_s}} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{i_s}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\| \quad (s = 1 \ldots \nu).
$$

Jede ν-reihige Determinante der Matrix (14) ist also nach dem soeben angeführten Determinantensatz gleich einer Summe von Produkten aus je einer ν-reihigen Determinante von (16) in eine ν-reihige Determinante von (C'). Schließlich erkennen wir, daß D gleich einer Summe von Produkten aus je drei Faktoren ist; der erste Faktor ist jedesmal eine ν-reihige Determinante der Matrix (C'), die beiden andern Faktoren sind ν-reihige Determinanten, die dem Schema (13) entnommen werden. Verschwinden also alle ν-reihigen Determinanten von (C′) identisch, so verschwinden auch alle ν-reihigen Determinanten von (C).

Aus der Identität (5) folgen aber auch die Gleichungen

$$(17)\qquad b_i \equiv \sum_1^n{}^h a_h \frac{\partial x_h}{\partial y_i} \qquad (i = 1 \,..\, n),$$

welche identisch bestehen, wenn man darin die x_i durch die rechten Seiten der Gleichungen (3) ersetzt. Demnach bleiben die Formeln (8)—(11) richtig, wenn man darin überall die Buchstaben a mit b, und x mit y vertauscht. Wir schliefsen daraus genau wie vorhin: Verschwinden alle ν-reihigen Determinanten von (C), so gilt dasselbe auch von allen ν-reihigen Determinanten von (C′).

Die beiden Matrices (C), (C′) *besitzen also denselben Rang* $\varkappa_2$.

Aus den Identitäten (8) (11) folgt ferner, dafs die Matrix (B) durch zeilenweise Komposition der folgenden beiden entsteht:

$$(18)\qquad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 0 & \dfrac{\partial y_1}{d x_n} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdot\cdot & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \cdot\cdot & b_n \\ \sum b_h \dfrac{\partial y_h}{\partial x_1}, & \sum b_{1h} \dfrac{\partial y_h}{\partial x_1}, & \sum b_{2h} \dfrac{\partial y_h}{\partial x_1}, & \cdot\cdot & \sum b_{nh} \dfrac{\partial y_h}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \sum b_h \dfrac{\partial y_h}{\partial x_n}, & \sum b_{1h} \dfrac{\partial y_h}{\partial x_n}, & \sum b_{2h} \dfrac{\partial y_h}{\partial x_n}, & \cdot\cdot & \sum b_{nh} \dfrac{\partial y_h}{\partial x_n} \end{Vmatrix}.$$

Die zuletzt hingeschriebene Matrix aber ergiebt sich ihrerseits durch Zeilenkomposition des Schemas (18) mit dem folgenden:

$$(\mathrm{B}')\qquad \begin{Vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \cdot\cdot & b_n \\ b_1 & 0 & b_{12} & \cdot\cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ b_n & b_{n1} & b_{n2} & \cdot\cdot & 0 \end{Vmatrix}.$$

Ganz ähnlich wie vorhin schliefst man jetzt: verschwinden alle ν-reihigen Determinanten in (B′), so verschwinden auch alle ν-reihigen Determinanten in (B). Da sich nun aus den Identitäten (17) die Umkehrung dieser Thatsache in ganz ähnlicher Weise ergiebt, so folgt, dafs die beiden Matrices (B) (B') denselben Rang $\varkappa_1$ besitzen. Die Klasse von Δ' ist also in der That gleich der Klasse von Δ, nämlich gleich $\frac{1}{2}(\varkappa_1 + \varkappa_2)$.

Die Zahlen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind ebenfalls Invarianten des Pfaffschen Ausdrucks Δ gegenüber beliebigen Punkttransformationen; sie sind aber durch Angabe von $\varkappa$ schon mitbestimmt, und es genügt sonach, die eine invariante Zahl $\varkappa$ zu betrachten.

Damit zwei Pfaff'sche Ausdrücke Δ und Δ' äquivalent seien, ist nach dem soeben Bewiesenen jedenfalls notwendig, dafs sie dieselbe Klasse $\varkappa$ besitzen. Im Laufe des nächsten Kapitels wird sich herausstellen, dafs diese Bedingung zur Äquivalenz auch hinreicht.

§ 2. Die Frobenius'schen Sätze.[1])

99. Wir fragen: „*Wie ändert sich die Klasse eines Pfaff'schen Ausdrucks*

$$(1) \qquad \Delta \equiv \sum a_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)\, dx_i,$$

wenn man ihn mit einer nicht identisch verschwindenden Funktion $\varrho(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)$ multiplizirt?“ oder anders ausgedrückt: „Ist $\varkappa$ die Klasse von Δ, und setzen wir:

$$\Delta' \equiv \sum a_i'\, dx_i \equiv \varrho\Delta; \quad a_i' \equiv \varrho a_i$$

welches ist die Klasse von Δ'“?

Aus den Elementen

$$a_{ik}' \equiv \frac{\partial a_i'}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k'}{\partial x_i} \equiv \varrho a_{ik} + a_i \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} - a_k \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1 \,.\,.\, n)$$

bilden wir die schiefsymmetrische Matrix

$$(2) \qquad \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & a_1' & a_2' & .\,. & a_n' \\ -a_1' & 0 & a_{12}' & .\,. & a_{1n}' \\ . & . & . & . & . \\ -a_n' & a_{n1}' & a_{n2}' & .\,. & 0 \end{array} \right\| .$$

Der Rang dieser Matrix wird nach Art. 12 nicht geändert, wenn man alle ihre Elemente mit ϱ dividirt, ferner die mit $\frac{\partial \log \varrho}{\partial x_i}$ multiplizirte erste Zeile zu der $i + 1^{\text{ten}}$ Zeile, sowie die mit $\frac{\partial \log \varrho}{\partial x_k}$ multiplizirte erste Spalte zu der $k + 1^{\text{ten}}$ Spalte addirt, und diese Änderung für alle Indices $i, k = 1 \,.\,.\, n$ durchführt.

1) Frobenius I und II.

Durch diese Umformungen verwandelt sich aber die Matrix (2) in die Matrix (B), ihr Rang ist also gleich $\varkappa_1$. Demnach ist die Klasse von Δ' entweder $\varkappa_1$ oder $\varkappa_1 - 1$ und wir haben die Sätze:

1) *Ist die Klasse $\varkappa$ von Δ eine gerade Zahl 2λ, so ist diejenige des Ausdrucks $\varrho\Delta$ entweder gleich $\varkappa$ oder gleich $\varkappa - 1$.*

2) *Ist die Klasse $\varkappa$ des Ausdrucks Δ eine ungerade Zahl, so besitzt $\varrho\Delta$ entweder die Klasse $\varkappa$ oder die Klasse $\varkappa + 1$.*

Darnach bleibt die Klasse eines bedingungslosen Ausdrucks mit ungerader Variabelnzahl durch Multiplikation mit einem beliebigen Faktor stets ungeändert.

100. Das vorstehende Resultat läſst sich für die einfachsten Fälle $\varkappa = 1$ und $\varkappa = 2$ direkt verifiziren. In der That kann nach Nr. 93 ein Pfaff'scher Ausdruck Δ der Klasse zwei, und nur ein solcher, auf die Form $\sigma d\varphi$ gebracht werden, worin die Funktionen σ und φ von einander unabhängig sind; multiplizirt man nun Δ mit einem Euler'schen Multiplikator (Art. 94), dann und nur dann wird $\mu \cdot \Delta$ mit einem exakten Differential identisch, erhält also die Klasse 1; multiplizirt man aber Δ mit einer beliebigen Funktion ϱ, so verwandelt es sich in $\varrho\sigma d\varphi$, worin die Funktionen $\varrho \cdot \sigma$ und φ unabhängig sind, behält also die Klasse 2. Multiplizirt man ferner einen Ausdruck der Klasse 1, d. h. ein exaktes Differential df, mit einer Funktion $\psi(f)$, so verwandelt er sich wieder in ein exaktes Differential $dF = \psi(f)df$; durch Multiplikation mit einer beliebigen Funktion ϱ dagegen erhöht sich seine Klasse um eine Einheit.

Als eine weitere Anwendung des obigen Satzes geben wir noch folgendes, leicht zu verifizirende Theorem:

Ist ein Pfaff'scher Ausdruck Δ' in $n - 1$ Variabeln

$$\Delta' \equiv \sum_1^{n-1} b_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_{n-1}) dx_i$$

mit der Klasse $\varkappa'$ vorgelegt, und bedeutet x_n eine n^{te} unabhängige Variabele, so besitzt der Ausdruck $x_n \cdot \Delta'$ die Klasse $\varkappa'$ oder $\varkappa' + 1$, je nachdem $\varkappa'$ gerade oder ungerade; seine Klasse ist also unter allen Umständen *gerade.*

101. Wir bezeichnen zwei Pfaff'sche *Gleichungen:*

$$(3) \qquad \Delta \equiv \sum_1^n{}^i\, a_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) dx_i = 0$$

$$\Delta' \equiv \sum_1^n{}^i\, b_i(y_1 y_2 \,.\,.\, y_n) dy_i = 0$$

als *äquivalent*, wenn eine Variabelntransformation existirt, vermöge deren die eine dieser Gleichungen in die andere übergeführt wird, vermöge deren also eine Identität der Form

$$\Delta' \equiv \varrho(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)\Delta$$

stattfindet. Nach Art. 99 wird nun die Invariante $\varkappa_1$ des Pfaff'schen Ausdrucks nicht geändert, wenn man Δ mit einer beliebigen Funktion ϱ multiplizirt. Darnach ist $\varkappa_1$ eine für die Pfaff'sche *Gleichung* $\Delta = 0$ charakteristische Zahl; ist $\Delta' = 0$ eine mit $\Delta = 0$ äquivalente Gleichung, so besitzt der Ausdruck Δ' wiederum dieselbe Invariante $\varkappa_1$; m. a. W.:

„*Der Rang* $\varkappa_1$ *der Matrix* (B) *ist eine Invariante der Pfaff'schen Gleichung* $\Delta = 0$ *gegenüber allen Punkttransformationen des Raumes* $R_n(x_1 \,.\,.\, x_n)$."

Wir wollen diese Zahl kurz als den *Rang* der Pfaff'schen Gleichung bezeichnen.

Damit zwei Pfaff'sche Gleichungen in gleich viel Variabeln äquivalent seien, ist also jedenfalls notwendig, dafs sie denselben Rang $\varkappa_1$ *besitzen.* Im nächsten Kapitel wird sich zeigen, dafs diese Bedingung auch hinreichend ist.

Schreiben wir die Pfaff'sche Gleichung (3) unter der Voraussetzung $a_n \not\equiv 0$ in der Form:

$$dx_n - \alpha_1 dx_1 - \cdot - \alpha_{n-1} dx_{n-1} = 0 \left(\alpha_\iota \equiv -\frac{a_i}{a_n}\right) \tag{4}$$

und setzen wir

$$\alpha_{ik} \equiv \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} + \alpha_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_n} - \alpha_i \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_n} \qquad (i, k = 1 \,.\,.\, n-1)$$

bezeichnet ferner $2l$ den Rang der schiefsymmetrischen Matrix,

$$\| \alpha_{ik} \| \qquad (i, k = 1 \,.\,.\, n-1)$$

so besitzt, wie man leicht erkennt, die Pfaff'sche Gleichung (3) oder (4) den Rang $2l + 2$; der Rang einer exakten Gleichung ist 2.

102. Den Sätzen des Art. 99 lassen sich analoge an die Seite stellen, die sich auf die Änderung der Klasse $\varkappa$ bei Addition eines exakten Differentials $d\Omega$ beziehen. Setzt man

$$\Delta' \equiv \sum_1^n a_i' dx_i \equiv \Delta + d\Omega(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)$$

also:

$$a_i' \equiv a_i + \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}$$

so folgt:

$$a'_{ik} \equiv \frac{\partial a'_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a'_k}{\partial x_i} = a_{ik}.$$

Der Rang der Matrix (C) bleibt also ungeändert, wenn man zu dem Ausdruck Δ ein beliebiges exaktes Differential hinzufügt, und man hat die Sätze:

1) *Ist die Klasse $\varkappa$ von Δ eine gerade Zahl, so ist die Klasse des Pfaff'schen Ausdrucks $\Delta + d\Omega$ entweder $\varkappa$ oder $\varkappa + 1$.*

2) *Ist die Klasse $\varkappa$ von Δ ungerade, so besitzt der Ausdruck $\Delta + d\Omega$ die Klasse $\varkappa$ oder $\varkappa - 1$.*

Die Klasse eines bedingungslosen Ausdrucks mit gerader Variabelnzahl bleibt bei Hinzufügung eines Differentials stets ungeändert.

Addirt man z. B. zu einem Ausdruck der Klasse 1, d. h. zu einem Differential df ein beliebiges anderes $d\Omega$, so erhält man wiederum einen Ausdruck $d(f + \Omega)$ der Klasse eins; addirt man aber $d(-f)$, so entsteht ein Ausdruck der Klasse 0, d. h ein identisch verschwindender Ausdruck.

Ferner verifizirt man leicht folgende Behauptungen:

Ist Δ ein Ausdruck der Klasse 2, also von der Form $\varrho\, df$, so ist die Klasse des Ausdrucks $\varrho\, df + d\Omega$ gleich zwei oder gleich drei, je nachdem Ω eine Funktion von ϱ und f allein ist, oder nicht.

Ist ein Pfaff'scher Ausdruck Δ' in $n - 1$ Variabeln $x_1 \ldots x_{n-1}$ und mit der Klasse $\varkappa'$ gegeben, und bedeutet x_n eine n^{te} unabhängige Veränderliche, so ist die Klasse des Ausdrucks $dx_n + \Delta'$ gleich $\varkappa'$ oder $\varkappa' + 1$, je nachdem $\varkappa'$ ungerade oder gerade ist, in allen Fällen also eine ungerade Zahl.

103. Um von den Resultaten dieses § eine weitere Anwendung zu geben, schicken wir folgende Bemerkungen voraus, die sich unmittelbar aus Art. 31 und 32 ergeben:

1) *Die Klasse $\varkappa$ des Pfaff'schen Ausdrucks Δ ist gerade oder ungerade, je nachdem die lineare Gleichung*

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \cdots + a_n \xi_n = 0 \tag{5}$$

eine Folge (Art. 9) *des Gleichungensystems*

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{in}\xi_n = \xi_0 a_i \quad (i = 1 \ldots n) \tag{6}$$

ist, oder nicht.

2) *Die Klasse $\varkappa$ des Pfaff'schen Ausdrucks Δ ist ungerade oder gerade, je nachdem die Gleichung $\xi_0 = 0$ eine Folge des Systems* (6) *ist, oder nicht.*

104. Wir betrachten nun einen „*homogenen*" Pfaff'schen Ausdruck (1), d. h. einen solchen, dessen Koeffizienten a_ι alle in den Variabeln x homogen derselben Ordnung g sind, also den Euler'schen Identitäten:

$$(7) \qquad x_1 \frac{\partial a_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial a_i}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \equiv g a_\iota \qquad (i = 1 \,..\, n)$$

Genüge leisten.

Setzen wir

$$(8) \qquad x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n \equiv a,$$

so folgt durch Differentiation:

$$x_1 \frac{\partial a_1}{\partial x_\iota} + x_2 \frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \cdots + x_n \frac{\partial a_n}{\partial x_\iota} + a_i \equiv \frac{\partial a}{\partial x_\iota},$$

also durch Subtraktion von der Gleichung (7):

$$(9) \quad a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n \equiv (g+1)\, a_i - \frac{\partial a}{\partial x_i} \ (i = 1 \,..\, n).$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich der Reihe nach folgende Thatsachen:

1) *Ist die Funktion* $a \equiv 1$,[1]) *so ist* $g = -1$, *und die Klasse* $\varkappa$ *des homogenen Ausdrucks* $\varDelta$ *ungerade.*

Denn a ist homogen der Ordnung $g + 1$, also ist $g = -1$; ferner hat man jetzt wegen der Gleichungen (9):

$$\begin{aligned} &a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \equiv 1 \\ (10) \qquad &a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \equiv 0 \qquad (i = 1 \,..\, n). \end{aligned}$$

Das Wertsystem $\xi_i = x_\iota$, $\xi_0 = 0$ erfüllt also die linearen Gleichungen (6), nicht aber (5), also ist die letztere Gleichung keine Folge von (6) (Art. 10).

2) *Ist* $a \equiv 0$, *aber* $g \neq -1$, *so ist die Klasse* $\varkappa$ *des homogenen Ausdrucks* $\varDelta$ *gerade.*

Denn aus (9) folgt jetzt:

$$a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \equiv (g+1) a_i; \qquad (i = 1 \,..\, n)$$

also werden die Gleichungen (6) durch die Werte $\xi_\iota = x_i$ und den nicht verschwindenden Wert $\xi_0 = g + 1$ erfüllt, d. h. $\xi_0 = 0$ ist keine Folge von (6).

3) *Ist* $\varkappa$ *gerade, und* a *nicht identisch null, so besitzt der homogene Pfaff'sche Ausdruck*

$$(11) \qquad \frac{1}{a}(a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n)$$

die Klasse $\varkappa - 1$.

---

1) oder $\equiv$ einer nicht verschwindenden Konstanten.

Denn dieser Ausdruck genügt den Bedingungen des Satzes 1), also ist seine Klasse ungerade, mithin nach Art. 99 1) gleich $\varkappa - 1$.

Als Korollar folgt hieraus:

4) *Ist die Pfaff'sche Gleichung*

$$\Delta \equiv a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n = 0$$

exakt, sind ferner die a_i alle homogen derselben Ordnung, und ist die Funktion $a \equiv \Sigma\, a_\iota x_i$ nicht identisch null, so ist $\frac{1}{a}$ ein Euler'scher Multiplikator dieser Gleichung, d. h. der Ausdruck (11) *ist ein exaktes Differential.*

5) *Ist die Klasse $\varkappa$ des homogenen Ausdrucks Δ ungerade, und ist g nicht gleich -1, so ist die Klasse des (homogenen) Ausdrucks*

$$\Delta' \equiv \Delta - d\,\frac{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n}{g+1}$$

gleich $\varkappa - 1$.

Denn schreibt man Δ' in der Form $\Sigma\, a_i' dx_\iota$, so folgt

$$a_i' \equiv \frac{1}{g+1}\left(g a_i - \sum_1^n {}_s\, x_s \frac{\partial a_s}{\partial x_\iota}\right);$$

hieraus erhält man mit Rücksicht auf (7) sofort:

$$\sum x_i a_i' \equiv 0,$$

d. h. Δ' erfüllt die Bedingungen des Satzes 2), seine Klasse ist also gerade, mithin nach Art. 102 2) gleich $\varkappa - 1$.

Als Korollar ergiebt sich hieraus:

6) *Ist Δ ein homogener Pfaff'scher Ausdruck, und gleichzeitig ein exaktes Differential, so hat man, falls $g \neq -1$ ist:*

$$\Delta \equiv \frac{1}{g+1}\, d(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n).$$

Verschwindet also die Funktion a identisch, ohne dafs dies für sämtliche Koeffizienten a_i der Fall ist, so kann Δ nur dann ein exaktes Differential sein, wenn $g = -1$ ist.

7) *Ist $a \equiv 0$, und n ungerade, so ist die Klasse $\varkappa$ des homogenen Ausdrucks Δ kleiner als n.*

Denn die Identitäten (8) (9) zeigen jetzt, dafs die linearen Gleichungen (5) (6) das Lösungensystem $\xi_i = x_i$, $\xi_0 = g + 1$ besitzen; nach Art. 11 ist also der Rang $\varkappa_1$ der zu Δ gehörigen Matrix (B) (Art. 96) kleiner als $n + 1$, mithin, da er gerade ist, auch kleiner als n; und unsere Behauptung folgt aus der Thatsache $\varkappa \leqq \varkappa_1$.

8) *Ist $\varDelta$ homogen, ferner $a \equiv 0$, und $g = -1$, so ist $\varkappa < n$.*

Denn aus (10) folgt, dafs der Rang $\varkappa_2$ der Matrix (C) (Art. 96) kleiner als n ist. Ist also n gerade, so ist $\varkappa < n$; für ungerades n ist die Behauptung schon erwiesen.

9) *Ist $\varDelta$ homogen, $a \equiv 0$, $g \neq -1$, n* gerade *und $\varkappa = n$, bedeutet ferner w irgend eine homogene Funktion der Ordnung $g + 1$, so ist die Klasse des Ausdrucks $\frac{1}{w}\varDelta$ gleich $n - 1$.*

Denn dieser Ausdruck erfüllt die Bedingungen des vorigen Satzes, also ist seine Klasse $< n$, mithin nach Art. 99 gleich $n - 1$.

105. Die vorstehenden Sätze sollen nun auf den homogenen Ausdruck

$$\varDelta \equiv a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 \tag{12}$$

angewendet werden, wobei die a_i ganzrationale homogene Funktionen zweiten Grades der drei Variabeln $x_1 x_2 x_3$ bedeuten.

Wir haben jetzt die Fälle $\varkappa = 1, 2, 3$ zu unterscheiden.

Der Fall $\varkappa = 1$ erledigt sich nach Satz 6) der vor. Nr. Im Falle $\varkappa = 2$ setzen wir wiederum

$$a \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3.$$

Ist a nicht identisch null, so ist nach Satz 3) der Ausduck $\frac{1}{a}\varDelta$ ein exaktes Differential df, d. h. $\varDelta$ hat die Form adf, und die Funktionen a und f sind unabhängig.

Ist $a \equiv 0$, so ist nach Satz 2) $\varkappa$ notwendig gleich 2, d. h. die Gleichung $\varDelta = 0$ ist exakt, und die a_i erfüllen nach Art. 81 die Bedingung

$$a_1 a_{23} + a_2 a_{31} + a_3 a_{12} \equiv 0. \tag{13}$$

Die a_{ik} sind ganzlineare homogene Funktionen von x_1, x_2, x_3. Dasselbe gilt also auch von den Ausdrücken

$$A_1 \equiv \frac{1}{3} a_{23} + hx_1;\ A_2 \equiv \frac{1}{3} a_{31} + hx_2;\ A_3 \equiv \frac{1}{3} a_{12} + hx_3, \tag{14}$$

wo h eine beliebige Konstante bedeutet; man hat daher

$$A_i \equiv c_{1i} x_1 + c_{2i} x_2 + c_{3i} x_3 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{15}$$

Die Gleichungen (9) liefern hier mit Rücksicht auf (14)

$$3a_1 \equiv a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \equiv 3(x_2 A_3 - x_3 A_2),$$

also

$$a_1 \equiv x_2 A_3 - x_3 A_2,\quad a_2 = x_3 A_1 - x_1 A_3;\quad a_3 \equiv x_1 A_2 - x_2 A_1.$$

Umgekehrt, sind die A_i beliebige Linearformen der x, und die a_i durch die soeben hingeschriebenen Gleichungen definirt, so ist $\Sigma a_\iota x_i$ identisch null, also ist nach Satz 2) des vor. Art. die Pfaff'sche Gleichung:

$$(16)\quad (x_2 A_3 - x_3 A_2) dx_1 + (x_3 A_1 - x_1 A_3) dx_2 + (x_1 A_2 - x_2 A_1) dx_3 = 0$$

exakt.

Die Integration dieser Gleichung ist von Jacobi [1]) ausgeführt worden. Ihre allgemeine Integralgleichung hat die Form:

$$(17)\qquad L_1^{\lambda_2 - \lambda_3} \cdot L_2^{\lambda_3 - \lambda_1} \cdot L_3^{\lambda_1 - \lambda_2} = \text{konst.}$$

Dabei bedeuten λ_1, λ_2, λ_3 die (als verschieden vorausgesetzten) Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

die Linearformen L_i sind durch die Formeln gegeben:

$$- L_i \equiv \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & c_{11} - \lambda_i & c_{12} & c_{13} \\ \xi_2 & c_{21} & c_{22} - \lambda_i & c_{23} \\ \xi_3 & c_{31} & c_{32} & c_{33} - \lambda_i \end{vmatrix},$$

und die ξ_i sind beliebige Konstante.

Ist endlich die Klasse des Ausdrucks (12) gleich 3, so ist nach Satz 5) des vor. Art. die Klasse des Ausdrucks

$$\Delta' \equiv \Delta - d\left(\frac{1}{3}\, a\right) \equiv \sum_1^3 a_i' \, dx_i$$

gleich 2; da ferner die a_i' ganzrationale homogene Funktionen 2^{ter} Ordnung sind, und der Identität $\Sigma a_i' x_i \equiv 0$ genügen, so wird die allgemeine Integralgleichung der exakten Gleichung $\Delta' = 0$ wie soeben gefunden. Ist (17) diese Gleichung, und bezeichnet man ihre linke Seite mit ω, so findet man für Δ folgende Darstellung:

$$\Delta \equiv d\left(\frac{1}{3}\, a\right) + \varrho\, d\omega,$$

wobei ϱ aus irgend einer der 3 Gleichungen

$$a_i = \frac{1}{3} \frac{\partial a}{\partial x_i} + \varrho \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

berechnet wird. Die Funktionen $\frac{1}{3}\, a$, ϱ, ω, sind, wie man leicht erkennt, unabhängig (Art. 123), und homogen bezw. von den Ordnungen 3, 3, 0.

1) Jacobi Werke Bd. 4 p. 257; vgl. Frobenius II.

Kapitel IV.

Die Pfaff-Grassmann'sche Reduktionsmethode.

§ 1. Die Pfaff'sche Reduktion.

106. Wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, nahm die Theorie des Pfaff'schen Problems ihren Ausgangspunkt von der zuerst von Pfaff in einem speziellen Fall gelösten Aufgabe, eine gegebene totale Differentialgleichung

$$\Delta \equiv a_1 dx_1 + \cdot \; + a_n dx_n = 0 \tag{1}$$

auf eine reduzirte Form

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdot \cdot + F_r df_r = 0$$

zu bringen, in welcher die F und f gewisse Funktionen der ursprünglichen Variabeln x bedeuten, und die Zahl r der Terme (oder, wie wir auch sagen wollen, der „*Differentialelemente* df_i“) möglichst klein ist.

Um diese Frage zu beantworten, stellte sich Pfaff zunächst folgende Aufgabe: Es sollen in die Gleichung $\Delta = 0$ neue Variabeln

$$y_1, y_2, \cdot \cdot y_{n-1}, t \tag{2}$$

eingeführt werden, derart dafs die transformirte Gleichung nur mehr die $n - 1$ Variabeln $y_1 \, .. \, y_{n-1}$ enthält, m. a. W.: *Man soll die Funktionen* $\psi_1 \, .. \, \psi_n$ *derart bestimmen, dafs vermöge der Variabelntransformation:*

$$x_i = \psi_i(y_1 y_2 \cdot \cdot y_{n-1}, t) \qquad (i = 1, 2 \, .. \, n) \tag{3}$$

eine Identität von folgender Form besteht:

$$\Delta \equiv \varrho(y_1, y_2, \cdot \cdot y_{n-1}, t) \cdot \sum_1^{n-1} {}^i \, b_i(y_1 y_2 \cdot \cdot y_{n-1}) dy_i . \tag{4}$$

Indem wir uns in Δ die x durch die Funktionen ψ ersetzt denken, und die Koeffizienten von dt, dy_i links und rechts vergleichen, folgt:

$$a_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + a_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \cdot \cdot + a_n \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \equiv 0 \tag{5}$$

$$a_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y_i} + a_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y_i} + \cdot \cdot + a_n \frac{\partial \psi_n}{\partial y_i} \equiv \varrho b_i \quad (i = 1 \cdot \cdot n - 1). \tag{6}$$

Dabei sind natürlich auch in den a_i die x durch die ψ zu ersetzen.

Differentiiren wir (5) nach y_i, (6) nach t, und beachten, dafs b_i von t nicht abhängt, so folgt:

$$(7)\quad \sum_1^n{}^k \frac{\partial \psi_k}{\partial t}\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial y_i}+\cdots+\frac{\partial a_k}{\partial x_n}\frac{\partial \psi_n}{\partial y_i}\right)+\sum_1^n{}^k a_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t \partial y_i}\equiv 0$$

$$(8)\quad \sum_1^n{}^l \frac{\partial \psi_l}{\partial y_i}\left(\frac{\partial a_l}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial a_l}{\partial x_n}\frac{\partial \psi_n}{\partial t}\right)+\sum_1^n{}^k a_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t \partial y_i}\equiv b_i \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,.$$

Nun ist aber wegen (6)

$$(9)\qquad b_i \frac{\partial \varrho}{\partial t}\equiv \mu \sum_1^n{}^l a_l \frac{\partial \psi_l}{\partial y_i}\,,$$

wenn gesetzt wird

$$(10)\qquad \mu\equiv\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial t};$$

also ergiebt sich durch Subtraktion der Gleichung (7) von (8):

$$(11)\qquad \sum_1^n{}^k \sum_1^n{}^l \frac{\partial \psi_k}{\partial t}\frac{\partial \psi_l}{\partial y_i}\left(\frac{\partial a_l}{\partial x_k}-\frac{\partial a_k}{\partial x_l}\right)\equiv \mu \sum_1^n{}^l a_l \frac{\partial \psi_l}{\partial y_i}$$

oder endlich, unter Gebrauch der Symbole a_{ik}:

$$(12)\qquad \sum_1^n{}^l \frac{\partial \psi_l}{\partial y_i}\left(-\mu a_l+\sum_1^n{}^k a_{lk}\frac{\partial \psi_k}{\partial t}\right)\equiv 0\quad (i=1\,..\,n).$$

Aber mit Rücksicht auf (5) besteht auch noch die Identität

$$(13)\qquad \sum_1^n{}^l \frac{\partial \psi_l}{\partial t}\left(-\mu a_l+\sum_1^n{}^k a_{lk}\frac{\partial \psi_k}{\partial t}\right)\equiv 0.$$

Die nach den Variabeln (2) genommene Funktionaldeterminante der ψ verschwindet nun nicht identisch; indem wir also die Relation (5) noch einmal aufschreiben, erhalten wir aus (12) und (13):

$$(14)\qquad \begin{cases} 0 \equiv a_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial \psi_2}{\partial t}+\cdots+a_n\frac{\partial \psi_n}{\partial t}\\ \mu a_1\equiv \quad * \quad + a_{12}\frac{\partial \psi_2}{\partial t}+\cdots+a_{1n}\frac{\partial \psi_n}{\partial t}\\ \mu a_2\equiv a_{21}\frac{\partial \psi_1}{\partial t}+\quad * \quad+\cdots+a_{2n}\frac{\partial \psi_n}{\partial t}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mu a_n\equiv a_{n1}\frac{\partial \psi_1}{\partial t}+a_{n2}\frac{\partial \psi_2}{\partial t}+\cdots+\quad * \end{cases}$$

107. Es gilt aber auch umgekehrt der Satz:

Existiren $n+1$ Funktionen $\mu, \psi_1\,..\,\psi_n$ der Variabeln (2), derart daſs die Identitäten (14) bestehen, wenn man in den a_i die x durch die ψ

ersetzt, und sind die ψ_i hinsichtlich der n Variabeln (2) unabhängig, so gilt vermöge der Transformationsformeln (3) eine Identität der Form (4), und zwischen den Funktionen μ und ϱ besteht der durch (10) definirte Zusammenhang.

In der That, sind die Identitäten (14) erfüllt, so gilt das Gleiche von den Relationen (12), (11), (7). Bezeichnet man daher die linke Seite von (5) mit T, die linke Seite von (6) mit Y_i, so kann die Identität (11) so geschrieben werden:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial y_i} \equiv \mu Y_i \equiv \frac{\partial Y_i}{\partial t} \qquad (i = 1 \,.\,. n - 1).$$

Darnach können wir setzen

$$Y_i \equiv \varrho b_i,$$

worin die b_i nur von $y_1 y_2 \,.\,. y_{n-1}$ abhängen, und ϱ mit μ durch die Formel (10) zusammenhängt. Unsere Behauptung ist damit bewiesen.

Damit also vermöge der Variabelntransformation (3) eine Identität der Form (4) bestehe, ist notwendig und hinreichend, dafs die Funktionen ψ_i einem Gleichungensystem der Form

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = \xi_i(\psi_1 \psi_2 \,.\,. \psi_n)$$

genügen, wobei die Funktionen $\xi_i(x_1 x_2 \,.\,. x_n)$ und $\mu(x_1 \,.\,. x_n)$ die linearen Gleichungen

$$(15) \qquad \begin{aligned} 0 &= a_1 \xi_1 + \cdots + a_n \xi_n \\ \mu a_i &= a_{i1} \xi_1 + \cdots + a_{in} \xi_n \end{aligned} \qquad (i = 1 \cdot\cdot n)$$

identisch erfüllen. Die ψ_i müssen also für jedes beliebige Wertsystem der (als arbiträre Konstanten zu betrachtenden) Gröfsen $y_1 \,.\,. y_{n-1}$ *Integral*funktionen des simultanen Systems

$$\frac{d x_i}{d t} = \xi_i(x_1 x_2 \,.\,. x_n) \qquad (i = 1 \,.\,. n)$$

sein. Löst man daher die Gleichungen (3) in der Form

$$(16) \qquad y_i = \varphi_i(x_1 x_2 \,.\,. x_n); \quad t = \chi(x_1 x_2 \,.\,. x_n)$$

auf, so müssen die φ_i unabhängige Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(17) \qquad \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

oder des zugehörigen simultanen Systems

$$d x_1 : d x_2 : \cdots : d x_n = \xi_1 : \xi_2 : \cdots : \xi_n$$

sein, während χ von den φ_i unabhängig sein mufs, im übrigen aber beliebig gewählt werden kann. Damit ist folgender Satz bewiesen:

„Man erhält die allgemeinste Variabelntransformation, vermöge deren der Pfaff'sche Ausdruck $\varDelta$ die Form

$$(18) \qquad \varrho(y_1 y_2 \cdot\cdot y_{n-1} t) \cdot \sum_1^{n-1} b_i(y_1 y_2 \cdot\cdot y_{n-1}) dy_i$$

annimmt, indem man ein beliebiges Lösungensystem $\xi_1 \,.\,.\, \xi_n, \mu$ der linearen Gleichungen

$$\sum a_k \xi_k = 0, \quad \sum a_{ik} \xi_k = \xi_0 a_i \qquad (i = 1 \,.\,.\, n)$$

derart bestimmt, dafs nicht alle ξ_i null sind, und irgend $n - 1$ unabhängige Integrale der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdot\cdot + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

nebst einer beliebigen andern Funktion χ als neue Variabeln $y_1 \,.\,.\, y_{n-1}, t$ in $\varDelta$ einführt."

Ist eine solche Transformation gefunden, so ergeben sich die Verhältnisse der b_i aus den Relationen (6); die Funktion ϱ ist bis auf einen willkürlichen, nur von $y_1 \,.\,.\, y_{n-1}$ abhängenden Faktor bestimmt.

Ist der Rang der Matrix (B) (p. 129) kleiner als $n + 1$, so besitzen die linearen Gleichungen (15) immer ein Lösungensystem, für das nicht alle ξ_i verschwinden. Also folgt: *Es ist dann, aber auch nur dann unmöglich den Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ durch Einführung neuer Variabeln auf die Form* (18) *zu bringen, wenn die Zahl der Variabeln x ungerade, und $\varDelta$ bedingungslos ist.*

108. Wir betrachten nun zunächst einen bedingungslosen Ausdruck $\varDelta$ mit gerader Variabelnzahl $n = 2\nu$. Da dann das Pfaff'sche Aggregat

$$P \equiv (1, 2 \,.\,.\, 2\nu)$$

nicht null ist (Art. 97), so ist nach Art. 31 das allgemeinste Lösungensystem der linearen Gleichungen (15) durch die Formeln

$$(19) \qquad \xi_i \equiv \sigma \Pi_{i,0}; \quad \xi_0 \equiv -\sigma P$$

gegeben, wo σ eine arbiträre Funktion der x bedeutet, und $\Pi_{i,0}$ aus P dadurch entsteht, dafs man die Ziffer i durch 0 ersetzt. Die allgemeinste Transformation, welche die Überführung von $\varDelta$ in die verlangte Form leistet, wird also erhalten, wenn in (16) unter den φ_i irgend $n - 1$ unabhängige Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(20) \qquad \Pi_{10}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \Pi_{20}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \Pi_{n0}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

und unter ψ eine willkürliche Funktion verstanden wird. Wir dürfen annehmen, dafs Π_{n0} nicht identisch null ist (Art. 97), und dafs eine Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ existirt, an der alle a_i, also nach Art. 38, 6) auch alle Π_{i0} regulär sind, und an der Π_{n0} nicht verschwindet (Art. 38, 3)). Die lineare partielle Differentialgleichung (20) besitzt dann hinsichtlich $x_n = x_n^0$ $n-1$ Hauptintegrale $h_1 \,.\,.\, h_{n-1}$ (Art. 46), und χ kann mit x_n identifizirt werden. Jetzt erhält $\varDelta$ vermöge der Transformation

$$(21) \qquad y_1 = h_1(x_1 \,.\,.\, x_n); \quad .\,.\, y_{n-1} = h_{n-1}(x_1 \,.\,.\, x_n); \quad x_n = x_n$$

die Form

$$\varDelta \equiv \varrho \varDelta_1 \equiv \varrho \cdot \sum_1^{n-1} {}^i\, b_i(y_1 \,.\,.\, y_{n-1})\, dy_i\,.$$

Ersetzt man hierin x_n durch x_n^0, und beachtet, dafs die y_i Hauptintegrale sind, so folgt durch Vergleichung der Koeffizienten von dx_i

$$a_i(x_1 \,.\,.\, x_{n-1}, x_n^0) \equiv \varrho(x_1 \,.\,.\, x_{n-1} x_n^0) \cdot b_i(x_1 \,.\,.\, x_{n-1}),$$

mithin

$$b_i(y_1 \,.\,.\, y_{n-1}) \equiv \frac{a_i(y_1 \,.\,.\, y_{n-1}, x_n^0)}{\varrho\,(y_1 \,.\,.\, y_{n-1}, x_n^0)};$$

die aus der Pfaff'schen Gleichung $\varDelta = 0$ vermöge unserer Variabelntransformation hervorgehende Gleichung ist sonach:

$$\sum_1^{n-1} {}^i\, a_i(y_1 \,.\,.\, y_{n-1}, x_n^0)\, dy_i = 0,$$

kann also der Form nach angegeben werden, auch wenn die h_i unbekannt sind.

109. Durch die Methode der vor. Nr., die man als die *„gerade Pfaff'sche Reduktion"* bezeichnet, wird ein bedingungsloses $\varDelta$ in $n = 2\nu$ Variabeln auf eine Form mit nur $n-1$ Differentialelementen gebracht. Dies läfst sich aber auch für einen bedingungslosen Ausdruck mit $2\nu - 1$ Veränderlichen

$$(22) \qquad \varDelta \equiv \sum_1^{2\nu-1} {}^i\, a_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_{2\nu-1})\, dx_i \qquad (2\nu - 1 \geqq 3)$$

erreichen. Nach Art. 97 dürfen wir nämlich jetzt das Aggregat

$$P' \equiv (1, 2, \,.\,.\, 2\nu - 2)$$

als nicht identisch verschwindend voraussetzen. Dann ist also der Pfaff'sche Ausdruck:

$$(23) \qquad \Delta' \equiv a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_{2\nu-2} dx_{2\nu-2}$$

ein bedingungsloser Ausdruck in den $2\nu - 2$ Variabeln $x_1 \ldots x_{2\nu-2}$, wenn die Gröfse $x_{2\nu-1}$ als eine Konstante betrachtet wird. Schreiben wir demnach:

$$\Pi'_{k0} \equiv (1, 2, \ldots k-1, 0, k+1 \ldots 2\nu - 2) \quad (k = 1, 2, \ldots 2\nu - 2)$$

so können wir annehmen, dafs $\Pi'_{2\nu-2,0}$ nicht identisch null ist (Art. 97). Sind jetzt die Funktionen

$$\varphi_1(x_1 \ldots x_{2\nu-1}),\ \varphi_2(x_1 \ldots x_{2\nu-1}) \ldots \varphi_{2\nu-3}(x_1 \ldots x_{2\nu-1})$$

irgend $2\nu-3$ unabhängige Lösungen der partiellen Differentialgleichung:

$$(24) \qquad \Pi'_{10} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \Pi'_{20} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \Pi'_{2\nu-2,0} \frac{\partial f}{\partial x_{2\nu-2}} = 0,$$

so sind sie hinsichtlich $x_1 x_2 \ldots x_{2\nu-3}$ von einander unabhängig (Art. 46). Wählt man dann $\psi(x_1 \ldots x_{2\nu-1})$ beliebig, aber so, dafs die Funktionen $\varphi_1 \ldots \varphi_{2\nu-3}, \psi$ hinsichtlich $x_1 \ldots x_{2\nu-2}$ unabhängig sind, so liefern die Formeln

$$(25) \quad x_i' = \varphi_i(x_1 \ldots x_{2\nu-1}),\ x'_{2\nu-2} = \psi(x_1 \ldots x_{2\nu-1}) \qquad (i = 1 \ldots 2\nu - 3)$$

die allgemeinste Transformation der Variabeln $x_1 \ldots x_{2\nu-2}$, vermöge deren der Pfaff'sche Ausdruck (23) in die Gestalt

$$(26) \quad \Delta' \equiv \sigma'(x_1' \ldots x'_{2\nu-3}, x'_{2\nu-2}, x_{2\nu-1}) \sum_1^{2\nu-3}{}^i b_i(x_1' \ldots x'_{2\nu-3}, x_{2\nu-1}) dx_i'$$

übergeht. Diese Identität besteht vermöge (25) identisch für jedes Wertsystem der Variabeln $x_1 \ldots x_{2\nu-1}$ und der Differentiale $dx_1 \ldots dx_{2\nu-2}$, wobei indes bei der Ausrechnung der Differentiale $dx_i' = d\varphi_i$ die Gröfse $x_{2\nu-1}$ als Konstante zu behandeln ist. Bezieht man aber, wie gewöhnlich, das Differentiationssymbol d auf alle $2\nu - 1$ Variabeln x, so müssen wir die Identität (26) so schreiben:

$$(27) \qquad \Delta' \equiv \sigma' \cdot \sum_1^{2\nu-3}{}^i b_i' dx_i' - \sigma' \cdot \left(\sum_1^{2\nu-3}{}^i b_i' \frac{\partial x_i'}{\partial x_{2\nu-1}} \right) \cdot dx_{2\nu-1}.$$

Führen wir diese Darstellung von Δ' in den gegebenen Ausdruck (22) ein, und schreiben wir:

$$a_i'(x_1' \ldots x'_{2\nu-2}, x_{2\nu-1}) \equiv \sigma' \cdot b_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots 2\nu - 3)$$

$$\bar{a}(x_1' \ldots x'_{2\nu-2}, x_{2\nu-1}) \equiv a_{2\nu-1} - \sigma' \sum_1^{2\nu-3}{}^h b_h' \frac{\partial x_h'}{d x_{2\nu-1}},$$

wobei in der Funktion $a_{2\nu-1}$ die Variabeln $x_1 \ldots x_{2\nu-2}$ mittels der

Formeln (25) durch $x_1' \ldots x_{2\nu-1}'$, $x_{2\nu-1}$ auszudrücken sind, so nimmt $\varDelta$ die Form an

$$(28) \qquad \varDelta \equiv \sum_1^{2\nu-3} {}^i a_i' dx_i' + \bar{a}\, dx_{2\nu-1}.$$

Ein bedingungsloser Ausdruck $\varDelta$ in $n = 2\nu - 1$ Variabeln kann also stets in einen Ausdruck mit ebenso viel Variabeln transformirt werden, in welchem aber die Anzahl der Differentialelemente gleich $n - 1$ ist. Wir wollen dies Verfahren als die *„ungerade Pfaff'sche Reduktion"* bezeichnen.

110. Um den Ausdruck $\varDelta$ des vorigen Artikels weiter zu behandeln, schreiben wir die Identität (26) in der Form

$$\varDelta' \equiv \sigma' \varDelta_1'.$$

Nun ist die Invariante $\varkappa_1$ des Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta'$, wenn darin nur $x_1 \ldots x_{2\nu-2}$ als Variable gelten, gleich $2\nu - 2$. Nach Art. 98 gilt also dasselbe für den Ausdruck $\sigma' \varDelta_1'$ mit den Variabeln $x_1' \ldots x_{2\nu-2}'$, mithin auch für den Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta_1'$ (Art. 99). Also ist der Pfaff'sche Ausdruck

$$\varDelta_1' \equiv \sum_1^{2\nu-3} {}^i b_i(x_1' \ldots x_{2\nu-3}', x_{2\nu-1})\, dx_i'$$

für jeden beliebigen Wert der (als Parameter zu betrachtenden) Gröfse $x_{2\nu-1}$ ein bedingungsloser Ausdruck mit $2\nu - 3$ Variabeln $x_1' \ldots x_{2\nu-3}'$.

Ist nun $2\nu - 3 \geqq 3$, d. h. $2\nu - 1 \geqq 5$, so können wir auf $\varDelta_1'$ wiederum die ungerade Reduktion anwenden. Zu diesem Zwecke können wir, analog wie oben, die Variabeln $x_1' x_2' \ldots$ von vornherein so numerirt denken, dafs der Ausdruck

$$\varDelta'' \equiv \sum_1^{2\nu-4} {}^h b_h'(x_1' \ldots x_{2\nu-3}', x_{2\nu-1})\, dx_i'$$

einen bedingungslosen Ausdruck in den $2\nu - 4$ Variabeln

$$(29) \qquad x_1' x_2' \ldots x_{2\nu-4}'$$

darstellt, wenn $x_{2\nu-3}'$ und $x_{2\nu-1}$ als Parameter gelten. Dann lassen sich statt der Variabeln (29) neue Veränderliche

$$(30) \quad x_i'' \equiv \varphi_i'(x_1' x_2' \ldots x_{2\nu-4}', x_{2\nu-3}', x_{2\nu-1}) \quad (i = 1, 2 \ldots 2\nu - 4)$$

so einführen, dafs identisch:

$$(31) \qquad \varDelta'' \equiv \sigma''(x_1'' \ldots x_{2\nu-4}'', x_{2\nu-3}', x_{2\nu-1}) \cdot \sum_1^{2\nu-5} {}^h b_h'' dx_h''$$

worin die b_h'' lediglich von den Variabeln

$$x_1'' \,..\, x_{2\nu-5}'',\; x_{2\nu-3}',\; x_{2\nu-1}$$

abhängen. Die Identität (31) besteht vermöge (30) für alle Werte der $2\nu - 2$ Variabeln

$$x_1'' \,..\, x_{2\nu-4}'',\; x_{2\nu-3}',\; x_{2\nu-1} \tag{32}$$

und bei der Auswertung der Differentiale $dx_\iota'' \equiv d\varphi_\iota'$ sind $x_{2\nu-3}'$ und $x_{2\nu-1}$ als Konstante zu behandeln. Bezieht sich aber das Differentiationssymbol d auch auf $x_{2\nu-3}'$ und x_{2n-1}, so haben wir zu setzen:

$$\begin{aligned}\varDelta'' \equiv \sigma'' \sum_1^{2\nu-5}{}^h b_h'' dx_h'' &- \sigma'' \left(\sum_1^{2\nu-5}{}^h b_h'' \frac{\partial x_h''}{\partial x_{2\nu-3}'}\right) dx_{2\nu-3}' \\ &- \sigma'' \left(\sum_1^{2\nu-5}{}^h b_h'' \frac{\partial x_h''}{\partial x_{2\nu-1}}\right) dx_{2\nu-1}.\end{aligned}$$

Mit diesem Wert von $\varDelta''$ erhält der ursprüngliche Ausdruck $\varDelta$ folgende Gestalt:

$$\varDelta \equiv \bar{\bar{a}}\, dx_{2\nu-1} + \bar{a}'\, dx_{2\nu-3}' + \sum_1^{2\nu-5}{}^h a_\iota'' dx_\iota''. \tag{33}$$

Darin ist gesetzt:

$$a_\iota'' \equiv \sigma'\sigma'' b_\iota'' \qquad (i = 1, 2 \,..\, 2\nu - 5)$$

$$\bar{a}' \equiv \sigma' \left(b_{2\nu-3}' - \sigma'' \sum_1^{2\nu-5}{}^h b_h'' \frac{\partial x_h''}{\partial x_{2\nu-3}'} \right)$$

$$\bar{\bar{a}} \equiv \bar{a} - \sigma'\sigma'' \sum_1^{2\nu-5}{}^h b_h'' \frac{\partial x_h''}{\partial x_{2\nu-1}};$$

und sowohl in $\bar{a}'$ als auch in der am Schlufs der vor. Nr. definirten Funktion $\bar{a}$ sind die Variabeln $x_1' \,..\, x_{2\nu-4}'$ mittels der Formeln (30) durch die Variabeln (32) auszudrücken.

Die Identität (33) besteht für alle Werte der Variabeln $x_1 \,..\, x_{2\nu-1}$ und ihrer Differentiale, wenn man die x_ι' und x_i'' mittels der Formeln (25) (30) durch die x ausdrückt.

Schreiben wir jetzt die Identität (31) in der Form

$$\varDelta'' \equiv \sigma'' \varDelta_1'',$$

so ist $\varDelta_1''$ wiederum ein bedingungsloser Ausdruck in $2\nu - 5$ Variabeln $x_1'' \,..\, x_{2\nu-5}''$ etc. Durch $\nu - 1$-malige Wiederholung dieser Schlufsweise erhalten wir für $\varDelta$ eine Darstellung[1]) der Form:

---

1) Es wird gesetzt $x_i^{(0)} = x_i$, $x_i^{(1)} \equiv x_i'$, $x_i^{(2)} \equiv x_i''$ etc.

(34) $$\Delta \equiv a\,dx_{2\nu-1} + a'\,dx'_{2\nu-3} + \cdots + a^{(\nu-1)}\,dx_1^{(\nu-1)};$$

auf der rechten Seite steht ein Pfaff'scher Ausdruck in $n = 2\nu - 1$ Variabeln:

$$x_1^{(\nu-1)},\ x_2^{(\nu-1)},\ x_3^{(\nu-2)},\ x_4^{(\nu-2)},\ \ldots\ x'_{2\nu-3},\ x'_{2\nu-2},\ x_{2\nu-1}.$$

Die Funktionen $a, a' \ldots a^{(\nu-1)}$ sind Funktionen dieser Variabeln; die Variabeln $x^{(k)}$ hängen mit den $x^{(k-1)}$ so zusammen:

(35) $$x_h^{(k)} \equiv \varphi_h^{(k-1)}(x_1^{(k-1)} x_2^{(k-1)} \ldots x_{2\nu-2k+1}^{(k-1)},\ x_{2\nu-2k+3}^{(k-2)} \ldots x'_{2\nu-3} x_{2\nu-1})$$
$$(h = 1, 2 \ldots 2\nu - 2k)$$

und dies gilt für jeden Index k der Reihe $1, 2, \ldots \nu - 1$.

Drückt man mittels der Formeln (35) die Variabeln $x_\iota' x_\iota'' \ldots x_\iota^{(\lambda)}$ der Reihe nach durch die ursprünglichen Variabeln $x_1 \ldots x_{2\nu-1}$ aus, so verwandelt sich (34) in eine Identität, die für jedes Wertsystem der x_ι und ihrer Differentiale stattfindet. Indem wir also die Bezeichnung etwas ändern, folgt der Satz:

„Jeder bedingungslose Pfaff'sche Ausdruck Δ in $2\nu - 1$ Variabeln $x_1 \ldots x_{2\nu-1}$ läfst sich durch $\nu - 1$ successive ungerade Reduktionen auf die Form:

(36) $$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_\nu df_\nu$$

bringen, worin die F, f gewisse Funktionen von $x_1 \ldots x_{2\nu-1}$ bedeuten."

111. Zwischen den 2ν Funktionen F, f besteht natürlich mindestens *eine* identische Relation der Form

(37) $$\Phi(F_1 \ldots F_\nu, f_1 \ldots f_\nu) \equiv 0.$$

Es kann aber auch nur *eine* solche Relation geben; liefsen sich nämlich $r \geqq 2$ der Funktionen F, f durch die übrigen ausdrücken, und würde man die letzteren als neue Independente in den Ausdruck (36) einführen, so erhielte man einen Ausdruck in nur $2\nu - r$ Variabeln, der also nicht die Klasse $2\nu - 1$ besitzen könnte. Die Relation (37) mufs ferner nach einer der Gröfsen F auflösbar sein; denn andernfalls liefse sich eines der f, etwa f_1 durch $f_2 \ldots f_\nu$ allein ausdrücken: Dann aber würde sich (36) auf einen Ausdruck mit nur $\nu - 1$ Differentialelementen reduziren, der seinerseits durch Einführung neuer Veränderlicher in einen Ausdruck mit höchstens $2\nu - 2$ unabhängigen Variabeln verwandelt werden könnte.

Eines der Differentialelemente $df_1 \ldots df_\nu$, etwa df_1 ist nach der vor. Nr. mit $dx_{2\nu-1}$ identisch. Es läfst sich aber leicht erreichen, dafs f_1 mit einer ganz *beliebigen* Funktion von $x_1 \ldots x_{2\nu-1}$ identisch wird; wir brauchen zu diesem Zweck blos statt der x beliebige neue Variable $\xi_1 \dots \xi_{2\nu-1}$ in $\varDelta$ einzuführen, und den so erhaltenen Ausdruck auf die Form (36) zu bringen; dann stimmt df_1 mit $d\xi_{2\nu-1}$ überein.

112. Ist $\varDelta$ ein bedingungsloser Ausdruck in 2ν Variabeln $x_1 \dots x_{2\nu}$, so denken wir ihn uns durch eine gerade Pfaff'sche Reduktion auf die Form $\varrho\varDelta_1$ gebracht. Der Pfaff'sche Ausdruck $\varrho\varDelta_1$ mit den Variabeln $y_1 \dots y_{2\nu-1}, t$ besitzt dann die Invariante $\varkappa_1 = 2\nu$, und dasselbe gilt nach Art. 99 auch für den Ausdruck $\varDelta_1$, der nur von den y_i abhängt; daher ist $\varDelta_1$ ein bedingungsloser Ausdruck in $2\nu - 1$ Variabeln, kann also nach Art. 109 auf eine Form mit nur ν Differentialelementen gebracht werden. Daher gilt der Satz:

Jeder bedingungslose Ausdruck in 2ν Variabeln $x_1 \dots x_{2\nu}$ kann mit Hülfe von *einer* geraden und $\nu - 1$ ungeraden Reduktionen auf die Form (36) gebracht werden, worin die F_i, f_i gewisse Funktionen von $x_1 \dots x_{2\nu}$ bedeuten.

Diese Funktionen sind jetzt von einander unabhängig. Es folgt dies entweder daraus, dafs im entgegengesetzten Fall der Ausdruck (36) auf eine Form mit weniger als 2ν Variabeln gebracht werden könnte, also eine Klasse $\varkappa < 2\nu$ besäfse, oder auch unmittelbar aus den Bemerkungen der vor. Nr., wenn man dieselben auf $\varDelta_1$ anwendet, und beachtet, dafs ϱ im gegenwärtigen Fall wegen (10) von der Variabeln t nicht unabhängig ist.

Wir wollen die Resultate der letzten drei Nummern folgendermafsen resumiren:

Jeder bedingungslose Pfaff'sche Ausdruck in $2\nu - 1$ Variabeln $x_1 \dots x_{2\nu-1}$ läfst sich durch Einführung neuer unabhängiger Veränderlicher $z_1 \dots z_{2\nu-1}$ auf die Form

$$(38)\quad \sigma(z_1, z_2, \cdots z_{2\nu-1}) \cdot (dz_\nu + z_{\nu+1}dz_1 + z_{\nu+2}dz_2 + \cdots + z_{2\nu-1}dz_{\nu-1})$$

reduziren.

Jeder bedingungslose Pfaff'sche Ausdruck in 2ν Variabeln $x_1 \dots x_{2\nu}$ läfst sich durch Einführung neuer unabhängiger Veränderlicher $z_1 z_2 \dots z_{2\nu}$ auf die Form

$$(39)\qquad z_{\nu+1}dz_1 + z_{\nu+2}dz_2 + \cdots + z_{2\nu}dz_\nu$$

reduziren.

113. Es versteht sich von selbst, dafs auch umgekehrt jeder Pfaff'sche Ausdruck der Form (38) die Klasse $2\nu - 1$ besitzt, wenn σ eine beliebige Funktion der z bedeutet; dabei ist es nach Art. 98 gleichgültig, ob man (38) als einen Ausdruck in dem $2\nu - 1$ Independenten $z_1 \dots z_{2\nu-1}$ ansieht, oder ob man diese Gröfsen als unab-

hängige Funktionen irgend welcher Variabeln $x_1 \ldots x_{2\nu-1}$ betrachtet und dementsprechend unter Δ einen Pfaff'schen Ausdruck in $x_1 \ldots x_{2\nu-1}$ versteht.

Ebenso ist die Klasse des Ausdrucks (39) gleich 2ν, gleichviel ob die z_i unabhängige Veränderliche oder unabhängige Funktionen von 2ν Variabeln $x_1 \ldots x_{2\nu}$ bedeuten.

Doch ist es nützlich diese Behauptungen direkt zu verifiziren. Wir zeigen zunächst, daſs der Ausdruck

$$dz_\nu + z_{\nu+1} dz_1 + \cdots + z_{2\nu-1} dz_{\nu-1} \tag{40}$$

die Klasse $2\nu - 1$ besitzt, wenn die $z_1 \ldots z_{2\nu-1}$ unabhängige Variable bedeuten. Wir setzen

$$a_1 \equiv z_{\nu+1} \ldots a_{\nu-1} \equiv z_{2\nu-1}; \quad a_\nu \equiv 1, \; a_{\nu+1} = 0, \ldots a_{2\nu-1} = 0$$

$$a_{ik} = -a_{ki} \equiv \frac{\partial a_i}{\partial z_k} - \frac{\partial a_k}{\partial z_i} \qquad (i, k = 1 \ldots 2\nu - 1)$$

und bilden aus diesen Elementen die zu (40) gehörige Matrix (B):

$$\begin{vmatrix} 0 & z_{\nu+1} & \ldots & z_{2\nu-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -z_{\nu+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -z_{2\nu-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese 2ν-reihige Determinante hat den Wert 1, also den Rang 2ν; streicht man die erste Zeile und Spalte, so entsteht ein Schema vom Rang $2\nu - 2$, also ist die Klasse von (40) gleich $2\nu - 1$. Da aber die Klasse eines bedingungslosen Ausdrucks mit $2\nu - 1$ Variabeln durch Multiplikation mit einem Faktor sich nicht ändert (Art. 99) so besitzt auch der Ausdruck (38) die Klasse $2\nu - 1$. Streicht man ferner in dem obigen Schema die $\nu + 1^{\text{te}}$ Zeile und Spalte, so erhält man die zu dem Ausdruck

$$z_{\nu+1} dz_1 + z_{\nu+2} dz_2 + \cdots + z_{2\nu-1} dz_{\nu-1} \tag{41}$$

gehörige Matrix (B); diese besitzt den Rang $2\nu - 2$, und dasselbe gilt von dem Schema, das entsteht, wenn auch noch die erste Zeile und Spalte weggelassen wird. Also ist $2\nu - 2$ die Klasse von (41), und daraus folgt nach leichter Änderung der Bezeichnungsweise, daſs 2ν die Klasse von (39) ist.

Wir verzichten darauf, die hier auseinandergesetzte Pfaff'sche Reduktionsmethode, ebenso wie die nun folgende Grassmann'sche, durch spezielle Beispiele zu erläutern, da wir später weit einfachere Methoden kennen lernen werden.

§ 2. Die Grassmann'sche Reduktion und das Grassmann'sche Theorem.

114. Wir betrachten nunmehr den Fall eines bedingten Ausdrucks $\varDelta$ in n Variabeln, dessen Klasse $\varkappa$ sonach $< n$ ist, und zwar zunächst unter der Annahme, dafs $\varkappa$ einer *geraden* Zahl 2λ gleich sei. Nach Art. 97 können wir in diesem Fall annehmen, dafs die beiden Pfaff-schen Aggregate

$$P = (1, 2, .. 2\lambda), \quad \Pi_{2\lambda,0} \equiv (1, 2, .. 2\lambda - 1, 0)$$

nicht identisch null seien. Nach Art. 31 besitzen dann die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} 0 &= a_1 \xi_1 + \cdots + a_n \xi_n \\ a_\iota \xi_0 &= a_{\iota 1} \xi_1 + \cdots + a_{\iota n} \xi_n \end{aligned} \qquad (\iota = 1 \,..\, n)$$

das Lösungensystem:

$$(2) \quad \xi_1 = \Pi_{10} \,..\, \xi_{2\lambda} = \Pi_{2\lambda,0}, \quad \xi_{2\lambda+1} = 0 \,..\, \xi_n = 0, \quad \xi_0 = -P.$$

Bezeichnen wir mit

$$\varphi_2(x_1 \,..\, x_n), \,..\, \varphi_{2\lambda}(x_1 \,..\, x_n), \quad x_{2\lambda+1} \,..\, x_n$$

$n - 1$ unabhängige Integrale der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(3) \qquad \Pi_{10} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \Pi_{20} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \Pi_{2\lambda,0} \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda}} = 0$$

und mit $\psi(x_1 \,..\, x_n)$ eine beliebige Funktion, die nur der einen Bedingung zu genügen hat, dafs die Funktionen $\psi \varphi_2 \,.\, \varphi_{2\lambda}$ hinsichtlich $x_1 \,.\, x_{2\lambda}$ unabhängig sind, so erhält $\varDelta$ nach Art. 107 vermöge der Variabelntransformation:

$$(4) \quad y_1 = \varphi_2, \; y_2 = \varphi_3 \,..\, y_{2\lambda-1} = \varphi_{2\lambda}; \; y_{2\lambda} = x_{2\lambda+1} \,..\, y_{n-1} = x_n; \; t = \psi$$

die Form

$$(5) \qquad \varDelta \equiv \varrho(y_1 \,..\, y_{n-1}, t) \,.\, \sum_1^{n-1}{}_\iota\, b_\iota(y_1 y_2 \,..\, y_{n-1})\, dy_\iota,$$

und da die Funktion, die in Art. 106 und 107 mit μ bezeichnet wurde, gleich $-P$, also nicht identisch null ist, so ist wegen

$$(6) \qquad \mu \equiv \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

die Funktion ϱ von t nicht unabhängig.

Ist $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ eine Stelle, an der alle a_ι regulär, und $\Pi_{2\lambda,0}$ nicht null ist (Art. 38, 3), 6)), so können wir unter den φ_ι insbesondere *Hauptintegrale* der Gleichung (3) hinsichtlich

$$(7) \qquad x_{2\lambda} = \overset{0}{x}_{2\lambda}$$

verstehen, so dafs sich also φ_ι vermöge (7) auf $x_{\iota-1}$ reduzirt; ferner dürfen wir in (4) die Funktion ψ mit $x_{2\lambda}$ identifiziren. Setzen wir dann in der Identität (5) $x_{2\lambda} = \overset{0}{x}_{2\lambda}$, so folgt:

$$\sum_{\iota=1}^{n}{}' a_\iota (x_1 \,.\,.\, x_{2\lambda-1}, \overset{0}{x}_{2\lambda}, x_{2\lambda+1} \,.\,.\, x_n)\, dx_\iota$$

$$\equiv \varrho (x_1 \,.\,.\, x_{2\lambda-1}, x_{2\lambda+1} \,.\,.\, x_n, \overset{0}{x}_{2\lambda}) \Big[\sum_{1}^{2\lambda-1}{}^{i} b_\iota (x_1 \,.\,.\, x_{2\lambda-1}, x_{2\lambda+1} \,.\,.\, x_n)\, dx_\iota$$

$$+ \sum_{2\lambda}^{n-1}{}^{k} b_k (x_1 \,.\,.\, x_{2\lambda-1}, x_{2\lambda+1} \,.\,.\, x_n)\, dx_k \Big],$$

man findet somit:

$$b_\iota (y_1 \,.\,.\, y_{n-1}) \equiv \frac{a_i (y_1 \,.\,.\, y_{2\lambda-1}, \overset{0}{x}_{2\lambda}, y_{2\lambda} \,.\,.\, y_{n-1})}{\varrho (y_1 \,.\,.\, y_{n-1}, \overset{0}{x}_{2\lambda})} \quad (i = 1, \,.\,.\, 2\lambda - 1),$$

$$b_k (y_1 \,.\,.\, y_{n-1}) \equiv \frac{a_{k+1} (y_1 \,.\,.\, \overset{0}{x}_{2\lambda} \,.\,.)}{\varrho (y_1 \,.\,.\, y_{n-1} \,.\,.\, \overset{0}{x}_{\lambda\lambda})} \quad (k = 2\lambda \,.\,.\, n - 1),$$

d. h. die Pfaff'sche Gleichung

$$\varDelta_1 \equiv \sum_{1}^{n-1}{}^{i} b_i\, dy_\iota = 0,$$

die sich durch unsere Transformation aus $\varDelta = 0$ ergiebt, kann der Form nach angegeben werden, auch wenn die Hauptintegrale φ_ι nicht bekannt sind.

115. Es sei zweitens die Klasse $\varkappa$ von $\varDelta$ gleich einer ungeraden Zahl $2\lambda - 1$. Jetzt dürfen wir die beiden Pfaff'schen Aggregate

$$P' \equiv (1, 2 \,.\,.\, 2\lambda - 2), \quad Q \equiv (0, 1, \,.\,.\, 2\lambda - 2, \; 2\lambda - 1)$$

als nicht identisch verschwindend annehmen. Die Gleichungen (1) können jetzt nur durch die Annahme $\xi_0 \equiv 0$ erfüllt werden. Haben die Symbole K_{ik} dieselbe Bedeutung wie in Art. 32, so besitzen die Gleichungen (1) u. a. das Lösungensystem:

$$\xi_1 = K_{1,n}, \; \xi_2 = K_{2,n} \,.\,.\, \xi_{2\lambda-1} = K_{2\lambda-1,n}; \quad \xi_{2\lambda} = 0, \,.\,.\, \xi_{n-1} = 0,$$
$$\xi_n = -Q, \; \xi_0 \equiv 0.$$

Es seien:

$$\varphi_1 (x_1 \,.\,.\, x_n) \,.\,.\, \varphi_{2\lambda-1} (x_1 \,.\,.\, x_n), \; x_{2\lambda}, \; x_{2\lambda+1} \,.\,.\, x_{n-1}$$

irgend $n - 1$ unabhängige Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(8) \qquad K_{1n}\frac{\partial f}{\partial x_1} + K_{2n}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + K_{2\lambda-1,n}\frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda-1}} - Q\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

und $\psi(x_1 \ldots x_n)$ eine Funktion derart, dafs die $\varphi_1 \ldots \varphi_{2\lambda-1}\psi$ hinsichtlich $x_1 \ldots x_{2\lambda-1}, x_n$ unabhängig sind. Dann nimmt Δ vermöge der Transformation:

$$(9) \quad y_1 = \varphi_1; \ldots y_{2\lambda-1} = \varphi_{2\lambda-1}; \; y_{2\lambda} = x_{2\lambda} \ldots y_{n-1} = x_{n-1}; \; t = \psi$$

die Form an:

$$(10) \qquad \Delta \equiv \varrho\,(y_1 y_2 \ldots y_{n-1}) \sum_1^{n-1}{}^i\, b_\iota\,(y_1 y_2 \ldots y_{n-1})\, dy_\iota,$$

worin die Funktion ϱ von t unabhängig ist; dies folgt aus (6), da hier $\mu \equiv \xi_0 \equiv 0$ ist. Ist $x_1^0 \ldots x_n^0$ eine Stelle, an der alle a_ι regulär und Q nicht null ist, so dürfen wir statt der φ_ι in (9) die Hauptintegrale von (8) hinsichtlich $x_n = x_n^0$ wählen. Machen wir unter dieser Annahme in (10) die Substitution $x_n = x_n^0$, so folgt:

$$\sum_1^{n-1}{}^i\, a_\iota\,(x_1 \ldots x_{n-1} x_n^0)\, dx_\iota \equiv \varrho\,(x_1 \ldots x_{n-1}) \sum_1^{n-1}{}^i\, b_\iota\,(x_1 \ldots x_{n-1})\, dx_\iota.$$

Die aus $\Delta = 0$ durch die Transformation (10) hervorgehende Pfaff'sche Gleichung ist also:

$$\sum_n^{n-1}{}^i\, a_\iota\,(y_1 \ldots y_{n-1} x_n^0)\, dy_i = 0.$$

116. Die Aufgabe, den Ausdruck Δ auf die Form (10) zu bringen, worin ϱ von t ganz unabhängig ist, hätte sich auch im Falle $\varkappa = 2\lambda$ (und $< n$) dadurch lösen lassen, dafs wir statt des Lösungensystems (2) der linearen Gleichungen (1) irgend eines der Lösungensysteme (22) des Art. 31 gewählt hätten, für die $\xi_0 \equiv 0$ ist. Wir können daher unter Wiederholung eines schon in Art. 107 erhaltenen Resultats folgende Sätze aussprechen:

1) *Die Aufgabe, eine Pfaff'sche Gleichung $\Delta = 0$ mit n Variabeln in eine Gleichung mit weniger als n Variabeln zu transformiren, ist dann und nur dann unmöglich, wenn n ungerade und die Klasse von Δ gleich n ist.*

2) *Die Aufgabe, den Pfaff'schen Ausdruck Δ in einen Ausdruck mit weniger als n Variabeln zu reduziren, ist dann und nur dann unmöglich, wenn $\varkappa = n$ ist.*

117. Die Lösung der Aufgabe, einen Ausdruck $\varkappa^{\text{ter}}$ Klasse in n Variabeln auf die Form $\varrho\Delta_1$ zu bringen, worin Δ_1 nur noch von $n - 1$ Variabeln abhängt, soll als „*Grassmann'sche Reduktion*" be-

zeichnet werden. Dieses Reduktionsverfahren umfaſst, wie man sieht, die gerade Pfaff'sche Reduktion als einen Spezialfall.

Es werde nun zunächst $\varkappa = 2\lambda - 1$ angenommen. Durch die Grassmann'sche Reduktion der Nr. 114 geht $\varDelta$ über in einen Ausdruck $\varrho\varDelta_1$, der nur von $n-1$ Variabeln abhängt, und natürlich wieder die Klasse $\varkappa$ besitzt. Ist nun $\varkappa < n-1$, so läſst sich der Ausdruck $\varrho\varDelta_1$ durch eine abermalige Grassmann'sche Reduktion auf eine Form $\sigma\varDelta_2$ bringen, die nur noch $n-2$ Variable enthält. Durch $n-\varkappa$-malige Ausführung der Grassmann'schen Reduktion erhält sonach $\varDelta$ schlieſslich die Form $\tau\varDelta_{n-\varkappa}$, die einen Ausdruck der Klasse $\varkappa$ mit $\varkappa$ Veränderlichen, also einen bedingungslosen Ausdruck in $2\lambda-1$ Veränderlichen darstellt. Nach Art. 111 kann derselbe die folgende Form erhalten

$$(11) \quad \sigma(z_1 z_2 \,.\,.\, z_{2\lambda-1})\,(dz_\lambda + z_{\lambda+1}\,dz_1 + z_{\lambda+2}\,dz_2 + \cdots + z_{2\lambda-1}\,dz_{\lambda-1}),$$

worin die z_ι unabhängige Funktionen der $2\lambda-1$ in $\tau\varDelta_{n-\varkappa}$ auftretenden Variabeln, also auch unabhängige Funktionen der ursprünglichen Variabeln $x_1 \,.\,.\, x_n$ bedeuten.

Ist zweitens die Klasse $\varkappa$ des Ausdrucks $\varDelta$ gleich $2\lambda\ (< n)$, so erhält $\varDelta$ durch die Grassmann'sche Reduktion der Nr. 113 die Form $\varrho\varDelta_1$, wobei $\varDelta_1$ nur die Variabeln $y_1 \,.\,.\, y_{n-1}$ enthält, während $\varrho\,(y_1 \,.\,.\, y_{n-1}\,t)$ von der Veränderlichen t nicht unabhängig ist. Da $\varrho\varDelta_1$ als Ausdruck in den Variabeln $y_1 \,.\,.\, y_{n-1}\,t$ betrachtet, wiederum die Klasse 2λ besitzt, so ist die Klasse von $\varDelta_1$ entweder 2λ oder $2\lambda-1$ (Art. 99, 1). Ist die Klasse von $\varDelta_1$ gleich $2\lambda-1$, so können wir diesen Ausdruck durch $n-1-(2\lambda-1)$ successive Grassmann'sche Reduktionen auf einen bedingungslosen Ausdruck in $2\lambda-1$ Variabeln reduziren.

Ist aber 2λ die Klasse von $\varDelta_1$, so erhält $\varDelta_1$ durch Anwendung der Reduktion des Art. 113 die Form $\varrho_2\varDelta_2$, wo $\varDelta_2$ nur mehr $n-2$ Veränderliche enthält. Für $\varDelta_2$ bestehen nunmehr wiederum dieselben Möglichkeiten wie für $\varDelta_1$, und durch Wiederholung obiger Schluſsweise ergiebt sich, daſs der eine oder der andere der folgenden beiden Fälle stattfinden muſs:

1) Es giebt eine Zahl $k \leqq n-\varkappa$ derart, daſs man durch k-malige Anwendung der Grassmann'schen Reduktion des Art. 113 zu einem Ausdruck $\varDelta_k$ in $n-k$ Variabeln gelangt, dessen Klasse gleich $2\lambda-1$ ist, während alle vorhergehenden Ausdrücke $\varDelta_1, \varDelta_2, \,.\,.\, \varDelta_{k-1}$ die Klasse 2λ besitzen; nach dem obigen läſst sich dann $\varDelta_k$ durch $n-k-\varkappa+1$-malige Anwendung der Grassmann'schen Reduktion auf einen bedingungslosen Ausdruck $\varDelta_{n-2\lambda+1}$ mit $2\lambda-1$ Variabeln reduziren.

2) Durch $n-\varkappa$-malige Anwendung der Reduktion des Art. 113 erhält man der Reihe nach die folgenden Darstellungen für $\varDelta$

$$\Delta \equiv \varrho_1 \Delta_1 \equiv \varrho_1 \varrho_2 \Delta_2 \equiv \cdot\cdot \equiv \varrho_1 \varrho_2 \cdot\cdot \varrho_{n-\varkappa} \Delta_{n-\varkappa},$$

worin Δ_i einen Pfaff'schen Ausdruck mit $n - i$ Variabeln bedeutet, und sämtliche Ausdrücke $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ die Klasse $\varkappa = 2\lambda$ besitzen.

Im Falle $\varkappa = 2\lambda$ kann daher Δ durch wiederholte Anwendung der Grassmann'schen Reduktionen auf die Form $\sigma \bar{\Delta}$ gebracht werden; darin bedeutet $\bar{\Delta}$ entweder einen bedingungslosen Ausdruck in $2\lambda - 1$ Veränderlichen, und σ ist durch die letzteren nicht allein ausdrückbar; oder es ist $\bar{\Delta}$ ein bedingungsloser Ausdruck in 2λ Veränderlichen. Nach Art. 111 kann daher Δ im Falle $\varkappa = 2\lambda$ stets auf die Form

$$z_{\lambda+1} dz_1 + z_{\lambda+2} dz_2 + \cdot\cdot + z_{2\lambda} dz_\lambda \tag{12}$$

gebracht werden, worin die $z_1 \ldots z_{2\lambda}$ unabhängige Funktionen der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ darstellen.

118. Da nach Art. 113 auch umgekehrt einem Ausdruck der Form (11) die Klasse $2\lambda - 1$, und einem Ausdruck der Form (12) die Klasse 2λ zukommt, gleichviel ob man die z_i als unabhängige Variable oder als unabhängige Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ betrachtet, so ergiebt sich der folgende wichtige Doppelsatz, den wir als das „*Grassmann'sche Theorem*" bezeichnen wollen:

„*Ist die Klasse $\varkappa$ eines Pfaff'schen Ausdrucks Δ in n Variabeln $x_1 \ldots x_n$ gleich 2λ, dann und nur dann läfst sich Δ auf die Form*

$$z_{\lambda+1} dz_1 + z_{\lambda+2} dz_1 + \cdot\cdot + z_{2\lambda} dz_\lambda$$

reduziren, worin $z_1 z_2 \ldots z_{2\lambda}$ unabhängige Funktionen der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ bedeuten."

„*Ist die Klasse $\varkappa$ eines Pfaff'schen Ausdrucks Δ in n Variabeln $x_1 \ldots x_n$ gleich $2\lambda - 1$, dann und nur dann läfst sich Δ auf die Form*

$$\sigma(z_1 z_2 \ldots z_{2\lambda-1})(dz_\lambda + z_{\lambda+1} dz_1 + z_{\lambda+2} dz_2 + \cdot\cdot + z_{2\lambda-1} dz_{\lambda-1}) \tag{11}$$

bringen, worin $z_1 \ldots z_{2\lambda-1}$ unabhängige Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ und σ eine gewisse Funktion von $z_1 z_2 \ldots$ bezeichnet."

119. Wir wollen diesem Satze noch einige, leicht zu verifizirende Korollare hinzufügen:

1) *Ist $\varkappa$ die Klasse eines Pfaff'schen Ausdrucks Δ in n Variabeln, so läfst sich Δ durch Einführung neuer Variabeln auf eine Form bringen, die nur mehr $\varkappa$ Veränderliche enthält; eine weitere Verringerung der Variabelnzahl ist unmöglich.*

2) *Eine Pfaff'sche Gleichung vom Range $\varkappa_1$* (Art. 101) *kann durch Einführung neuer Veränderlicher auf eine Gleichung mit nur $\varkappa_1 - 1$ Veränderlichen reduzirt werden; eine weitere Reduktion der Variabelnzahl ist nicht möglich.*

Diese beiden Sätze enthalten die Theoreme des Art. 116 als Spezialfall.

3) *Kann ein Pfaff'scher Ausdruck* Δ *oder eine Pfaff'sche Gleichung* $\Delta = 0$ *in* n *Veränderlichen auf eine Form gebracht werden, die nur* $h \leqq \frac{1}{2} n$ *Differentialelemente enthält, so ist die Invariante* $\varkappa_1$ *des Ausdrucks* Δ *höchstens gleich* $2h$.

4) *Ein Pfaff'scher Ausdruck* Δ (oder eine Pfaff'sche Gleichung $\Delta = 0$) *mit der Invariante* $\varkappa_1$ *kann durch Einführung neuer Variabeln auf eine Gestalt gebracht werden, die nur* $\frac{1}{2} \varkappa_1$ *Differentialelemente enthält; eine weitere Verringerung der Zahl der Differentialelemente ist unmöglich.*

5) *Eine Pfaff'sche Gleichung* $\Delta = 0$ *mit den Variabeln* $x_1 \,.\,.\, x_n$ *läfst sich dann und nur dann auf die Form*

$$df + F_1 df_1 + \cdot\cdot + F_{\lambda-1} df_{\lambda-1} = 0$$

bringen, worin die $2\lambda - 1$ *Funktionen* f, F *von einander unabhängig sind, wenn der Rang* $\varkappa_1$ *der Gleichung* $\Delta = 0$ *gleich* 2λ *ist.*

120. Wir sind jetzt in der Lage, die Invariantentheorie einer Pfaff'schen *Gleichung* vollkommen zu erledigen. Es gilt nämlich der Satz:

Damit zwei Pfaff'sche Gleichungen

$$(13) \qquad \Delta \equiv \sum_1^n {}_\iota\, a_\iota(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)\, dx_\iota = 0$$

$$(14) \qquad \Delta' \equiv \sum_1^n {}_\iota\, a_\iota'(x_1' x_2' \,.\,.\, x_n')\, dx_\iota' = 0$$

äquivalent seien, d. h. *damit eine Variabelntransformation*

$$(15) \qquad x_\iota' \equiv \varphi_i(x_1 \,.\,.\, x_n) \qquad (i = 1 \,.\,.\, n)$$

und eine Funktion $\varrho(x_1 \,.\,.\, x_n)$ *existire von der Eigenschaft, dafs vermöge* (15) *die Identität*

$$\Delta' \equiv \varrho \Delta$$

stattfindet, ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, dafs die beiden Gleichungen (13) und (14) *denselben Rang* $\varkappa_1$ *besitzen"* (vgl. Nr. 101).

In der That, besitzt der Ausdruck Δ die Invariante $\varkappa_1 = 2\lambda$, so ist seine Klasse $\varkappa$ gleich 2λ oder $2\lambda - 1$; in beiden Fällen kann Δ auf folgende Form gebracht werden

$$\Delta \equiv \sigma (dz_\lambda + z_{\lambda+1} dz_1 + \cdot\cdot + z_{2\lambda-1} dz_{\lambda-1}),$$

worin die Funktionen $z_1, z_2 \,..\, z_{2\lambda-1}$ von einander unabhängig sind. Im Falle $\varkappa = 2\lambda$ genügt es ja zu diesem Zwecke, in dem Ausdruck (12) σ statt $z_{2\lambda}$ und $\sigma z_{\lambda+\iota}$ an Stelle von $z_{\lambda+i}$ zu setzen. Besitzt nun $\varDelta'$ ebenfalls die Invariante 2λ, so läſst es sich auf eine analoge Form

$$\varDelta' \equiv \sigma'(dz_\lambda' + z_{\lambda+1}' dz_1' + \cdots + z_{2\lambda-1}' dz_{\lambda-1}'),$$

wobei $z_1', z_2' \,..\, z_{2\lambda-1}'$ unabhängige Funktionen der Variabeln $x_1' \,..\, x_n'$ bedeuten. Dann kann man $n - 2\lambda + 1$ weitere Funktionen $z_{2\lambda}, z_{2\lambda+1} \,..\, z_n$ der Variabeln x und ebensoviele Funktionen $z_{2\lambda}', z_{2\lambda+1}' \,..\, z_n'$ der Variabeln x' derart wählen, daſs die Funktionen $z_1 \,..\, z_n$ hinsichtlich der x und die $z_1' \,..\, z_n'$ hinsichtlich der x' unabhängig sind. Die Gleichungen

$$z_i'(x_1' x_2' \,..\, x_n') = z_\iota(x_1 x_2 \,..\, x_n) \qquad (i = 1 \,..\, n)$$

lassen sich nunmehr sowohl nach den x', als auch nach den x auflösen, liefern also eine Variabelntransformation, vermöge deren augenscheinlich die Identität

$$\varDelta' \equiv \frac{\sigma'}{\sigma} \cdot \varDelta$$

stattfindet.

Der Rang $\varkappa_1$ ist somit thatsächlich die einzige Invariante einer Pfaff'schen Gleichung gegenüber beliebigen Punkttransformationen des Raums R_n.

§ 3. Die Jacobi'sche Reduktion; das Fundamentaltheorem.

121. Die reduzirte Form (11), die für einen Pfaff'schen Ausdruck ungerader Klasse im vorigen § aufgestellt wurde, gestattet noch eine weitere Vereinfachung. Wir wollen zu diesem Zwecke zunächst folgende Frage beantworten:

Kann man in einen Pfaff'schen Ausdruck

$$(1) \qquad \varDelta \equiv \sum_1^n{}^i a_\iota(x_1 x_2 \,..\, x_n)\, dx_i$$

mit der Klasse $\varkappa$ neue Variable $y_1 y_2 \,..\, y_{n-1}, t$ derart einführen, daſs identisch:

$$(2) \qquad \varDelta \equiv d\Psi(t, y_1, y_2, \,..\, y_{n-1}) + \sum_1^{n-1}{}^i b_\iota(y_1 y_2 \,..\, y_{n-1})\, dy_i,$$

daſs sich also $\varDelta$ in die Summe aus einem exakten Differential und einem Ausdruck in $n - 1$ Variabeln verwandelt?

Die gesuchten Transformationsformeln seien

$$(3) \qquad x_i = \chi_i(y_1 y_2 \,..\, y_{n-1} t) \qquad (i = 1 \,..\, n)$$

oder nach den y_i und t aufgelöst:

$$(4) \qquad y_i = \varphi_i(x_1 \,..\, x_n),\; t = \psi(x_1 \,..\, x_n) \qquad (i = 1 \,..\, n-1).$$

Setzen wir für die x_i ihre Ausdrücke (3) in (2) ein, so folgt durch Vergleichung der beiderseitigen Koeffizienten von $dy_1 \ldots dy_{n-1}, dt$:

$$(5) \qquad a_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial t} + a_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial t} + \cdots + a_n \frac{\partial \chi_n}{\partial t} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

$$(6) \qquad a_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial y_\iota} + a_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial y_\iota} + \cdots + a_n \frac{\partial \chi_n}{\partial y_\iota} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} + b_\iota(y_1 \ldots y_{n-1})$$

$$(i = 1, 2, \ldots n-1).$$

Diese Identitäten bestehen vermöge (3) für jedes Wertsystem $y_1 \ldots y_{n-1} t$. Differentiirt man (5) nach y_i, (6) nach t, so folgt:

$$\sum_1^n {}_k \sum_1^n {}_l \frac{\partial a_k}{\partial x_l} \frac{\partial \chi_k}{\partial t} \frac{\partial \chi_l}{\partial y_\iota} + \sum_1^n {}_h a_h \frac{\partial^2 \chi_h}{\partial t \partial y_i} \equiv \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y_i}$$

$$\sum_1^n {}_k \sum_1^n {}_l \frac{\partial a_l}{\partial x_k} \frac{\partial \chi_k}{\partial t} \frac{\partial \chi_l}{\partial y_\iota} + \sum_1^n {}_h a_h \frac{\partial^2 \chi_h}{\partial t \partial y_i} \equiv \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y_i}$$

und durch Subtraktion:

$$(7) \qquad \sum_1^n {}_l \frac{\partial \chi_l}{\partial y_\iota} \left(\sum_1^n {}_k a_{kl} \frac{\partial \chi_k}{\partial t} \right) \equiv 0,$$

ferner hat man wegen $a_{kl} \equiv - a_{lk}$ die identische Gleichung

$$(8) \qquad \sum_1^n {}_l \frac{\partial \chi_l}{\partial t} \left(\sum_1^n {}_k a_{kl} \frac{\partial \chi_k}{\partial t} \right) \equiv 0.$$

Da nun die nach $y_1 \ldots y_{n-1} t$ genommene Funktionaldeterminante der χ_ι nicht identisch null sein kann, so folgt aus (7), (8):

$$(9) \qquad \begin{cases} \qquad * \qquad + a_{12} \frac{\partial \chi_2}{\partial t} + \cdots + a_{1n} \frac{\partial \chi_n}{\partial t} = 0 \\ a_{21} \frac{\partial \chi_1}{\partial t} + \qquad * \qquad + \cdots + a_{2n} \frac{\partial \chi_n}{\partial t} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \frac{\partial \chi_1}{\partial t} + a_{n2} \frac{\partial \chi_2}{\partial t} + \cdots + \qquad * \qquad = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt, erfüllen die Funktionen χ_i diese Relationen identisch, wenn man in den a_{ik} die x durch die χ ersetzt, so gelten auch die Beziehungen (7) identisch. Bezeichnet man daher die linke Seite von (5) mit T, die linke Seite von (6) mit Y_i, so gelten die Identitäten:

$$\frac{\partial T}{\partial y_i} \equiv \frac{\partial Y_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2 \ldots n-1).$$

Bestimmen wir also mittels einer Quadratur eine Funktion $\Psi(y_1 \ldots y_{n-1} t)$ derart, daſs

$$T \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

so erhalten wir

$$\frac{\partial Y_\iota}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_\iota}\right) \qquad (i = 1, 2 \,.\,. \, n-1).$$

Demnach besitzen die Ausdrücke Y_i folgende Form:

$$Y_\iota \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} + b_\iota(y_1 y_2 \,.\,. \, y_{n-1}),$$

d. h. es besteht eine Identität der Form (2).

122. Durch eine ganz analoge Überlegung wie in Art. 107 erhalten wir nunmehr den Satz:

Stellen die Funktionen $\eta_1 \eta_2 \,.\,. \, \eta_n$ der Variabeln $x_1 \,.\,. \, x_n$ ein beliebiges Lösungensystem der n linearen Gleichungen

$$\sum_1^n{}^k a_{ik}\, \eta_k = 0 \qquad (i = 1 \,.\,. \, n) \tag{10}$$

dar, so erhält man eine Variabelntransformation (4), vermöge deren Δ die Form (2) annimmt, indem man irgend $n-1$ unabhängige Integrale $\varphi_1 \varphi_2 \,.\,. \, \varphi_{n-1}$ der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

sowie eine beliebige andere, von den φ_i unabhängige Funktion ψ als neue Variable $y_1 \,.\,. \, y_{n-1}$, bezw. t in den Ausdruck Δ einführt; und jede Transformation dieser Eigenschaft kann auf dem angegebenen Wege erhalten werden.

Ist eine solche Transformation (3) oder (4) gefunden, so ergiebt sich Ψ durch eine Quadratur hinsichtlich t, und ist infolge dessen blos bis auf eine additive arbiträre Funktion der Variabeln $y_1 \,.\,. \, y_{n-1}$ bestimmt. Hat man Ψ irgendwie fixirt, so folgen die b_i aus (6).

Wir wollen die Lösung des Problems, den Ausdruck Δ auf die Form (2) zu bringen, als eine „Jacobi'sche Reduktion" bezeichnen.[1]

Offenbar ist die Jacobi'sche Reduktion nur dann unausführbar, wenn die Gleichungen (10) nur das Lösungensystem $0 \,.\,. \, 0$ besitzen, d. h. wenn der Rang $\varkappa_2$ der zu Δ gehörigen Matrix (C) (Art. 96) gleich n ist. Also:

Im Falle eines bedingungslosen Pfaff'schen Ausdrucks mit gerader Variabelnzahl, und nur in diesem, ist die Jacobi'sche Reduktion unmöglich.

---

1) S. Jacobi Werke Bd 4, p. 424, woselbst das hier behandelte Problem in etwas anderer Form auftritt; vgl. auch die historische Übersicht.

123. Aus der Beziehung (5) folgt, dafs die Funktion Ψ dann und nur dann von t frei wird, wenn das bei der Jacobi'schen Reduktion benutzte Funktionensystem $\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n$ die Gleichung

$$\Sigma a_i \eta_i = 0 \tag{11}$$

erfüllt. Dies ist natürlich nur möglich, wenn der Rang der Matrix (A), d. h. die Klasse $\varkappa$ von $\varDelta < n$ ist, und die Jacobi'sche Reduktion kommt dann auf die Grassmann'sche hinaus. In der That, benutzt man beim Verfahren der Art. 114 u. 115 ein Lösungensystem der dort mit (1) bezeichneten Gleichungen, von der Eigenschaft, dafs $\xi_0 = 0$ ist, so verwandelt sich $\varDelta$ in einen Ausdruck der Form

$$\sum_1^{n-1}{}^i b_i'(y_1 \ldots y_{n-1})\, dy_i,$$

der ohne weiteres in der Form:

$$d\,\Psi(y_1 \ldots y_{n-1}) + \sum_1^{n-1}{}^i b_i dy_i \qquad \left(b_i \equiv b_i' - \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}\right)$$

geschrieben werden kann. Da im Falle $\varkappa = 2\lambda$ die Gleichung (11) stets eine Folge von (10) ist, so liefert uns die Jacobi'sche Reduktion nur im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ etwas neues, wenn die η_i so gewählt werden, dafs die Relation (11) nicht stattfindet. Das allgemeinste Lösungensystem der Gleichungen (10), welches die Relation (11) nicht erfüllt, ist in Art. 34 angegeben worden.

124. Wir betrachten nun den Fall $\varkappa = 2\lambda - 1 = n$, d. h. einen bedingungslosen Ausdruck in $2\lambda - 1$ Variabeln. Die Gleichungen (10) besitzen jetzt nur ein einziges Lösungensystem, das in der Bezeichnungsweise des Art. 32 so lautet

$$\eta_n = -P'; \ \eta_i = \Pi_{i,n}' \qquad (i = 1, 2 \ldots n-1),$$

worin P' wie gewöhnlich das Pfaff'sche Aggregat $(1, 2 \ldots 2\lambda - 2)$ bedeutet. Da die Funktionen η_i die Relation (11) nicht erfüllen, so liefern sie eine Jacobi'sche Reduktion, vermöge deren $\varDelta$ die Form (2) erhält, und Ψ von t nicht unabhängig ist. Führt man also Ψ neben $y_1 \ldots y_{n-1}$ als neue Veränderliche ein, so nimmt $\varDelta$ folgende Gestalt an:

$$\varDelta \equiv dy_n + \sum_1^{n-1}{}^i b_i(y_1 \ldots y_{n-1})\, dy_i \equiv dy_n + \varDelta'.$$

Die Klasse von $\varDelta'$ ist nun nach Art. 102 2) gleich $\varkappa - 1$; denn sie kann wegen $\varkappa = n$ nicht gleich $\varkappa$ sein. Mithin ist $\varDelta'$ ein bedingungsloser Ausdruck in $n - 1 = 2\lambda - 2$ Variabeln und kann daher durch eine Reihe Pfaff'scher Reduktionen auf eine Form mit nur $\lambda - 1$ Differentialelementen gebracht werden.

Bringen wir diesen Satz mit den Ergebnissen des vorigen § in Verbindung, so gelangen wir schliefslich zu dem nachfolgenden Theorem, das den Mittelpunkt der ganzen Theorie des Pfaff'schen Problems bildet, und aus diesem Grunde immer als der „*Fundamentalsatz*“ unserer Theorie zitirt werden soll:

„*Ist die Klasse eines Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$ in n Veränderlichen $x_1 \,.\,.\, x_n$ gleich 2λ, dann und nur dann kann $\varDelta$ auf die Form:*

$$z_{\lambda+1}\, dz_1 + z_{\lambda+2}\, dz_2 + \cdot\cdot + z_{2\lambda}\, dz_\lambda \tag{12}$$

gebracht werden, worin $z_1 \,.\,.\, z_{2\lambda}$ unabhängige Funktionen von $x_1 \,.\,.\, x_n$ bedeuten.

Ist die Klasse eines Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$ in n Veränderlichen $x_1 \,.\,.\, x_n$ gleich $2\lambda - 1$, dann und nur dann kann $\varDelta$ die Form:

$$dz_\lambda + z_{\lambda+1}\, dz_1 + z_{\lambda+2}\, dz_2 + \cdot\cdot + z_{2\lambda-1}\, dz_{\lambda-1} \tag{13}$$

erhalten, worin $z_1 z_2 \,.\,.\, z_{2\lambda-1}$ unabhängige Funktionen von $x_1 \,.\,.\, x_n$ bedeuten.

Wir wollen einen Ausdruck der Form (12) oder (13), in dem alle vorkommenden Gröfsen z entweder unabhängige Variable oder auch unabhängige Funktionen irgendwelcher anderer Variablen bedeuten, als eine „*Normalform*“ bezeichnen. Die Klasse $\varkappa$ eines Ausdrucks $\varDelta$ ist also gleich der Anzahl der in seiner Normalform vorkommenden unabhängigen Funktionen. Aus unsern bisherigen Entwickelungen folgert man leicht, dafs jedes $\varDelta$, dessen Klasse > 1 ist, unbegrenzt viele Normalformen besitzt; eine Methode, um aus einer speziellen Normalform die allgemeinste zu erhalten, werden wir in Kap. VIII kennen lernen.

125. Durch den Fundamentalsatz erledigt sich auch ohne weiteres die Frage, die wir in Art. 95 aufgeworfen haben; es gilt nämlich der Satz:

Damit zwei Pfaff'sche Ausdrücke

$$\varDelta \equiv \sum_1^n a_i\,(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)\, dx_i$$

$$\varDelta' \equiv \sum_1^n a_i'\,(x_1' x_2' \,.\,.\, x_n')\, dx_i'$$

äquivalent seien, ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, dafs beide dieselbe Klasse $\varkappa$ besitzen.

In der That, ist diese Bedingung erfüllt, und ist $\varkappa$ etwa gleich $2\lambda - 1$, so hat $\varDelta$ die Normalform (13), ebenso $\varDelta'$ die Normalform

$$dz_\lambda' + z_{\lambda+1}' dz_1' + \cdots + z_{2\lambda-1}' dz_{\lambda-1}'.$$

Bestimmt man dann die Funktionen $z_{2\lambda} \ldots z_n$ und $z_{2\lambda}' \ldots z_n'$ so, daſs $z_1 \ldots z_n$ hinsichtlich der x und $z_1' \ldots z_n'$ hinsichtlich der Variabeln x_i' unabhängig sind, so definiren die Gleichungen

$$z_i'(x_1' x_2' \ldots x_n') = z_i(x_1 x_2 \ldots x_n) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

eine Variabelntransformation, vermöge deren $\Delta' \equiv \Delta$ ist, und analog erledigt sich auch der Fall $\varkappa = 2\lambda$.

Die Klasse $\varkappa$ ist also in der That die einzige Invariante eines Pfaff'schen Ausdrucks gegenüber beliebigen Transformationen der x.

126. Es ist nützlich die vorstehenden Entwickelungen auf den Spezialfall $n = 3$ anzuwenden. Ein Pfaff'scher Ausdruck

$$\Delta \equiv X(xyz)\,dx + Y(xyz)\,dy + Z(xyz)\,dz \tag{14}$$

besitzt die Klasse 3 dann und nur dann, wenn die Funktion

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) \tag{15}$$

nicht für jedes beliebige Wertsystem xyz verschwindet; das Quadrat dieser Funktion ist nämlich nichts anderes als die zu (14) gehörige, 4reihige Determinante (B) (Art. 96).

Unter der eben gemachten Annahme verschwinden auch nicht alle drei Ausdrücke

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}; \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \tag{16}$$

identisch; und wir können, um die Ideen zu fixiren, annehmen, der erste dieser Ausdrücke sei nicht null. Sind jetzt

$$\varphi_1(xyz) = c_1; \quad \varphi_2(xyz) = c_2 \tag{17}$$

die allgemeinen Integralgleichungen des simultanen Systems:

$$dx : dy : dz = \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) : \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) : \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) \tag{18}$$

oder also $\varphi_1 \varphi_2$ zwei unabhängige Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{19}$$

so sind die Funktionen $\varphi_1 \varphi_2$ hinsichtlich y und z unabhängig (Art. 46); daher stellen die Gleichungen

$$x' = x,\; y' = \varphi_1(xyz); \quad z' = \varphi_2(xyz) \tag{20}$$

eine Variabelntransformation dar; und wir wissen aus Art. 122, daſs vermöge dieser Transformation der Ausdruck Δ die Form

$$\Delta \equiv d\Psi(x'y'z') + M(y'z')\,dy' + N(y'z')\,dz' \tag{21}$$

erhält, wobei die Funktion Ψ in folgender Weise gewonnen wird. Man löse die Gleichungen (20) nach x, y, z auf:

$$x = x', \; y = \psi_1(x'y'z'); \; z = \psi_2(x'y'z')$$

und ersetze in dem Ausdruck

$$X + Y\frac{\partial \psi_1}{\partial x'} + Z\frac{\partial \psi_2}{\partial x'}$$

die Variabeln xyz durch $x', \psi_1\psi_2$, wodurch man die Funktion $\Phi(x'y'z')$ erhalte. Dann ist Ψ durch die Formel

$$\Psi \equiv \int \Phi dx' + \text{arb. Funktion v. } y'z'$$

definirt, und die Funktionen M und N ergeben sich hinterher aus der Vergleichung der linken und rechten Seite von (21), wenn links alles durch die $x'y'z'$ ersetzt wird. Ist dann

$$\omega(y'z') = c$$

die allgemeine Integralgleichung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$Mdy' + Ndz' = 0,$$

so hat man eine Identität der Form

$$Mdy' + Ndz' \equiv \varrho(y'z')\, d\omega(y'z'),$$

wodurch schliefslich Δ die Gestalt $d\Psi + \varrho d\omega$ erhält, in der Ψ, ϱ, ω drei unabhängige Funktionen der ursprünglichen Variabeln xyz bedeuten.[1])

Ist die Klasse des Ausdrucks (14) gleich *zwei*, so dürfen wir annehmen, dafs zwar die Funktion (15), nicht aber die Funktion $\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$ identisch null ist. Auch jetzt liefern uns die Formeln (21) eine Variabelntransformation, vermöge deren Δ nach § 2 die Form:

$$\Delta' \equiv P(y'z')\, dy' + Q(y'z')\, dz'$$

annimmt, also nach Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung $\Delta' = 0$ auf die Gestalt $\varrho d\omega$ gebracht werden kann. Wie man sieht, ist dies Verfahren, das zuweilen als „Bertrand'sche Methode" zitirt wird, bedeutend umständlicher als das in Art. 90 angegebene.

---

1) Vgl. auch das in Art. 105 behandelte Beispiel.

Kapitel V.

Die vollständigen Systeme V und W.

§ 1. Die vollständigen Systeme V und W für den Fall einer geraden Klasse.

127. Nach dem Fundamentalsatz kann ein Pfaff'scher Ausdruck

$$\varDelta \equiv \sum_1^n {}^{\iota}\, a_\iota(x_1 x_2 \,..\, x_n)\, dx_\iota\,,$$

dessen Klasse $\varkappa = 2\lambda$ ist, auf die Normalform

$$\varDelta \equiv F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_\lambda df_\lambda \tag{1}$$

gebracht werden, worin die Funktionen $f_1 \,..\, f_\lambda F_1 \,..\, F_\lambda$ von einander unabhängig sind. Aus der Identität (1) folgt, indem man die Koeffizienten von $dx_1 \,..\, dx_n$ links und rechts vergleicht:

$$a_\iota \equiv F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + F_\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\iota} \qquad (i = 1 \,..\, n) \tag{2}$$

und hieraus:

$$a_{ik} \equiv \frac{\partial a_\iota}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_\iota} \equiv \sum_1^\lambda {}^{s} \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_k}\frac{\partial f_s}{\partial x_i} - \frac{\partial F_s}{\partial x_i}\frac{\partial f_s}{\partial x_k} \right). \tag{3}$$

Bilden wir demnach die beiden zu $\varDelta$ gehörigen Matrices

$$(B) \begin{Vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & .. & a_n \\ -a_1 & 0 & a_{12} & .. & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ -a_n & a_{n1} & a_{n2} & .. & 0 \end{Vmatrix}; \quad (C) \;\| a_{\iota k} \| \quad (i, k = 1 \,..\, n)$$

so zeigen die Identitäten (3), daſs die Matrix (C) entsteht, indem man die folgenden beiden Matrices:

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} .. \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} .. \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} .. \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} .. \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_n} \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} .. \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1}; & -\frac{\partial F_1}{\partial x_1} .. -\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} .. \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_n}; & -\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_n} .. -\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_n} \end{Vmatrix} \tag{4}$$

zeilenweise komponirt. Ebenso ergiebt sich die Matrix (B) durch zeilenweise Komposition der nachstehenden beiden Schemata:

$$(5)\qquad \left\| \begin{matrix} F_1 & \cdots & F_\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & -F_1 & \cdots & -F_\lambda \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1}; & -\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_n}; & -\frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & -\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| .$$

Da in einer Matrix, die durch Zeilenkomposition zweier Matrices mit nur 2λ Spalten entsteht, bekanntlich alle Determinanten von höheren als dem $2\lambda^{\text{ten}}$ Grade identisch null sind, so folgt aus dem obigen die schon früher bewiesene Thatsache, dafs ein Ausdruck mit einer Normalform (1) notwendig die Klasse 2λ besitzen mufs.

Nach Art. 97 dürfen wir im gegenwärtigen Falle annehmen, dafs die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1,2\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2\lambda,1} & a_{2\lambda,2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \equiv (1, 2, \ldots 2\lambda)^2 \equiv P^2$$

nicht identisch null ist. Diese Determinante entsteht aber, indem man von den beiden Matrices (4) je die 2λ ersten Zeilen komponirt, und es folgt

$$P \equiv (1, 2 \ldots 2\lambda) \equiv \pm \begin{pmatrix} F_1 \ldots F_\lambda f_1 \ldots f_\lambda \\ x_1\, x_2 \quad \ldots \quad x_{2\lambda} \end{pmatrix}.$$

Um das Vorzeichen zu bestimmen, beachten wir, dafs diese Identität stattfinden mufs, was auch die Funktionen F, f bedeuten mögen; es genügt daher, für diese Funktionen irgend eine spezielle Annahme einzuführen. Wir setzen

$$F_i \equiv x_{2i},\; f_i \equiv x_{2i-1} \qquad (i = 1 \ldots \lambda);$$

dann werden die Gröfsen:

$$(6)\qquad a_{12},\; a_{34} \;\ldots\; a_{2\lambda-1,2\lambda}$$

alle gleich 1, die übrigen a_{ik} dagegen alle null, und P reduzirt sich auf das Produkt der Elemente (6), d. h. auf die Einheit, während die nach $x_1 \ldots x_{2\lambda}$ genommene Funktionaldeterminante der F, f den Wert $(-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)}$ annimmt. Man hat daher:

$$(7)\qquad P \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)} \begin{pmatrix} F_1 F_2 \ldots F_\lambda f_1 f_2 \ldots f_\lambda \\ x_1\, x_2 \quad \ldots \quad x_{2\lambda} \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt zunächst: „*Ist die Klasse $\varkappa$ eines Pfaff'schen Ausdruckes Δ gleich 2λ, und ist das Pfaff'sche Aggregat P nicht null, so* *sind die 2λ Funktionen F_ι, f_ι, die in irgend einer Normalform von Δ auftreten, hinsichtlich der Variabeln $x_1 x_2 \ldots x_{2\lambda}$ von einander unabhängig.*"

Hat das Symbol $\Pi_{k,\nu}$ dieselbe Bedeutung wie in Art. 31, so erhält man ohne Weiteres die Identität:

$$(8)\qquad \Pi_{k,\nu} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)} \begin{pmatrix} F_1 & \ldots & F_\lambda f_1 & \ldots & f_\lambda \\ x_1 & \ldots & x_{k-1} x_\nu x_{k+1} & \ldots & x_{2\lambda} \end{pmatrix}$$

$$(\nu = 2\lambda + 1,\ 2\lambda + 2, \ldots n).$$

Ferner entsteht der in Art. 31 mit $\Pi_{k,0}$ bezeichnete Ausdruck dadurch aus P, dafs man in der Funktionaldeterminante auf der rechten Seite von (7) die Zeile:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_k}\ \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \cdots \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_k}\ \frac{\partial f_1}{\partial x_k}\ \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \cdots \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k}$$

durch die folgende ersetzt:

$$F_1 F_2 \ldots F_\lambda\, 0\, 0 \ldots 0.$$

Entwickelt man die so erhaltene Determinante nach den Elementen dieser Zeile, so folgt:

$$(9)\quad \Pi_{k,0} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)+k} \sum_1^\lambda (-1)^s F_s \begin{pmatrix} F_1 \ldots F_{s-1} F_{s+1} \ldots F_\lambda f_1 \ldots f_\lambda \\ x_1 \quad \ldots \quad x_{k-1} x_{k+1} \ldots x_{2\lambda} \end{pmatrix}.$$

128. Ist $\varkappa = 2\lambda$ die Klasse von Δ, und das Pfaff'sche Aggregat P nicht identisch null, so besitzen die linearen Gleichungen

$$(10)\qquad a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{in}\xi_n = a_i\xi_0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

genau $n - \varkappa + 1$ linear unabhängige Lösungensysteme, die in Art. 31 angegeben wurden. Wir wollen diese Lösungensysteme folgendermafsen bezeichnen

$$(11)\qquad \xi_1^{(s)} \xi_2^{(s)} \ldots \xi_n^{(s)},\ 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots n - \varkappa)$$

$$(12)\qquad \xi_1^{(0)} \xi_2^{(0)} \ldots \xi_n^{(0)},\ \xi_0^{(0)}$$

so dafs also gesetzt wird

$$(13)\qquad \xi_i^{(s)} \equiv \Pi_{i,\,2\lambda+s};\ \xi_{2\lambda+s}^{(s)} \equiv -P;\ \xi_{2\lambda+t}^{(s)} \equiv 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots 2\lambda;\ s, t = 1, 2, \ldots n - 2\lambda;\ s \gtrless t)$$

$$(14)\ \xi_i^{(0)} \equiv \Pi_{i0};\ \xi_{2\lambda+k}^{(0)} \equiv 0,\ \xi_0^{(0)} \equiv -P \quad (i = 1 \ldots 2\lambda;\ k = 1 \ldots n - 2\lambda).$$

Wir setzen jetzt zur Abkürzung

$$X_s f \equiv \xi_1^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$X_0 f \equiv \Pi_{10} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \Pi_{20} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \Pi_{2\lambda,0} \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda}}$$

$$X_h f \equiv \Pi_{1,2\lambda+h} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \Pi_{2\lambda,2\lambda+h} \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda}} - P \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda+h}}$$

$$(h = 1, 2, \ldots n - 2\lambda)$$

und betrachten die folgenden beiden Systeme linearer partieller Differentialgleichungen, die wir mit V und W bezeichnen, und von denen das erste alle Gleichungen des zweiten enthält:

(V) $\quad X_s f \equiv 0 \qquad (s = 0, 1 \ldots n - \varkappa)$

(W) $\quad X_h f = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots n - \varkappa).$

Dann gelten die Sätze:

Das System V ist ein $n - \varkappa + 1$-gliedriges vollständiges System, und die Funktionen

(15) $$\frac{F_1}{F_\lambda}, \frac{F_2}{F_\lambda} \cdots \frac{F_{\lambda-1}}{F_\lambda}, f_1, f_2, \cdots f_\lambda$$

sind $\varkappa - 1$ unabhängige Integrale desselben.

Das System W ist ein $n - \varkappa$-gliedriges vollständiges System und besitzt die $\varkappa$ unabhängigen Integrale

(16) $$F_1, F_2, \ldots F_\lambda, f_1, f_2, \ldots f_\lambda.$$

Im Falle $\varkappa = n$, d. h. wenn Δ einen bedingungslosen Ausdruck mit gerader Variabelnzahl bedeutet, existirt überhaupt kein System W, und V enthält blos *eine* Gleichung (nämlich die Gleichung (20) des Art. 108).

Der zweite Teil des obigen Satzes ergiebt sich unmittelbar aus den Formeln (7) (8); man findet:

$$(-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)} X_s f \equiv \sum_1^{2\lambda} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \ldots F_\lambda & f_1 & \ldots & f_\lambda \\ x_1 \ldots x_{k-1} & x_{2\lambda+s} & x_{k+1} \ldots & x_{2\lambda} \end{pmatrix}$$
$$- \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda+s}} \begin{pmatrix} F_1 \cdots f_\lambda \\ x_1 \ldots x_{2\lambda} \end{pmatrix}$$

und demnach:

$$(-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)} X_s f \equiv - \begin{pmatrix} f, & F_1 & \ldots & F_\lambda & f_1 & \ldots & f_\lambda \\ x_{2\lambda+s} & x_1 & \ldots & x_\lambda & x_{\lambda+1} & \ldots & x_{2\lambda} \end{pmatrix} \quad (s = 1, 2 \ldots n - 2\lambda);$$

daher sind die Gleichungen W in der That erfüllt, wenn f eine willkürliche Funktion der Gröfsen (16) bedeutet; nach Art. 64 ist also W ein $n-\varkappa$-gliedriges vollständiges System.

Dieses vollständige System ist hinsichtlich der Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+1}}\,\frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+2}}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

auflösbar, und dies steht mit der Thatsache, dafs die Funktionen (16) hinsichtlich $x_1\,..\,x_{2\lambda}$ unabhängig sind, im Einklang.

Um auch den ersten Teil des obigen Theorems nachzuweisen, beachten wir, dafs vermöge (9) und (14) identisch:

$$(-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)}X_0f\equiv\sum_1^{2\lambda}{}_\iota\sum_1^{\lambda}{}_s(-1)^{\iota+s}\frac{\partial f}{\partial x_\iota}F_s\begin{pmatrix}F_1\,..\,F_{s-1}F_{s+1}\,..\,F_\lambda f_1\,..\,f_\lambda\\ x_1\,..\,x_{\iota-1}\,x_{\iota+1}\;\;..\;\;x_{2\lambda}\end{pmatrix}$$

also, wie man leicht verifizirt:

$$(-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)}X_0f\equiv-\begin{vmatrix}0 & F_1 & \cdot\cdot & F_\lambda & 0 & \cdot\cdot & 0\\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda}} & \frac{\partial F_1}{\partial x_{2\lambda}} & \cdot\cdot & \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2\lambda}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{2\lambda}} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2\lambda}}\end{vmatrix}.$$

Diese $2\lambda+1$-reihige Determinante verschwindet identisch, wenn f durch eines der f_i ersetzt wird. Subtrahirt man ferner die Elemente der mit $\frac{F_1}{F_\lambda}$ multiplizirten $\lambda+1^{\text{ten}}$ Spalte von denjenigen der zweiten, und ersetzt in der so umgeformten Determinante die Funktion f durch den Quotienten $\frac{F_1}{F_\lambda}$, so werden die Elemente der beiden ersten Spalten proportional. In derselben Weise zeigt man, dafs die Gleichung $X_0f=0$ durch den Quotienten irgend zweier Funktionen F_i befriedigt wird. Das System V besitzt darnach in der That die $\varkappa-1$ Integrale (15), und ist daher nach Art. 64 vollständig.

Man erkennt gleichzeitig: Ist das Pfaff'sche Aggregat $\Pi_{2\lambda,0}$ nicht identisch null, was nach Art. 97 immer vorausgesetzt werden darf, so ist das vollständige System V nach den Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}\,\frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+1}}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

auflösbar, und die Funktionen (15) sind daher hinsichtlich $x_1\,..\,x_{2\lambda-1}$ von einander unabhängig. Übrigens verifizirt man mit Hülfe der

Identität (9) leicht, dafs $\Pi_{2\lambda,0}$ der mit $\pm F_\lambda^\lambda$ multiplizirten, nach $x_1 \,.\,.\, x_{2\lambda-1}$ genommenen Funktionaldeterminante der $2\lambda - 1$ Funktionen (15) gleich ist.

§ 2. Die vollständigen Systeme V und W für den Fall einer ungeraden Klasse.

129. Wir wenden uns nunmehr zu der Betrachtung eines Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$ mit der Klasse $\varkappa = 2\lambda - 1$. In diesem Falle können wir die beiden Pfaff'schen Aggregate

$$P' \equiv (1, 2, \,.\,.\, 2\lambda - 2); \; Q \equiv (0, 1, \,.\,.\, 2\lambda - 2, 2\lambda - 1)$$

als nicht identisch verschwindend voraussetzen. Denken wir uns daher den Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ nach der Methode von § 2 des vor. Kap. auf die Form

$$F_1 df_1 + \cdots + F_\lambda df_\lambda$$

gebracht, so folgt aus der Identität (7) des vorigen §, da P jetzt $\equiv 0$ ist, dafs zwischen den Funktionen $F_1 \,.\,.\, F_\lambda f_1 \,.\,.\, f_\lambda$ eine identische Relation besteht, *aber auch nur eine*; denn beachtet man, dafs das Pfaff'sche Aggregat Q mit $-\Pi_{2\lambda,0}$ identisch ist, so folgt aus der Schlufsbemerkung des vorigen §, dafs die Funktionen

$$\frac{F_1}{F_\lambda} \frac{F_2}{F_\lambda} \,.\,.\, \frac{F_{\lambda-1}}{F_\lambda}, f_1, f_2, \,.\,.\, f_\lambda$$

hinsichtlich der Variabeln $x_1, x_2, \,.\,.\, x_{2\lambda-1}$ unabhängig sind. Diese Thatsache läfst sich offenbar auch so aussprechen:

„*Ist der Rang $\varkappa_1$ einer Pfaff'schen Gleichung*

$$\varDelta \equiv \sum a_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) dx_i = 0$$

gleich 2λ, so darf man, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, das Pfaff'sche Aggregat

$$Q \equiv (0, 1, \,.\,.\, 2\lambda - 2, 2\lambda - 1)$$

als nicht identisch verschwindend voraussetzen. Hat man dann die Gleichung $\varDelta = 0$ auf irgend eine reduzirte Form

(1) $$dz_\lambda + z_{\lambda+1} dz_1 + z_{\lambda+2} dz_2 + \cdots + z_{2\lambda-1} dz_{\lambda-1} = 0$$

mit λ Differentialelementen gebracht, so sind die Funktionen $z_1 z_2 \,.\,.\, z_{2\lambda-1}$ insbesondere hinsichtlich der Variabeln $x_1 x_2 \,.\,.\, x_{2\lambda-1}$ von einander unabhängig.“

130. Wir denken uns jetzt den Ausdruck $\varDelta$ auf irgend eine *Normalform*

(2) $$\varDelta \equiv df_\lambda + F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_{\lambda-1} df_{\lambda-1}$$

gebracht. Dann gelten die Identitäten:

$$(3)\qquad a_\iota \equiv \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\iota} + F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_\iota} + F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_\iota} + \cdots + F_{\lambda-1}\frac{\partial f_{\lambda-1}}{\partial x_\iota}$$

$$(4)\qquad a_{ik} \equiv \sum_1^{\lambda-1}{}_s \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_k}\frac{\partial f_s}{\partial x_i} - \frac{\partial F_s}{\partial x_\iota}\frac{\partial f_s}{\partial x_k}\right) \quad (i, k, = 1\,.\,.\,n).$$

Die zu dem Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ gehörige Matrix (C) entsteht also durch zeilenweise Komposition der folgenden beiden:

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,.\,\frac{\partial F_{\lambda-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,.\,\frac{\partial f_{\lambda-1}}{\partial x_1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\,.\,\frac{\partial F_{\lambda-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\,.\,\frac{\partial f_{\lambda-1}}{\partial x_n} \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,.\,\frac{\partial f_{\lambda-1}}{\partial x_1}, & -\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,.\,-\frac{\partial F_{\lambda-1}}{\partial x_1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\,.\,\frac{\partial f_{\lambda-1}}{\partial x_n}, & -\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\,.\,-\frac{\partial F_{\lambda-1}}{\partial x_n} \end{Vmatrix};$$

ebenso erhält man die Matrix (B) durch Zeilenkomposition der Schemata

$$\begin{Vmatrix} 1, & 0, & F_1, & F_2, & \cdot\,\cdot & F_{\lambda-1}, & 0, & 0, & \cdot\,\cdot & 0 \\ 0, & \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{d x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial F_{\lambda-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial f_{\lambda-1}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial F_{\lambda-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial f_{\lambda-1}}{\partial x_n} \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 0, & -1, & 0, & 0, & \cdot\,\cdot & 0, & -F_1, & -F_2, & \cdot\,\cdot & -F_{\lambda-1} \\ \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1} & 0, & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial f_{\lambda-1}}{\partial x_1} & -\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & -\frac{\partial F_{\lambda-1}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_n} & 0, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial f_{\lambda-1}}{\partial x_n} & -\frac{\partial F_1}{\partial x_n} & -\frac{\partial F_2}{\partial x_n} & \cdot\,\cdot & -\frac{\partial F_{\lambda-1}}{\partial x_n} \end{Vmatrix}.$$

Aus diesen Thatsachen folgert man auch umgekehrt leicht, daſs eine Normalform (2) nur einem Ausdruck der Klasse $2\lambda - 1$ zukommt.

Ferner erhält man ganz ähnlich wie im vorigen § die nachstehenden Identitäten, in denen die Bezeichnungsweise des Art. 32 benutzt wird:

$$(5)\qquad P' \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)}\begin{pmatrix} F_1\,F_2\,.\,.\,F_{\lambda-1}f_1f_2\,.\,.\,f_{\lambda-1} \\ x_1\;x_2\quad .\,.\quad x_{2\lambda-2}\end{pmatrix};$$

$$(6)\qquad \Pi'_{k\nu} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)}\begin{pmatrix} F_1\;\cdots\;F_{\lambda-1}f_1\,.\,.\,f_{\lambda-1} \\ x_1\,.\,.\,x_{k-1}x_\nu x_{k-1}\,.\,.\,x_{2\lambda-2}\end{pmatrix};$$

$$(k = 1, 2, .\,.\,2\lambda - 2;\; \nu = 2\lambda - 1, 2\lambda, .\,.\,n);$$

$$(7)\qquad Q \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)} \begin{pmatrix} f_\lambda, F_1 \,.\,. F_{\lambda-1} f_1 \,.\,. f_{\lambda-1} \\ x_1\; x_2 \quad .\,. \quad x_{2\lambda-1} \end{pmatrix};$$

$$(8)\qquad K_{k,\nu} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)} \begin{pmatrix} f_\lambda, F_1 \quad .\,. \quad .\,. \quad .\,. \quad f_{\lambda-1} \\ x_1\; x_2 \,.\,. x_{k-1} x_\nu x_{k+1} \,.\,. x_{2\lambda-1} \end{pmatrix};$$

$$(k = 1, 2, .\,. 2\lambda - 1;\ \nu = 2\lambda, 2\lambda + 1, .\,. n).$$

Das Vorzeichen in (7) wird dadurch bestimmt, dafs man die spezielle Annahme

$$f_\lambda \equiv x_1;\ f_\iota = x_{2\iota};\ F_i \equiv x_{2i+1} \qquad (i = 1, 2, .\,. \lambda - 1)$$

einführt, für welche $Q \equiv 1$, die in (7) rechtsstehende Funktionaldeterminante aber gleich $(-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)}$ wird.

Aus (5) und (7) folgt zunächst:

Unter den über $\varDelta$ gemachten Annahmen sind die in der Normalform auftretenden Funktionen

$$(9)\qquad f_\lambda, F_1 F_2 \,.\,. F_{\lambda-1}, f_1, f_2, .\,. f_{\lambda-1}$$

hinsichtlich $x_1 \,.\,. x_{2\lambda-1}$, *und die Funktionen*

$$(10)\qquad F_1 F_2 \,.\,. F_{\lambda-1} f_1 f_2 \,.\,. f_{\lambda-1}$$

hinsichtlich der Variabeln $x_1 \,.\,. x_{2\lambda-2}$ *unabhängig.*"

131. Unter den gegenwärtigen Voraussetzungen besitzen die Gleichungen

$$(11)\qquad a_{\iota 1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{\iota n}\xi_n = 0 \quad (i = 1 \,.\,. n)$$

$$(12)\qquad a_1\,\xi_1 + a_2\,\xi_2 + \cdots + a_n\,\xi_n = 0$$

genau $n - \varkappa$ linear unabhängige Lösungensysteme

$$\xi_1^{(s)} \xi_2^{(s)} \,.\,. \xi_n^{(s)} \qquad (s = 1, 2, .\,. n - \varkappa).$$

Dabei können wir nach Art. 32 setzen:

$$(13)\qquad \xi_i^{(s)} \equiv K_{\iota, \varkappa+s};\quad \xi_{\varkappa+s}^{(s)} \equiv -Q;\quad \xi_{\varkappa+t}^{(s)} \equiv 0$$

$$(i = 1, 2, .\,. 2\lambda - 1;\ s, t = 1, 2, .\,. n - 2\lambda + 1;\ s \gtrless t).$$

Die Gleichungen (11) besitzen aufserdem noch ein $n - \varkappa + 1^{\text{tes}}$ Lösungensystem, das (12) nicht befriedigt:

$$\xi_1^{(0)} \xi_2^{(0)} \,.\,. \xi_n^{(0)}.$$

Dieses Lösungensystem kann mit dem folgenden identifizirt werden:

$$(14)\qquad \Pi'_{1, 2\lambda-1} \Pi'_{2, 2\lambda-1} \,.\,. \Pi'_{2\lambda-2, 2\lambda-1}, -P', 0, .\,. 0.$$

Wir setzen jetzt zur Abkürzung:

$$X_s f \equiv \xi_1^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdot\cdot + \xi_n^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$X_0 f \equiv \Pi'_{1,2\lambda-1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdot\cdot + \Pi'_{2\lambda-2,\,2\lambda-1} \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda-2}} - P' \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda-1}}$$

$$X_h f \equiv K_{1,\varkappa+h} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdot\cdot + K_{\varkappa,\varkappa+h} \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda-1}} - Q \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+h}}$$

$$(h = 1, 2, .. n - 2\lambda + 1)$$

und betrachten die folgenden beiden Systeme partieller Differentialgleichungen:

(V) $$X_s f = 0 \qquad (s = 0, 1, .. n - \varkappa)$$

(W) $$X_h f = 0 \qquad (h = 1, 2, .. n - \varkappa).$$

Dann gelten folgende Sätze:

Die Gleichungen V bilden ein $n - \varkappa + 1$-gliedriges vollständiges System mit den $\varkappa - 1$ unabhängigen Integralen

(10) $$F_1 F_2 .. F_{\lambda-1} f_1 f_2 .. f_{\lambda-1}.$$

Die Gleichungen W bilden ein $n - \varkappa$-gliedriges vollständiges System mit den $\varkappa$ unabhängigen Lösungen

(9) $$f_\lambda, F_1 .. F_{\lambda-1}, f_1 .. f_{\lambda-1}.$$

Man findet nämlich mit Rücksicht auf die Identitäten (5) bis (8) und die vorhin definirte Bedeutung der Koeffizienten $\xi_\iota^{(s)}$:

$$(-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)} X_s f \equiv -\begin{pmatrix} f, f_\lambda, F_1 .. F_{\lambda-1} f_1 .. f_{\lambda-1} \\ x_{\varkappa+s}, x_1 \quad .. \quad x_{2\lambda-1} \end{pmatrix} \; (s = 1, .. n - \varkappa)$$

(15) $$(-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)} X_0 f \equiv -\begin{pmatrix} f, \; F_1 .. F_{\lambda-1} f_1 .. f_{\lambda-1} \\ x_{2\lambda-1} x_1 \quad .. \quad x_{2\lambda-2} \end{pmatrix}$$

woraus nach Art. 64 die Richtigkeit unserer Behauptungen sofort folgt.

Auch ersieht man ohne weiteres, dafs das vollständige System V nach den Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+1}} \cdot\cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

und das vollständige System W nach den Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+1}} \cdot\cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

aufgelöst werden kann, was mit der Thatsache übereinstimmt, dafs die Funktionen (10) hinsichtlich $x_1 \,.\,.\, x_{\varkappa-1}$, und die Funktionen (9) hinsichtlich $x_1 \,.\,.\, x_\varkappa$ unabhängig sind. (Art. 63).

§ 3. Verschiedene Eigenschaften der Systeme V und W.

132. Die Resultate der letzten zwei Paragraphen lassen sich folgendermafsen resumiren:

Zu jedem Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ der Klasse $\varkappa$ gehören zwei ganz bestimmte vollständige Systeme V und W; das System V ist $n - \varkappa + 1$-gliedrig, besteht aus allen Gleichungen

$$Xf \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

deren Koeffizienten einem linearen Relationensystem der Form

$$a_{\iota 1}\xi_1 + a_{\iota 2}\xi_2 + \cdots + a_{in}\xi_n = a_i \xi_0 \,^{1)} \quad (i = 1, 2, \,.\,.\, n) \tag{2}$$

genügen, und ist unter den Voraussetzungen des Art. 97 nach den Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} \; \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+1}} \,.\,.\, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

auflösbar; ist $\varkappa = 2\lambda$, und

$$\varDelta \equiv F_1 df_1 + \cdots + F_\lambda df_\lambda, \tag{3}$$

so bilden die f_i und die Verhältnisse der F_ι ein System von $\varkappa - 1$ unabhängigen Integralen des Systems V; ist $\varkappa = 2\lambda - 1$ und

$$\varDelta \equiv df_\lambda + F_1 df_1 + \cdots + F_{\lambda-1} df_{\lambda-1} \tag{4}$$

so sind $F_1 \,.\,.\, F_{\lambda-1} f_1 \,.\,.\, f_{\lambda-1}$ die unabhängigen Lösungen von V.

Das System W ist $n - \varkappa$-gliedrig, in V enthalten und besteht aus allen Gleichungen (1), deren Koeffizienten den linearen Gleichungen:

$$\sum_1^n {}^k a_{\iota k}\xi_k = 0, \quad \sum_1^n {}^k a_k \xi_k = 0 \quad (i = 1 \,.\,.\, n) \tag{5}$$

genügen; unter den Annahmen des Art. 97 läfst es sich nach den Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+1}} \; \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+2}} \,.\,.\, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

auflösen; seine Integrale sind die $\varkappa$ unabhängigen, in irgend einer Normalform von $\varDelta$ auftretenden Funktionen; hat man im Falle

1) bei ungeradem $\varkappa$ ist $\xi_0 \equiv 0$ eine Folge von (2).

$\varkappa = 2\lambda - 1$ den Ausdruck $\varDelta$ nach der Grassmann'schen Methode au die Form

$$\sigma(z_1 \cdot\cdot z_{2\lambda-1})(dz_\lambda + z_{\lambda+1}dz_1 + \cdot\cdot + z_{2\lambda-1}dz_{\lambda-1})$$

gebracht, so bilden auch die Funktionen $z_1 \,.\,.\, z_{2\lambda-1}$ ein System un abhängiger Integrale von W.

133. Für einen bedingungslosen Ausdruck $\varDelta$ giebt es kein System W, und V reduzirt sich auf *eine* Gleichung:

$$\Pi_{10}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \Pi_{20}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdot\cdot + \Pi_{n0}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{6}$$

beziehungsweise:

$$\Pi'_{1n}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \Pi'_{2n}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdot\cdot + \Pi'_{n-1,n}\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} - P'\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{7}$$

je nachdem $n = 2\lambda$ oder $2\lambda - 1$ ist. Dabei haben $\Pi_{\iota k}$ und $\Pi'_{\iota\lambda}$ die in Art. 31 und 32 erklärte Bedeutung. So besteht z. B. für den Pfaff'schen Ausdruck:

$$\nabla \equiv Xdx + Ydy + Zdz \tag{8}$$

im Falle $\varkappa = 3$ das vollständige System V aus der einen Gleichung:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

Diese Gleichung repräsentirt, falls $\varkappa = 2$, also die Gleichung $\nabla = 0$ exakt ist, das vollständige System W, während jetzt V aus den 2 Relationen besteht, die sich durch Nullsetzen aller zweireihigen Determinanten des Schemas

$$\left\Vert \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z} \\ X, & Y, & Z \end{matrix} \right\Vert$$

ergeben. Hat man den Ausdruck (8) auf die Normalform ϱdf gebracht, so sind die Funktionen ϱ und f die beiden unabhängigen Integrale der Gleichung (9) und f ist die Lösung des zweigliedrigen Systems V.

Bei der Integration von (9) kann man sich des Satzes bedienen, daſs diese Gleichung den Jacobi'schen Multiplikator eins besitzt (Art. 56): hat man also ein Integral derselben durch eine Operation 2 bestimmt, so erhält man das zweite durch eine Quadratur. Allgemein zeigt die Identität (15) des Art. 131, daſs die partielle Differentialgleichung (7), auf welche sich das vollständige System V im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1 = n$ reduzirt, den Jacobi'schen Multiplikator 1 besitzt, und es läſst sich auch direkt leicht nachweisen, daſs die Identität

$$\frac{\partial \Pi'_{1n}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi'_{2n}}{\partial x_2} + \cdot\cdot + \frac{\partial \Pi'_{n-1,n}}{\partial x_{n-1}} - \frac{\partial P'}{\partial x_n} = 0$$

stattfindet.

Im Falle $\varkappa = 2$ (und nur in diesem) besteht das vollständige System V aus den $n - 1$ unabhängigen Gleichungen, die sich durch Nullsetzen aller zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot\cdot & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ a_1 & a_2 \cdot\cdot & a_n \end{Vmatrix}$$

ergeben, also aus dem zu der Gleichung $\varDelta = 0$ *adjungirten* System partieller Differentialgleichungen; das System W ist dann $n - 2$-gliedrig und enthält alle Gleichungen der Form:

$$(10) \qquad a_{\iota k} \frac{\partial f}{\partial x_l} + a_{k l} \frac{\partial f}{\partial x_\iota} + a_{l \iota} \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \quad (i, k, l = 1, \ldots n).$$

Hat man etwa $a_{12} \neq 0$, so genügt es, diejenigen dieser Gleichungen beizubehalten, für die $i = 1$, $k = 2$ ist; die Gleichungen (10) besitzen die Integrale ϱ und f, wenn ϱdf eine Normalform von $\varDelta$ bedeutet.

Im Falle $\varkappa = 1$ wird V n-gliedrig, also bedeutungslos, und W ist mit dem zu $\varDelta = 0$ adjungirten System identisch.

134. Aus der Definition der beiden vollständigen Systeme V und W ergiebt sich fast unmittelbar eine wichtige Eigenschaft derselben. Führen wir nämlich in den Ausdruck $\varDelta$ statt der x_ι neue Veränderliche $y_1 \ldots y_n$ ein, wodurch $\varDelta$ in $\varDelta'$ übergehe, so verwandeln sich die in der Normalform von $\varDelta$ auftretenden $\varkappa$ Funktionen F, f in gewisse Funktionen Φ, φ der Variabeln y, d. h. die Normalform von $\varDelta$ geht direkt in eine Normalform von $\varDelta'$ über. Da nun ein p-gliedriges vollständiges System durch Angabe von $n - p$ unabhängigen Integralen bestimmt ist, so erkennen wir, dafs die beiden vollständigen Systeme V und W vermöge unserer Variabelntransformation in die zu $\varDelta'$ gehörigen vollständigen Systeme V bezw. W mit den Independenten $y_1 \ldots y_n$ überbeführt werden. Wir geben dieser Thatsache dadurch Ausdruck, dafs wir sagen: *Die beiden vollständigen Systeme V und W sind mit dem Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ „invariant verknüpft" oder auch „covariant".*

135. Unter der Annahme $\varkappa = 2\lambda$ besteht eine Identität:

$$\varDelta \equiv F_\lambda(d\xi_\lambda + \xi_{\lambda+1} d\xi_1 + \cdot + \xi_{2\lambda-1} d\xi_{\lambda-1})$$

wobei $\xi_i \equiv f_i$, $\xi_{\lambda+k} \equiv \frac{F_k}{F_\lambda}$ gesetzt wurde. Dabei ist

$$(11) \qquad \varDelta_1 \equiv d\xi_\lambda + d\xi_{\lambda+1} d\xi_1 + \cdot\cdot + \xi_{2\lambda-1} d\xi_{\lambda-1}$$

ein bedingungsloser Pfaff'scher Ausdruck in $\varkappa - 1$ Variabeln. Führen wir daher in $\varDelta_1$ mittels der Transformation

$$y_i = \psi_i(\xi_1 \xi_2 \,..\, \xi_{2\lambda - 1}) \qquad (i = 1, 2, \,..\, 2\lambda - 1)$$

neue Veränderliche $y_1 \,..\, y_{\varkappa-1}$ ein, so erhalten wir einen bedingungslosen Ausdruck in $y_1 \,..\, y_{\varkappa-1}$. Da nun die $\varkappa - 1$ Funktionen ψ_i das allgemeinste Lösungensystem von V darstellen, so ist der Satz bewiesen:

Führt man unter der Voraussetzung $\varkappa = 2\lambda$ in den Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ irgend $\varkappa - 1$ unabhängige Integrale

$$(12) \qquad y_i = \varphi_i(x_1 x_2 \,..\, x_n) \qquad (i = 1, 2, \,..\, 2\lambda - 1)$$

des vollständigen Systems V nebst beliebigen andern Funktionen $y_\varkappa$, $y_{\varkappa+1} \,..\, y_n$ statt der x als neue Veränderliche ein, so erhält $\varDelta$ die Form:

$$\varDelta \equiv \sigma \varDelta' \equiv \sigma \cdot \sum_1^{\varkappa-1} {}^i \, b_i(y_1 y_2 \cdots y_{\varkappa-1}) dy_i$$

worin $\varDelta'$ einen bedingungslosen Ausdruck in den $\varkappa - 1$ Variabeln $y_1 \,..\, y_{\varkappa-1}$ bedeutet, und σ nicht durch $y_1 \,..\, y_{\varkappa-1}$ allein ausdrückbar ist.

Umgekehrt kann ein bedingungsloser Ausdruck $\varDelta'$ in $\varkappa - 1$ Variabeln $y_1 \,..\, y_{\varkappa-1}$ stets die Form (11) erhalten; man schliefst daraus leicht, dafs unsere Transformation die allgemeinste von der angegebenen Beschaffenheit ist.

Die Funktionen $\varphi_1 \,..\, \varphi_{\varkappa-1}$ sind hinsichtlich $x_1 \,..\, x_{\varkappa-1}$ unabhängig (Art. 128 und 63); also stellen die Gleichungen (12) zusammen mit den folgenden:

$$y_h = x_h \qquad (h = \varkappa, \varkappa + 1 \,..\, n)$$

eine Variabelntransformation dar, die nach den x aufgelöst so lauten möge:

$$(13) \quad x_i = \psi_i(y_1 y_2 \,..\, y_n);\ x_h = y_h \quad (i = 1 \,..\, \varkappa - 1;\ h = \varkappa, \,..\, n).$$

Aus der Identität $\varDelta \equiv \sigma \varDelta'$ folgt jetzt:

$$(14) \qquad \sum a_s(x_1 \,..\, x_n) \frac{\partial x_s}{\partial y_i} \equiv \sigma \cdot b_i(y_1 \,..\, y_{\varkappa-1})$$

$$\sum a_s(x_1 \,..\, x_n) \frac{\partial x_s}{\partial y_h} \equiv 0 \quad (i = 1 \,..\, \varkappa - 1; h = \varkappa, \,..\, n)$$

worin die x_i überall durch ihre Ausdrücke (13) zu ersetzen sind. Da die Gleichungen (14) blos die Verhältnisse der b_i bestimmen, können wir $b_1 \equiv 1$ setzen, wodurch σ und übrigen b_i bestimmt sind. Da nun die Funktionen $\sigma \equiv F_\lambda$ und $\varphi_1 \,..\, \varphi_{\varkappa-1}$ ein System von $\varkappa$ unabhängigen

Integralen des vollständigen Systems W darstellen, so ergiebt sich der Satz:

Kennt man im Falle $\varkappa = 2\lambda$ ein System von $\varkappa - 1$ unabhängigen Integralen des vollständigen Systems V, so ergiebt sich das noch fehlende $\varkappa^{te}$ Integral von W durch bloſse Differentiationen und Eliminationen.

136. Durch eine ganz ähnliche Betrachtung wie in der vor. Nr. erhalten wir noch den Satz:

Führt man unter der Annahme $\varkappa = 2\lambda$ in den Ausdruck Δ irgend $\varkappa$ unabhängige Integrale $z_1 \ldots z_\varkappa$ von W als neue Variable ein, so verwandelt sich Δ in einen bedingungslosen Ausdruck mit $\varkappa$ Variabeln $z_1 \ldots z_\varkappa$, und man erhält auf diesem Wege die allgemeinste Variabelntransformation der genannten Beschaffenheit.

Hat z. B. Δ die Form (8) und ist $\varkappa = 2$, so besteht W aus der einen Gleichung (9), und der vorige Satz liefert Bertrand's Methode (Art. 126). Es zeigt sich auch jetzt wieder, daſs diese Methode einen Umweg bedeutet. In der That genügt es ja nach dem Obigen, um Δ auf die Normalform $\varrho\, df$ zu bringen, das Integral f des zu $\Delta = 0$ adjungirten zweigliedrigen Systems V durch eine Operation 1 zu bestimmen, worauf ϱ aus der Identität $\Delta \equiv \varrho\, df$ ohne weiteres folgt, während bei Bertrand's Methode die Operationen 2, 0 (Art. 133) und auſserdem noch eine Operation 1 erfordert wird.

137. Unter der Annahme $\varkappa = 2\lambda - 1$ besteht eine Identität

$$\Delta \equiv df_\lambda + F_1 df_1 + \cdots + F_{\lambda-1} df_{\lambda-1} \equiv df_\lambda + \Delta_1.$$

Setzen wir nun

$$y_i = \psi_i(F_1 \ldots F_{\lambda-1}, f_1 \ldots f_{\lambda-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots 2\lambda - 2)$$

wobei die ψ_i irgend $2\lambda - 2$ unabhängige Funktionen der eingeklammerten Gröſsen, also irgend $2\lambda - 2$ unabhängige Lösungen von V bedeuten, so wird Δ_1 ein bedingungsloser Ausdruck in den $2\lambda - 2$ Variabeln $y_1 \ldots y_{\varkappa-1}$.

Führt man also im Fall $\varkappa = 2\lambda - 1$ irgend $\varkappa - 1$ unabhängige Integrale

$$(15) \qquad y_i = \varphi_i(x_1 \ldots x_n) \quad (i = 1 \ldots \varkappa - 1)$$

des Systems V nebst beliebigen andern Funktionen $\varphi_\varkappa \ldots \varphi_n$ als neue Variable $y_1 \ldots y_n$ ein, so erhält Δ die Form:

$$\Delta \equiv d\psi + \Delta_1 \equiv d\psi + \sum_1^{\varkappa-1}{}^{s}\, b_s(y_1 \ldots y_{\varkappa-1})\, dy_s$$

wobei Δ_1 einen bedingungslosen Ausdruck in den $2\lambda - 2$ Veränderlichen

$y_1 \dots y_{\varkappa-1}$ *bedeutet, und die Funktion* ψ *nicht durch* $y_1 \dots y_{\varkappa-1}$ *allein ausgedrückt werden kann. Offenbar giebt es auch keine andere Variabelntransformation der angegebenen Eigenschaft.*

Da die $\varphi_1 \dots \varphi_{\varkappa-1}$ hinsichtlich $x_1 \dots x_{\varkappa-1}$ unabhängig sind, so bilden die Gleichungen (15) zusammen mit

$$y_h = x_h \qquad (h = \varkappa, \varkappa + 1, \dots n)$$

eine Transformation, die, nach den x aufgelöst, so lauten möge:

$$(16) \qquad x_i = \chi_i(y_1 \dots y_n);\ x_h = y_h \qquad (i = 1 \dots \varkappa - 1;\ h = \varkappa, \dots n).$$

Vermöge dieser Gleichungen bestehen dann Identitäten der Form:

$$\sum_1^n {}_s\, a_s \frac{\partial \chi_s}{\partial y_h} \equiv \frac{\partial \psi(y_1 \dots y_n)}{\partial y_h} \qquad (h = \varkappa, \varkappa + 1 \dots n)$$

$$\sum_1^n {}_s\, a_s \frac{\partial \chi_s}{\partial y_i} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y_i} + b_i(y_1 \dots y_{\varkappa-1}) \quad (i = 1 \dots \varkappa - 1)$$

wobei die a_s vermöge (16) durch die y auszudrücken sind. Da die Existenz einer Funktion ψ, die diesen Identitäten genügt, und nur bis auf eine additive willkürliche Funktion von $y_1 \dots y_{\varkappa-1}$ bestimmt ist, von vorneherein feststeht, so ist der Ausdruck:

$$\Omega_\varkappa dy_\varkappa + \Omega_{\varkappa+1} dy_{\varkappa+1} + \dots + \Omega_n dy_n$$

worin

$$\Omega_h \equiv \sum_1^n {}_s\, a_s \frac{\partial \chi_s}{\partial y_h}$$

gesetzt wurde, ein exaktes Differential $d\psi$, wenn die Gröſsen $y_1 \dots y_{\varkappa-1}$ als willkürliche Konstante gelten. Die Ermittelung von ψ erfordert demnach eine einzige Quadratur. Sind an der Stelle $x_1^0 \dots x_n^0$ alle a_i regulär und P' und Q nicht null, so können wir unter den Funktionen φ_i in (15) die Hauptintegrale des vollständigen Systems V hinsichtlich $x_{\varkappa+1} = x_{\varkappa+1}^0 \dots x_n = x_n^0$ verstehen. Dann sind die χ_i und infolgedessen auch die Ω_h an der Stelle $y_1 = x_1^0 \dots y_n = x_n^0$ regulär, und dasselbe gilt dann nach Art. 92 von der Funktion ψ. Da nun die Funktionen ψ, $y_1 \dots y_{\varkappa-1}$, in den x ausgedrückt, $\varkappa$ unabhängige Lösungen von W darstellen, so folgt:

Kennt man im Falle eines ungeraden $\varkappa$ *die Integrale des vollständigen Systems* V, *so läſst sich das noch fehlende* $\varkappa^{\text{te}}$ *Integral von* W *durch Differentiationen, Eliminationen und eine einzige Quadratur ermitteln.*

138. Wir betrachten wieder einen Pfaff'schen Ausdruck Δ der Klasse $\varkappa$ und gleichzeitig einen Ausdruck Δ' der Form $\varrho\Delta$, wobei ϱ irgend eine Funktion der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ bedeutet; es sei $\varkappa'$ die Klasse von Δ'. Ferner seien V' und W' die zu Δ' kovarianten vollständigen Systeme. Dann haben wir nach Art. 99 folgende vier Fälle zu unterscheiden.

1) $\varkappa = \varkappa' = 2\lambda$; dann hat Δ' die Normalform

$$\Delta' \equiv \varrho \sum_1^\lambda {}^i F_i \, df_i,$$

also stimmen die vollständigen Systeme V und V' überein, da sie nach Art. 128 dieselben Integrale haben.

2) $\varkappa = 2\lambda$, $\varkappa' = 2\lambda - 1$; dann haben Δ und Δ' die Normalformen

$$\Delta \equiv \frac{1}{\varrho}\left(d\Phi + \sum_1^{\lambda-1} {}^i \Phi_i \, d\varphi_i\right); \quad \Delta' \equiv d\Phi + \sum_1^{\lambda-1} {}^i \Phi_i \, d\varphi_i,$$

also stimmen jetzt die Systeme W' und V überein.

3) $\varkappa = 2\lambda - 1$; $\varkappa' = 2\lambda - 1$; W und W' sind identisch.

4) $\varkappa = 2\lambda - 1$; $\varkappa' = 2\lambda$; W und V' sind identisch.

Setzen wir ferner $\Delta'' \equiv \Delta + dw$, worin w eine beliebige Funktion von $x_1 \ldots x_n$ bedeutet, und bedeuten V'' und W'' die zu Δ'' kovarianten vollständigen Systeme, ferner $\varkappa''$ die Klasse von Δ'', so gelten, wie leicht ersichtlich, die vier analogen Sätze:

1) Ist $\varkappa = \varkappa'' = 2\lambda - 1$, so ist das System V mit V'' identisch.

2) Ist $\varkappa = 2\lambda - 1$, $\varkappa'' = 2\lambda - 2$, so ist das System V mit W'' identisch.

3) Ist $\varkappa = 2\lambda$, $\varkappa'' = 2\lambda + 1$, so ist das System W mit V'' identisch.

4) Ist $\varkappa = 2\lambda$, $\varkappa'' = 2\lambda$, so ist das System W mit W'' identisch.

139. Nachdem wir die Existenz der vollständigen Systeme V und W und ihre wichtigsten Eigenschaften erkannt haben, ist es von Interesse, Grassmann's Verfahren zur Herstellung einer reduzirten Form von unserm gegenwärtigen Standpunkte aus noch einmal zu erläutern.

Bei geradem $\varkappa$ hat man nach Art. 114 die $n - 1$ Integrale $y_1 \ldots y_{n-1}$ einer beliebigen Gleichung des vollständigen Systems V, nebst einer $n^{\text{t.n}}$ Funktion t als neue Variable einzuführen, und erhält so eine Identität der Form

$$\Delta \equiv \varrho\Delta' \equiv \varrho \sum_1^{n-1} b_i(y_1 \ldots y_{n-1}) \, dy_i. \tag{17}$$

Bei ungeradem $\varkappa$ bedeuten dagegen die $y_1 \ldots y_{n-1}$ die Integrale einer beliebigen Gleichung, die in dem System W enthalten ist, und es besteht wiederum eine Identität (17).

Es sei nun zunächst $\varkappa = 2\lambda$, und Δ' besitze dieselbe Klasse; dann ist nach der vor. Nr. das zu Δ' gehörige, kovariante System V' mit V identisch, *wenn alle n Variabeln $y_1 \ldots y_{n-1}$ t als Independente betrachtet werden.* Da aber Δ' von t ganz unabhängig ist, so lautet eine der Gleichungen von V' augenscheinlich:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{18}$$

und die übrigen $n - \varkappa$ Gleichungen von V' bilden für sich ein vollständiges System $\overline{V}$ in $n - 1$ Independenten.

Hat dagegen $\varDelta'$ eine um *eins* kleinere Klasse $\varkappa' = 2\lambda - 1$, so stimmt nach dem vor. Art. V mit W' überein; das System W' ist $n - \varkappa'$-gliedrig und enthält wiederum die Gleichung (18); die übrigen $n - \varkappa' - 1 = n - \varkappa$ Gleichungen bilden für sich ein vollständiges System $\overline{V}$ in $n - 1$ Independenten.

Wendet man nun die Grassmann'sche Reduktion auf den Ausdruck $\varDelta'$ von neuem an, so hat man in beiden Fällen die $n - 2$ Integrale $z_1 \,.\,.\, z_{n-2}$ einer beliebigen, im System $\overline{V}$ enthaltenen Gleichung nebst einer $n - 1^{\text{ten}}$ Funktion u statt der $y_1 \,.\,.\, y_{n-1}$ als neue Independente einzuführen.

Ist aber $\varkappa = 2\lambda - 1$, so hat man, falls $\varkappa < n - 1$, die Reduktion der Nr. 115 neuerdings auf $\varrho\varDelta'$ anzuwenden; da nun dieser Ausdruck von t nicht abhängt, so enthält das zu $\varrho\varDelta'$ kovariante System W' die Gleichung (18) und geht aus W direkt durch Einführung der Independenten $y_1 \,.\,.\, y_{n-1}\, t$ hervor.

Das Grassmann'sche Reduktionsverfahren ist demnach gleichbedeutend mit der folgenden Methode:

Man bestimme im Falle $\varkappa = 2\lambda$ die $2\lambda - 1$ Integrale $z_1 z_2 \,.\,.\, z_{2\lambda-1}$ des zu $\varDelta$ gehörigen vollständigen Systems V, im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ die $2\lambda - 1$ Integrale $z_1 \,.\,.\, z_{2\lambda-1}$ des Systems W, und zwar beidemale mit Hülfe der in Art. 61 auseinandergesetzten Methode successiver Substitution. Führt man dann die z_i statt ebensovieler x_ι als neue Independente ein, so erhält $\varDelta$ die Form:

$$\varDelta \equiv \sigma \varDelta_1 \equiv \sigma \sum_1^{2\lambda-1} {}_{i}\, b_\iota(z_1 \,.\,.\, z_{2\lambda-1})\, dz_\iota,$$

worin $\varDelta_1$ einen bedingungslosen Ausdruck in $2\lambda - 1$ Variabeln bedeutet, und σ durch die z_i allein ausdrückbar ist, oder nicht, jenachdem $\varkappa = 2\lambda - 1$ oder gleich 2λ ist. Hinterher ist $\varDelta_1$ nach der Pfaff'schen Methode auf eine Form mit nur λ Differentialelementen zu bringen. (Art. 110.)

Wie man sieht, enthält Grassmann's Reduktionsverfahren zugleich einen Beweis für die Vollständigkeit des Systems V im Falle $\varkappa = 2\lambda$, und des Systems W im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$. Dieser Beweis beruht darauf, daſs durch Einführung der neuen Variabeln $y_1 \,.\,.\, y_{n-1}$, t das System V (bezw. W bei ungeradem $\varkappa$) eine Form annimmt, in der es die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ umfaſst, während die $n - 2\lambda$ übrigen Gleichungen $\overline{V}$ von t ganz unabhängig werden, und daſs auf das Gleichungensystem $\overline{V}$ wiederum eine ganz analoge Transformation angewendet werden kann etc.

Benutzt man im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ bei der Einführung der neuen Variabeln $y_1 y_2 \,.\,.\, y_{n-1}\, t$ die $n - 1$ Integrale y_i einer linearen partiellen Differentialgleichung, die in V, nicht aber in dem System W enthalten ist, so erhält man die Jacobi'sche Reduktion (Art. 122). Durch geeignete Kombination der Jacobi'schen und der Grassmann'schen Reduktion gelangt man, wie leicht ersichtlich, zu einem Verfahren, das darauf hinauskommt, die $\varkappa - 1$ Integrale $z_1 \ldots z_{\varkappa-1}$ des Systems V in $\varDelta$ als neue Variable einzuführen, wodurch $\varDelta$ die Form $d\psi + \varDelta_1$ enthält, in der $\varDelta_1$ einen bedingungslosen Ausdruck in den $2\lambda - 2$ Variabeln $z_1 \ldots z_{\varkappa-1}$ bedeutet. Den Ausdruck $\varDelta_1$ kann man dann hinterher nach Pfaff's Methode auf eine Gestalt mit nur $\lambda - 1$ Differentialelementen bringen (Art. 111) und gelangt so zu einer Normalform von $\varDelta$. Auch gewinnt man auf dem hiermit angedeuteten Wege einen Beweis für die Vollständigkeit des Systems V im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$.

140. Die meisten Sätze, welche wir in diesem § über die vollständigen Systeme V und W abgeleitet haben, können auch ohne Zuhilfenahme des Fundamentaltheorems bewiesen werden. Wir beschränken uns an dieser Stelle darauf, die beiden wichtigsten Eigenschaften der Systeme V und W, nämlich ihre Vollständigkeit und ihre Kovarianz, direkt zu begründen; dadurch gewinnen wir die Grundlage zu einem neuen Beweis des Fundamentaltheorems, der im nächsten Kapitel geführt werden soll.

Die linearen totalen Differentialgleichungen

$$(19) \qquad a_{i1}dx_1 + a_{i2}dx_2 + \cdots + a_{in}dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

reduziren sich auf $\varkappa$ oder $\varkappa - 1$ linear unabhängige, je nachdem die Klasse $\varkappa$ des Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$ gerade oder ungerade ist. Dieses Gleichungensystem ist nach Art. 79 einerseits unbeschränkt integrabel, andererseits im Falle $\varkappa = 2\lambda$ zu dem Gleichungensystem W, im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ zu dem Gleichungensystem V adjungirt. Damit ist die Vollständigkeit des Systems W im Falle eines geraden $\varkappa$, und die Vollständigkeit von V für ungerades $\varkappa$ bereits nachgewiesen.

Um unsern Beweis zu vollenden, führen wir eine $n + 1^{\text{te}}$ unabhängige Variable x_0 ein, und betrachten den Pfaff'schen Ausdruck in $n + 1$ Veränderlichen

$$\varDelta' \equiv x_0\varDelta \equiv \sum_0^n {}^i\, a_i' dx_i.$$

Dann ist

$$(20) \qquad \begin{cases} a_0' \equiv 0; \quad a_1' \equiv x_0 a_1 \ldots, \quad a_n' = x_0 a_n \\ a_{ik}' = \dfrac{\partial a_i'}{\partial x_k} - \dfrac{\partial a_k'}{\partial x_i} \equiv x_0 a_{ik} \qquad (i, k = 1 \ldots n) \\ a_{0k}' \equiv - a_{k0}' \equiv - a_k \qquad (k = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Die unabhängigen unter den Gleichungen

$$\sum_0^n {}^k\, a_{ik}' dx_k = 0 \qquad (i = 0, 1 \ldots n)$$

liefern uns dann unter allen Umständen ein unbeschränkt integrables System mit $n+1$ Veränderlichen $x_0, x_1 \dots x_n$ (Art. 79).

Wegen (20) aber schreibt sich dieses Gleichungensystem so:

$$(21) \qquad \begin{aligned} &\sum_1^n {}^k a_{ik}\, dx_k + a_i \frac{dx_0}{x_0} = 0 \qquad (i = 1 \dots n) \\ &\sum_1^n a_k\, dx_k \qquad\qquad\quad = 0. \end{aligned}$$

Ist $\varkappa$ ungerade, so stellen die Gleichungen (21) genau $\varkappa + 1$ linear unabhängige Gleichungen dar; eine derselben ist $dx_0 = 0$, und die übrigen $\varkappa$ Gleichungen erhält man, wenn man aus den Relationen

$$\sum_1^n a_{ik}\, dx_k = 0, \quad \sum a_k\, dx_k = 0 \qquad (i = 1 \dots n)$$

irgend $\varkappa$ linear unabhängige auswählt; diese $\varkappa$ Gleichungen sind von x_0 vollkommen unabhängig, bilden also nach Art. 75 für sich genommen, ein $\varkappa$-gliedriges, unbeschränkt integrables System in den Variabeln $x_1 \dots x_n$. Dieses System ist nun zu dem Gleichungensystem W adjungirt, und es ist somit die Vollständigkeit von W auch im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ erwiesen.

Ist andererseits $\varkappa = 2\lambda$, so ist $\varkappa$ der Rang der Matrix (B) (Art. 96), also reduziren sich die Gleichungen (21) auf genau $\varkappa$ linear unabhängige. Ist nun etwa a_1 nicht identisch null, so giebt es genau $\varkappa - 1$ linear unabhängige Linearkombinationen der Gleichungen (21), die x_0 weder in den Differentialen, noch in den Koeffizienten enthalten, nämlich die folgenden:

$$(22) \qquad \sum_1^n {}^k (a_i a_{1k} - a_1 a_{ik})\, dx_k = 0 \qquad (i = 2, 3 \dots n),$$

die sich offenbar auf $\varkappa - 1$ linear unabhängige Gleichungen reduziren, und für sich genommen ein $\varkappa - 1$-gliedriges unbeschränkt integrables System bilden (Art. 75). Die Gleichungen (22) sind aber zu dem System V adjungirt, denn aus den linearen Gleichungen

$$\sum {}^k a_{ik}\, \xi_k = \xi_0 a_i \qquad (i = 1 \dots n)$$

folgt:

$$\sum_1^n (a_i a_{1k} - a_1 a_{ik})\, \xi_k \equiv 0 \qquad (i = 2, 3 \dots n).$$

Damit ist gezeigt, daſs auch bei geradem $\varkappa$ das System V vollständig ist.

141. Um zu erkennen, dafs die beiden vollständigen Systeme V und W mit dem Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ invariant verknüpft sind, genügt es offenbar, dies für die bezw. adjungirten Systeme totaler Differentialgleichungen nachzuweisen. Geht nun vermöge der Variabelntransformation:

$$(23) \qquad x_\iota = \psi_\iota(y_1 y_2 \dots y_n)$$

der Ausdruck $\varDelta$ in

$$\varDelta' = \sum_1^n {}^\iota\, b_\iota (y_1 y_2 \dots y_n)\, dy_\iota$$

über, so verwandeln sich gleichzeitig die Relationen (19) in die nachstehenden:

$$(24) \qquad \sum_1^n {}^k \sum_1^n {}^s\, a_{\iota k} \frac{\partial x_k}{\partial y_s} dy_s = 0 \qquad (i = 1 \dots n).$$

Bezeichnet man die linken Seiten von (24) mit $\nabla_1 \nabla_2 \dots \nabla_n$, so ist das Gleichungensystem (24) gleichbedeutend mit dem folgenden

$$(25) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial y_r} \nabla_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_r} \nabla_2 + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial y_r} \nabla_n = 0 \qquad (r = 1 \dots n),$$

da ja die Funktionaldeterminante $\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{pmatrix}$ nicht null ist.

Setzt man aber

$$b_{rs} \equiv \frac{\partial b_r}{\partial y_s} - \frac{\partial b_s}{\partial y_r},$$

so folgt ganz ähnlich wie in Art. 98:

$$b_{rs} \equiv \sum_1^n {}^\iota \sum_1^n {}^k\, a_{ik} \frac{\partial x_\iota}{\partial y_r} \frac{\partial x_k}{\partial y_s}$$

und mithin können die Gleichungen (25) auch so geschrieben werden:

$$b_{r1} dy_1 + b_{r2} dy_2 + \dots + b_{rn} dy_n = 0 \qquad (r = 1 \dots n),$$

also ist das System (19) mit dem Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ in der That invariant verknüpft.

Wir verstehen ferner wie oben unter x_0 eine $n + 1^{\text{te}}$ Independente, und fügen den Transformationsformeln (23) die folgende hinzu

$$(26) \qquad x_0 = y_0.$$

Vermöge der Variabelntransformation (23), (26) verwandelt sich nun das Gleichungensystem (21) in das nachstehende:

$$(27) \qquad \nabla_\iota' \equiv a_\iota \frac{dy_0}{y_0} + \sum_1^n{}^k \sum_1^n{}^s a_{\iota k} \frac{\partial x_k}{\partial y_s} dy_s = 0 \qquad (i = 1 \,..\, n)$$

$$\nabla' = \sum_1^n{}^k \sum_1^n{}^s a_k \frac{\partial x_k}{\partial y_s} dy_s \equiv \sum_1^n{}^s b_s dy_s = 0.$$

Die Gleichungen (27) sind äquivalent mit diesen:

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_r} \nabla_1' + \frac{\partial x_2}{\partial y_r} \nabla_2' + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial y_r} \nabla_n' = 0 \qquad (r = 1 \,..\, n),$$

also erhält man schliefslich vermöge unserer Transformation (23) (26) aus dem System (21):

$$(28) \quad b_\iota \frac{dy_0}{y_0} + \sum_1^n{}^k b_{\iota k} dy_k = 0, \quad \sum b_k dy_k = 0 \qquad (i = 1 \,..\, n).$$

Daher verwandeln sich auch die von x_0 unabhängigen Gleichungen, welche man durch lineare Kombination der Relationen (21) erhält, in die von y_0 freien Gleichungen, welche durch Linearkombination aus (28) hervorgehen. Nach der vorigen Nr. sind daher die unbeschränkt integrabeln Systeme, die bezw. zu den Systemen V und W adjungirt sind, und in Folge dessen die Systeme V und W selbst mit dem Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ kovariant; m. a. W. verwandelt sich $\varDelta$ bei Einführung neuer Variabeln in $\varDelta'$, so verwandeln sich gleichzeitig V und W in die Gleichungensysteme V' und W', die zu $\varDelta'$ bezw. in denselben Beziehungen stehen, wie V und W zu $\varDelta$.

§ 4. **Ergänzungen zu den Frobenius'schen Sätzen.**

142. Die Entwickelungen des vorigen § setzen uns in den Stand, die in Kapitel III abgeleiteten Frobenius'schen Sätze in einigen wesentlichen Punkten zu ergänzen.

Es sei $\varDelta$ ein Pfaff'scher Ausdruck der Klasse $\varkappa$, ferner ϱ irgend eine Funktion von $x_1 \,..\, x_n$. Setzen wir dann:

$$\varDelta' \equiv \varrho \varDelta \equiv \sum a_\iota' dx_\iota,$$

so folgt:

$$a_\iota' \equiv \varrho a_\iota; \; a_{\iota k}' \equiv \varrho a_{ik} + a_i \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} - a_k \frac{\partial \varrho}{\partial x_\iota};$$

ist nun $\varkappa = 2\lambda$, so besitzt $\varDelta'$ die Klasse $\varkappa$ oder $\varkappa - 1$, je nachdem die Matrix:

$$\| \, a_{ik}' \, \| \qquad (i, k = 1 \,..\, n)$$

den Rang 2λ oder $2\lambda - 2$ besitzt. Dividiren wir aber alle Elemente dieser Matrix mit ϱ, so erhalten wir das Schema:

$$\| c_{ik} \| \qquad (i, k = 1 \, .. \, n), \tag{1}$$

worin

$$c_{ik} = a_{ik} + a_i \frac{\partial \log \varrho}{\partial x_k} - a_k \frac{\partial \log \varrho}{\partial x_i}$$

gesetzt wird. Damit nun das Schema (1) den Rang $2\lambda - 2$ besitze, ist offenbar notwendig und hinreichend, dafs das Schema:

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} 0 & c_{12} & c_{13} & .. & c_{1n} & a_1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & .. & 0 & a_n & 0 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & .. & -a_n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & -1 & 0 \end{array} \right\|$$

den Rang 2λ besitze. Subtrahiren wir aber hierin die mit $\frac{\partial \log \varrho}{\partial x_k}$ multipizirte $n+1^{\text{te}}$ Spalte von der k^{ten}, und die mit $\frac{\partial \log \varrho}{\partial x_i}$ multiplizirte $n+1^{\text{te}}$ Zeile von der i^{ten} Zeile, und führen diese Umformung für $i, k = 1 \, .. \, n$ aus, so entsteht das Schema

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & a_{12} & .. & a_{1n} & a_1, & -\frac{\partial \log \varrho}{\partial x_1} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & 0 & a_n, & -\frac{\partial \log \varrho}{\partial x_n} \\ -a_1 & -a_2 & .. & -a_n & 0 & 1 \\ \frac{\partial \log \varrho}{\partial x_1} & \frac{\partial \log \varrho}{\partial x_2} & .. & \frac{\partial \log \varrho}{\partial x_n} & -1 & 0 \end{array} \right\| \tag{2}$$

Damit nun die schiefsymmetrische Matrix (2) den Rang 2λ besitze, ist notwendig und hinreichend, dafs dasselbe für dasjenige Schema gilt, das aus (2) durch Weglassung der letzten Spalte entsteht, m. a. W., dafs die Funktion ϱ jede Gleichung der Form:

$$\xi_1 \frac{\partial \log \varrho}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial \log \varrho}{\partial x_n} + \xi_0 = 0$$

befriedige, wenn unter den ξ_i irgend ein Lösungensystem der linearen Gleichungen

$$\sum a_{ik} \xi_k = a_i \xi_0 ; \quad \sum a_k \xi_k = 0 \qquad (i = 1 \, .. \, n)$$

verstanden wird.

Damit also im Falle $\varkappa = 2\lambda$ der Pfaff'sche Ausdruck $\varrho\Delta$ den Rang $2\lambda - 1$ besitze, ist nach Nr. 128 notwendig und hinreichend, dafs die Funktion ϱ den homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen

(3) $$X_i\varrho = 0 \qquad (i = 1, 2 \,.\,. n - \varkappa)$$

und aufserdem der nicht homogenen linearen partiellen Differentialgleichung:

(4) $$X_0\varrho - \varrho \,.\, P = 0$$

genüge.

143. Denken wir uns also die Funktion

$$\sigma \equiv \log \varrho$$

durch eine Relation der Form

(5) $$f(\sigma, x_1, x_2, \,.\,. x_n) = 0$$

definirt, so mufs die Funktion f den linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen:

(6) $$X_i f = 0; \; X_0 f + P\frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0 \qquad (i = 1 \,.\,. n - \varkappa)$$

genügen[1]), wenn $\varkappa - 1$ die Klasse von $\varrho\Delta$ sein soll.

Die Gleichungen (6) bilden nun ein $n - \varkappa + 1$-gliedriges vollständiges System mit den Independenten $x_1, x_2 \,.\,. x_n, \sigma$. Denn das adjungirte System totaler Differentialgleichungen ist das folgende:

$$\sum a_k dx_k = 0, \quad \sum a_{ik} dx_k = a_i d\sigma \qquad (i = 1 \,.\,. n)$$

und die 2λ unabhängigen unter diesen Gleichungen stellen nach Art. 140 ein unbeschränkt integrables Gleichungensystem dar.

Beiläufig folgt, dafs die Gleichungen

(7) $$\frac{1}{P} X_0 f = 0, \; \frac{1}{P} X_1 f = 0, \,.\,. \frac{1}{P} X_{n-\nu} f = 0$$

ein $n - \varkappa + 1$-gliedriges Jacobi'sches System bilden. Denn zunächst stellen die $n - \varkappa$ letzten dieser Gleichungen ein vollständiges System dar, welches nach $\frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+1}} \,.\,. \frac{\partial f}{\partial x_n}$ aufgelöst ist (vgl. Art. 128), bilden also für sich ein Jacobi'sches System (Art. 59); setzt man ferner:

$$Y_0 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{1}{P} X_0 f; \; X_i' f \equiv \frac{1}{P} X_i f,$$

1) Dies folgert man leicht aus dem Schlufs des Art. 50, wenn man beachtet, dafs vermöge einer Relation (5), die σ wirklich enthält, nicht alle Funktionen

$$\Pi_{10}\, \Pi_{20} \,.\,. \Pi_{2\lambda,0}, P$$

identisch verschwinden können.

so folgt, da die Funktionen Π_{ik} und P von σ unabhängig sind:

$$Y_0 X_k' f - X_k' Y_0 f \equiv X_0' X_k' f - X_k' X_0' f$$

und dieser Ausdruck ist eine lineare Kombination von $Y_0 f$, $X_1' f \,.\,.\, X_{\varkappa-1}' f$, also identisch null.

Kennt man $\varkappa - 1$ unabhängige Integrale $z_1 z_2 \,.\,.\, z_{\varkappa-1}$ des vollständigen Systems V, so erhält man das noch fehlende Integral $z_\varkappa$ von W durch Differentiationen und Eliminationen (Art. 135). Führt man jetzt die neuen Independenten

$$z_1 \,.\,.\, z_\varkappa x_{\varkappa+1} \,.\,.\, x_n$$

ein, so erhält man nach Art. 51 eine Identität der Form:

$$\frac{1}{P} X_0 f \equiv \Phi(z_1 z_2 \,.\,.\, z_\varkappa) \frac{\partial f}{\partial z_\varkappa}.$$

Dafs Φ die Variabeln $x_{\varkappa+1} \,.\,.\, x_n$ nicht enthält, folgt leicht aus der Thatsache, dafs die Gleichungen (7) ein Jacobi'sches System bilden. Die Gleichung (4) wird jetzt

$$\Phi \frac{\partial \log \varrho}{\partial z_\varkappa} \equiv 1$$

und man findet:

$$\varrho = (\text{arb. F. von } z_1 \,.\,.\, z_{\varkappa-1}) \,.\, e^{\int \frac{d z_\varkappa}{\Phi}}.$$

Aus dieser Formel folgt beiläufig: *Kennt man im Falle $\varkappa = 2\lambda$ zwei verschiedene Funktionen ϱ und ϱ' von der Eigenschaft, dafs die Ausdrücke $\varrho\Delta$ und $\varrho'\Delta$ alle beide die Klasse $\varkappa - 1$ haben, so ist der Quotient $\frac{\varrho}{\varrho'}$ entweder konstant oder ein Integral des vollständigen Systems V.*

Es ist dies die Verallgemeinerung eines in Art. 94 ausgesprochenen Satzes.

Hat man in dem vorliegenden Fall $\varkappa = 2\lambda$ den Ausdruck Δ auf die Normalform

$$\Delta \equiv F_1 df_1 + \cdots + F_\lambda df_\lambda$$

gebracht, so findet man folgendermafsen die allgemeinste Funktion ϱ derart, dafs $\varrho\Delta$ die Klasse $2\lambda - 1$ besitzt:

Damit letzteres der Fall sei, mufs nach Art. 111 zwischen den Gröfsen $\varrho F_1, \,.\,.\, \varrho F_\lambda, f_1 \,.\,.\, f_\lambda$ eine (und natürlich auch nur eine) identische Relation stattfinden. Jede solche Beziehung kann, wie man sofort erkennt, die Form

$$\Psi\left(\varrho F_\lambda, \frac{F_1}{F_\lambda} \cdots \frac{F_{\lambda-1}}{F_\lambda}, f_1 \,.\,.\, f_\lambda\right) \equiv 0$$

erhalten, und hieraus folgt:

$$\varrho = \frac{1}{F_\lambda}\,\Phi\left(f_1 \cdot\cdot f_\lambda,\ \frac{F_1}{F_\lambda} \cdot\cdot \frac{F_{\lambda-1}}{F_\lambda}\right),$$

d. h. *$\varrho\varDelta$ besitzt dann und nur dann die Klasse $2\lambda - 1$, wenn ϱ eine Funktion der 2λ Gröſsen*

$$F_1 \,.\,.\, F_\lambda,\ f_1 \,.\,.\, f_\lambda \tag{8}$$

bedeutet, die hinsichtlich $F_1 \,.\,.\, F_\lambda$ homogen der Ordnung -1 ist.

In Art. 259 werden wir nachweisen, daſs der Ausdruck $\frac{-1}{P} X_0 f$, wenn man die neuen Independenten

$$F_1 \,.\,.\, F_\lambda,\ f_1 \,.\,.\, f_\lambda,\ x_{\varkappa+1} \,.\,.\, x_n$$

einführt, direkt in den Ausdruck

$$F_1 \frac{\partial f}{\partial F_1} + F_2 \frac{\partial f}{\partial F_2} + \cdot\cdot + F_\lambda \frac{\partial f}{\partial F_\lambda}$$

übergeht; die Bedingungen (3), (4) sagen somit in der That nichts anderes aus, als daſs ϱ eine Funktion der Gröſsen (8) und in den F_i homogen -1^{ter} Ordnung sein muſs.

144. Ist die Klasse $\varkappa$ des Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$ gleich $2\lambda - 1$, so ist die Klasse des Ausdrucks $\varrho\varDelta \equiv \varDelta'$ offenbar dann und nur dann ebenfalls gleich $\varkappa$, wenn die Matrix (1) den Rang $2\lambda - 2$ besitzt. Durch eine ganz analoge Betrachtung wie in Art. 142 erkennt man: damit $\varkappa - 1$ die Klasse von $\varrho\varDelta$ sei, ist notwendig und hinreichend, daſs ϱ dem zu $\varDelta$ gehörigen vollständigen System W genügt. Dies folgt auch leicht aus der Betrachtung der Normalform

$$\varDelta \equiv df_\lambda + \sum_1^{\lambda-1}{}_i\, F_i\, df_i$$

und aus der Schluſsbemerkung des Art. 100.

Darnach können wir die Sätze des Art. 99 in folgender Weise ergänzen:

1) *Ist die Klasse $\varkappa$ von $\varDelta$ gleich 2λ, so ist die Klasse von $\varrho\varDelta$ gleich $\varkappa - 1$ oder gleich $\varkappa$, je nachdem die Funktion ϱ den Identitäten*

$$X_0\varrho - \varrho\,.\,P \equiv 0,\ X_i\varrho \equiv 0 \qquad (i = 1\,.\,.\,n - \varkappa)$$

genügt, oder nicht.

2) *Ist die Klasse $\varkappa$ von $\varDelta$ gleich $2\lambda - 1$, so ist die Klasse von $\varrho\varDelta$ gleich $\varkappa$ oder gleich $\varkappa + 1$, je nachdem ϱ dem zu $\varDelta$ gehörigen vollständigen System W genügt, oder nicht.*

145. Es sei die Klasse $\varkappa$ des Ausdrucks $\varDelta$ gleich $2\lambda - 1$. Soll dann der Ausdruck

$$\varDelta' \equiv \varDelta + d\Omega$$

die Klasse $\varkappa - 1$ besitzen, so muſs $2\lambda - 2$ der Rang der Matrix

$$
(9)\quad \left\| \begin{array}{cccccc}
0 & a_{12} & a_{13} & a_{1n} & a_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & 0 & a_n + \frac{\partial \Omega}{\partial x_n} \\
-a_1 - \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}, & -a_2 - \frac{\partial \Omega}{\partial x_2}, & -a_3 - \frac{\partial \Omega}{\partial x_3}, & -a_n - \frac{\partial \Omega}{\partial x_n} & 0
\end{array} \right\|
$$

sein. Dazu ist notwendig und hinreichend, dafs die Matrix, die aus (9) durch Streichung der letzten Spalte entsteht, den Rang $2\lambda - 2$ besitze, dafs also Ω jeder Relation der Form

$$\sum_1^n a_i \xi_i + \sum_1^n \xi_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0$$

genüge, worin die ξ_i die linearen Gleichungen

$$(10) \qquad \sum a_{ik} \xi_k = 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, n)$$

befriedigen. Gebraucht man die Bezeichnungsweise des Art. 130 und beachtet man, dafs identisch

$$-Q \equiv \Pi'_{1,2\lambda-1} a_1 + \Pi'_{2,2\lambda-1} a_2 + \cdots + \Pi'_{2\lambda-2,2\lambda-1} a_{2\lambda-2} - P' a_{2\lambda-1},$$

so ergeben sich für Ω folgende Bedingungen:

$$(11) \qquad X_i \Omega = 0 \qquad (i = 1, 2 \,.\,.\, n - \varkappa)$$

$$(12) \qquad X_0 \Omega \equiv Q.$$

Denken wir uns Ω durch eine Relation

$$f(\Omega, x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) = 0$$

definirt, so mufs f dem folgenden System linearer homogener Gleichungen genügen[1])

$$(13) \qquad X_i f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \Omega} + \frac{1}{Q} X_0 f = 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, n - \varkappa),$$

worin $x_1 \cdots x_n$, Ω als unabhängige Variabeln figuriren.

Das Gleichungensystem (13) ist vollständig; denn das adjungirte System

$$(14) \qquad \sum a_{ik} dx_k = 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, n)$$

$$(15) \qquad \sum a_k dx_k + d\Omega = 0$$

ist ein $\varkappa$-gliedriges unbeschränkt integrabeles System in den $n + 1$ Variabeln $x_1 \,.\,.\, x_n$, Ω. In der That, die Gleichungen (14) bilden nach Art. 79 für sich genommen ein $\varkappa - 1$-gliedriges vollständiges System

1) Vgl. die Anmerkung p. 188.

in $x_1 \,.\,.\, x_n$. Um also unsere Behauptung zu erweisen, haben wir nur zu zeigen, dafs die Bilinearform

$$\sum_1^n {}^k \sum_1^n {}^s a_{ks} u_\lambda v_s,$$

die aus der linken Seite von (15) nach den Regeln des Art. 76 gebildet wurde, für jedes Funktionensystem $u_0 u_1 \,.\,.\, u_n\, v_0 v_1 \,.\,.\, v_n$, das den Relationen

$$\sum a_{ik} u_k \equiv 0, \quad \sum a_{i\lambda} v_\lambda \equiv 0, \quad \sum a_k u_k + u_0 = 0, \quad \sum a_\lambda v_\lambda + v_0 = 0$$

genügt, identisch verschwindet; dies aber ist unmittelbar evident.

Es folgt wiederum, dafs die Gleichungen

$$(16) \qquad \frac{1}{Q} X_0 f = 0, \; \frac{1}{Q} X_1 f = 0, \cdot\cdot \frac{1}{Q} X_{n-\varkappa} f = 0$$

ein Jacobi'sches System bilden. Führt man also die $\varkappa - 1$ Integrale $z_1 \,.\,.\, z_{\varkappa-1}$ des vollständigen Systems (16) (d. h. also des Systems V), sowie das noch übrige Integral $z_\varkappa$ des Systems W neben $x_{\varkappa+1} \,.\,.\, x_n$ als neue Independente ein, so erhält man Identitäten der Form:

$$-\frac{1}{Q} X_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+i}} \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, n - \varkappa)$$

und da die Gleichungen (16) ein Jacobi'sches System bilden, so schliefst man leicht, dafs vermöge unserer Variabelntransformation der Ausdruck $\frac{1}{Q} X_0 f$ folgende Form annimmt:

$$\frac{1}{Q} X_0 f \equiv \Phi(z_1 z_2 \,.\,.\, z_\varkappa) \frac{\partial f}{\partial z_\varkappa},$$

wobei Φ die Variabeln $x_{\varkappa+1} \,.\,.\, x_n$ nicht mehr enthält. Die allgemeinste Funktion Ω, die den Bedingungen (11) und (12) genügt, hat also die Form

$$\Omega \equiv \int \frac{dz_\varkappa}{\Phi} + (\text{arb. F. von } z_1 z_2 \,.\,.\, z_{\varkappa-1})$$

und es folgt beiläufig:

Kennt man im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ zwei verschiedene Funktionen Ω und Ω' von der Eigenschaft, dafs die Pfaff'schen Ausdrücke:

$$\varDelta + d\Omega; \quad \varDelta + d\Omega'$$

alle beide die Klasse $\varkappa - 1$ besitzen, so ist die Differenz $\Omega - \Omega'$ entweder eine Konstante oder eine Lösung des zu $\varDelta$ gehörigen vollständigen Systems V.

Hat man $\varDelta$ auf die Normalform

$$\varDelta = df_\lambda + F_1 df_1 + \cdot\cdot + F_{\lambda-1} df_{\lambda-1}$$

gebracht, und soll $\Delta + d\Omega$ die Klasse $2\lambda - 2$ besitzen, so ist nach Art. 102 und 113 dazu notwendig und hinreichend, daſs zwischen den $2\lambda - 1$ Funktionen

$$f_\lambda + \Omega, \quad F_1 \,.\,.\, F_{\lambda-1}, \quad f_1 \,.\,.\, f_{\lambda-1}$$

eine identische Relation besteht, daſs also Ω die Form

$$\Omega \equiv - f_\lambda + \Psi(F_1 \,.\,.\, F_{\lambda-1}, f_1 \,.\,.\, f_{\lambda-1}) \tag{17}$$

besitzt. In Kap. X werden wir zeigen, daſs, wenn man die Gröſsen

$$f_\lambda, \; F_1 \,.\,.\, F_{\lambda-1}, \; f_1 \,.\,.\, f_{\lambda-1}, \; x_{\varkappa+1} x_{\varkappa+2} \,.\,.\, x_n$$

als neue Independente einführt, der Ausdruck $-\frac{1}{Q} X_0 f$ direkt in den Ausdruck $\frac{\partial f}{\partial f_\lambda}$ übergeht. Die Bedingungen (11) und (12) drücken also in der That nichts anderes aus, als daſs Ω in der Form (17) darstellbar ist.

146. Ist $\varkappa = 2\lambda$ und soll $\Delta + d\Omega$ dieselbe Klasse besitzen, so muſs 2λ der Rang der Matrix (9) sein. Da jetzt die Gleichung

$$\sum a_i \xi_i = 0$$

eine Folge von (10) ist, so schlieſst man leicht: der Ausdruck $\Delta + d\Omega$ besitzt dann und nur dann die Klasse 2λ, wenn Ω dem zu Δ gehörigen System W genügt, eine Thatsache, die auch ohne weiteres aus der Betrachtung der Normalform und aus der Schluſsbemerkung der Art. 102 erschlossen wird. Fassen wir die Resultate dieser und der vorigen Nr. zusammen, so können wir die Sätze des Art. 102 in folgender Weise ergänzen:

1) *Ist die Klasse $\varkappa$ von Δ gerade, so ist die Klasse des Ausdrucks $\Delta + d\Omega$ gleich $\varkappa$ oder gleich $\varkappa + 1$, je nachdem Ω dem zu Δ gehörigen vollständigen System W genügt oder nicht.*

2) *Ist die Klasse $\varkappa$ von Δ ungerade, so ist die Klasse des Ausdrucks $\Delta + d\Omega$ gleich $\varkappa - 1$ oder gleich $\varkappa$, je nachdem Ω den Identitäten*

$$X_i \Omega \equiv 0 \qquad (i = 1, 2 \,.\,.\, n - \varkappa)$$
$$X_0 \Omega \equiv Q$$

genügt, oder nicht. Dabei haben die Symbole $X_k f$ die in Art. 131 angegebene Bedeutung.

147. Die Entwickelungen dieses § enthalten, wie man sofort erkennt, *einen neuen Beweis des Fundamentaltheorems.* Wir erinnern zunächst daran, daſs die Sätze der Art. 140—145 ohne Zuhilfenahme dieses Theorems begründet wurden. Ist nun $\varkappa$ der Rang der zu Δ

gehörigen Matrix (A) (Art. 96), und ist $\varkappa = 2\lambda$, so kann man nach Art. 143 eine Funktion F_1 derart bestimmen, daſs der Ausdruck

$$\varDelta' \equiv \frac{1}{F_1} \cdot \varDelta$$

die Klasse $\varkappa - 1$ besitzt; dann läſst sich nach Art. 145 eine Funktion f_1 so ermitteln, daſs die Klasse des Ausdrucks $\varDelta'' \equiv \varDelta' - df_1$ gleich $\varkappa - 2$ ist; ferner kann man ein F_2 finden, derart, daſs $\frac{1}{F_2} \varDelta''$ die Klasse $\varkappa - 3$ besitzt etc. Man gelangt so der Reihe nach zu den Funktionen $F_1 f_1 F_2 f_2 \ldots f_\lambda$ einer Normalform, und zeigt dann hinterher nach Art. 127, daſs diese Normalform auch nur in dem Falle existiren kann, daſs die Matrix (A) den Rang 2λ besitzt, und daſs dann die Funktionen F, f unabhängig sind. Im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ bestimme man zunächst f_λ so, daſs $\varDelta - df_\lambda$ die Klasse $\varkappa - 1$ besitzt u. s. w.

Ist $\varkappa = 2\lambda$, so erfordert die Bestimmung einer Funktion ϱ von der Eigenschaft, daſs $\varrho \varDelta$ die Klasse $\varkappa - 1$ besitzt, nach Art. 143 eine Operation $\varkappa$, nämlich die Ermittelung eines von σ nicht unabhängigen Integrals des $n - \varkappa + 1$-gliedrigen vollständigen Systems (6) mit den Independenten $x_1 \ldots x_n \sigma$. Ebenso verlangt im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ die Aufsuchung einer Funktion Ω von der Beschaffenheit, daſs $\varDelta + d\Omega$ die Klasse $\varkappa - 1$ besitzt, nach Art. 145 eine Operation $\varkappa$, nämlich die Bestimmung eines von Ω nicht unabhängigen Integrals des $n - \varkappa + 1$-gliedrigen vollständigen Systems (13) mit den $n + 1$ unabhängigen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n, \Omega$. Daraus folgt sofort, daſs die soeben angedeutete Methode zur Herstellung der Normalform von $\varDelta$ unter allen Umständen je eine Operation

$$\varkappa,\ \varkappa - 1,\ \varkappa - 2, \ldots 3,\ 2,\ 1,\ 0$$

verlangt; obwohl diese Methode darnach weit einfacher ist, als das in Kap. IV entwickelte Pfaff-Grassmann'sche Reduktionsverfahren, so wollen wir doch nicht näher auf sie eingehen, da wir im nächsten Kapitel eine noch vorteilhaftere Methode kennen lernen werden.

Kapitel VI.

Das implicite Reduktionsverfahren.

§ 1. Die Reduktionsmethode von Clebsch.

148. In einen Pfaff'schen Ausdruck

$$(1)\qquad \varDelta \equiv \sum_1^n{}^i a_i(x_1 x_2 \,..\, x_n)\, dx_i$$

von der Klasse $\varkappa$ denken wir uns mittels der Formeln

$$(2)\qquad x_1' = \varphi_1(x_1 x_2 \,..\, x_n) \;\ldots\; x_n' = \varphi_n(x_1 x_2 \,..\, x_n)$$

statt der x die neuen Variabeln x' eingeführt, wodurch $\varDelta$ die Form:

$$(3)\qquad \varDelta' \equiv \sum_1^n{}^i b_i(x_1' x_2' \,..\, x_n')\, dx_i'$$

erhalte. Wir setzen nun:

$$\varDelta_1 \equiv b_2 dx_2' + b_3 dx_3' + \cdots + b_n dx_n',$$

mithin

$$(4)\qquad \varDelta \equiv b_1 dx_1' + \varDelta_1,$$

und wollen untersuchen, *welche Klasse der Pfaff'sche Ausdruck* $\varDelta_1$ *besitzt, wenn man darin* $x_2' x_3' \,..\, x_n'$ *als Variable, die Gröfse* x_1' *dagegen als willkürliche Konstante betrachtet.* Diese Klasse werde mit $\varkappa'$ bezeichnet.

Die fundamentalen Matrices (A′), (B′), (C′), die zu der transformirten Gestalt (3) des Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$ gehören, sind die folgenden:

$$(\mathrm{A}')\quad \left\|\begin{matrix} b_1 & b_2 & .. & b_n \\ 0 & b_{12} & .. & b_{1n} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & .. & 0 \end{matrix}\right\|; \qquad (\mathrm{B}')\quad \left\|\begin{matrix} 0 & b_1 & .. & b_n \\ -b_1 & 0 & .. & b_{1n} \\ . & . & . & . \\ -b_n & b_{n1} & .. & 0 \end{matrix}\right\|$$

$$(\mathrm{C}')\quad \| b_{ik} \| \qquad (i, k = 1 \,..\, n).$$

Dabei ist

$$b_{ik} \equiv -b_{ki} \equiv \frac{\partial b_i}{\partial x_k'} - \frac{\partial b_k}{\partial x_i'}$$

gesetzt worden. Nach Art. 98 stimmen die Rangzahlen dieser drei Matrices bezw. mit den Rangzahlen der in Art. 96 analog bezeichneten Matrices überein.

Die Matrices (A_1'), (B_1'), (C_1'), die in demselben Sinne zu $\varDelta_1$ gehören, wenn darin x_1' als Konstante betrachtet wird, werden erhalten, wenn man in (A') die erste Spalte und die zweite Zeile, in (B') die zweite Zeile und Spalte, endlich in (C') die erste Zeile und Spalte wegläſst. Da der Rang einer Matrix durch Weglassung einer Zeile oder einer Spalte entweder ungeändert bleibt oder um *eins* abnimmt, so ist der Rang von (A_1'), d. h. also *die gesuchte Klasse* $\varkappa'$ *entweder gleich* $\varkappa - 2$ *oder gleich* $\varkappa - 1$ *oder gleich* $\varkappa$.

149. Soll *erstens* der Rang von (A_1') gleich $\varkappa - 2$ sein, so muſs der Rang von (A') um eins abnehmen, wenn man die zweite Zeile daraus fortläſst. Infolge dessen müssen die linearen Gleichungen

(5) $$\sum_1^n {}^k b_{ik}\xi_k = b_i\xi_0 \qquad (i = 1\,.\,.\,n)$$

nach Art. 13 die Relation $\xi_1 \equiv 0$ zur Folge haben. Ist nun

(6) $$\xi_1\,\xi_2\,.\,.\,\xi_n\,\xi_0$$

ein beliebiges Lösungensystem der Gleichungen (5), so ist nach Art. 132 und 141 die partielle Differentialgleichung:

(7) $$\sum_1^n {}^i \xi_i(x_1'x_2'\,.\,.\,x_n')\frac{\partial f}{\partial x_i'} = 0$$

in dem vollständigen System V' enthalten, das aus dem zu $\varDelta$ gehörigen System V durch die Variabelntransformation (2) hervorgeht, und zu $\varDelta'$ in derselben Beziehung steht, wie V zu $\varDelta$. Nach dem vorhin gesagten wird daher jede Gleichung von V' durch die Funktion $f \equiv x_1'$ identisch befriedigt, und infolge dessen ist die Funktion $\varphi_1(x_1x_2\,.\,.\,x_n)$, die auf der rechten Seite der ersten Gleichung (2) auftritt, ein Integral des vollständigen Systems V.

Wir wollen nun umgekehrt annehmen, daſs letzteres der Fall sei. Dann ergiebt sich, daſs jede Gleichung der Form (7), deren Koeffizienten einem Relationensystem (5) genügen, durch die Annahme $f \equiv x_1'$ identisch erfüllt wird, daſs also $\xi_1 \equiv 0$ eine Folge des Gleichungensystems (5) ist. Demnach vermindert sich der Rang von (A') um eins, wenn man die zweite Zeile daraus fortläſst.

Es sei nun zunächst $\varkappa = 2\lambda$; dann hat jede der Matrices (A'), (B'), (C') den Rang 2λ. Ferner ist jetzt die Gleichung

(8) $$\sum b_k\xi_k = 0$$

eine Folge von (5), und wir können daher sagen, daſs die Gleichung $\xi_1 \equiv 0$ eine Folge des Systems (5) (8) ist. Also vermindert sich der

Rang von (B′) um eins, wenn man die zweite Spalte fortläfst, und infolge dessen ist der Rang von (B_1') gleich $\varkappa - 2$, da er eine gerade Zahl sein mufs. Da ferner in (A′) alle diejenigen $\varkappa$-reihigen Determinanten verschwinden, an deren Bildung die zweite Zeile sich nicht beteiligt, so vermindert sich der Rang von (C′) um eins, wenn man die erste Zeile wegläfst, d. h. der Rang von (C_1') ist ebenfalls $\varkappa - 2$. Daraus folgt unmittelbar $\varkappa' = \varkappa - 2$.

Ist $\varkappa = 2\lambda - 1$, so sind die Koeffizienten jeder in V' enthaltenen Gleichung (7) Lösungen der linearen Relationen:

$$\sum_1^n{}^k b_{ik} \xi_k = 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, n) \tag{9}$$

und es ist daher unter den oben gemachten Annahmen $\xi_1 \equiv 0$ eine Folge von (9), d. h. der Rang von (C′), der gegenwärtig gleich $\varkappa - 1$ ist, vermindert sich um eins, wenn man die erste Zeile fortläfst. Der Rang von (C_1') ist darnach $\varkappa - 3$, also der Rang von (A_1') notwendig $\varkappa - 2$, da er einer der drei Zahlen $\varkappa$, $\varkappa - 1$, $\varkappa - 2$ gleich sein mufs, aber nur um eine Einheit gröfser als $\varkappa - 3$ sein kann.

150. Soll zweitens $\varkappa' = \varkappa - 1$ sein, so darf die Matrix (A′) beim Weglassen der zweiten Zeile ihren Rang nicht ändern, da sonst nach dem eben bewiesenen $\varkappa' = \varkappa - 2$ wäre. Dann mufs sich der Rang von (A′) notwendig um eins vermindern, wenn man die erste Spalte streicht, d. h. das Gleichungensystem (8) (9) mufs die Relation $\xi_1 = 0$ zur Folge haben. Ist nun $\xi_1 \,.\,.\, \xi_n$ ein beliebiges Lösungensystem von (8), (9), so ist die zugehörige lineare partielle Differentialgleichung (7) in dem $n - \varkappa$-gliedrigen vollständigen System W' enthalten, das vermöge der Variabelntransformation (2) aus dem zu $\varDelta$ gehörigen System W hervorgeht, und zu $\varDelta'$ in derselben Beziehung steht, wie W zu $\varDelta$ (Art. 132, 141). Also ist jetzt x_1' ein Integral von W' und demnach $\varphi_1(x_1 \,.\,.\, x_n)$ ein Integral von W. Umgekehrt, ist letzteres der Fall, und ist φ_1 keine Lösung von V, so ändert die Matrix (A′) ihren Rang, wenn man die erste Spalte wegläfst; der Rang von (A_1') ist also notwendig $\varkappa - 1$, da im Falle $\varkappa' = \varkappa - 2$ die Funktion φ_1 dem System V genügen würde.

151. Indem wir die Resultate der beiden letzten Nummern zusammenfassen, erhalten wir das wichtige Theorem:

„Führt man in einen Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ der Klasse $\varkappa$ mittels der Transformationsformeln

$$x_1' = \varphi_1(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) \;.\,.\; x_n' = \varphi_n(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) \tag{2}$$

statt der x die neuen Veränderlichen $x_1' \,.\,.\, x_n'$ ein, und erhält dadurch $\varDelta$ die Form

$$(4) \qquad \Delta \equiv \sum_1^n b_\iota(x_1' x_2' \,.\,.\, x_n') dx_\iota' \equiv b_1 dx_1' + \Delta_1,$$

so besitzt der Pfaff'sche Ausdruck Δ_1, wenn man darin $x_2' x_3' \,.\,.\, x_n'$ als Variable, x_1' aber als willkürlichen Parameter betrachtet, die Klasse $\varkappa - 2$, oder $\varkappa - 1$, oder $\varkappa$, je nachdem die Funktion $\varphi_1(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)$ ein Integral des zu Δ gehörigen vollständigen Systems V, oder ein dem System V nicht genügendes Integral des Systems W bedeutet, oder endlich das System W nicht erfüllt."

Der Satz gilt in dieser Fassung nur für $\varkappa < n$, da es für $\varkappa = n$ ein vollständiges System W überhaupt nicht giebt. In diesem Falle müssen wir ihn besonders aussprechen; er lautet dann:

„*Führt man in einen bedingungslosen Pfaff'schen Ausdruck Δ mittels der Formeln* (2) *die neuen Veränderlichen $x_1' \,.\,.\, x_n'$ ein, und erhält Δ dadurch die Form* (4), *so ist die Klasse von Δ_1 gleich $n - 2$ oder gleich $n - 1$, je nachdem die Funktion $\varphi_1(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)$ der zu Δ gehörigen linearen partiellen Differentialgleichung V* (Art. 133) *genügt oder nicht.*"

152. Wenn die Funktion $\varphi_1(x_1 \,.\,.\, x_n)$ die Variabele x_1 wirklich enthält, so dürfen wir die neuen Variabeln $x_2' \,.\,.\, x_n'$ bezw. mit $x_2 \,.\,.\, x_n$ identifiziren, d. h. an Stelle von (2) folgende Transformationsformeln benützen:

$$(9) \qquad x_1' = \varphi_1(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n); \; x_2 = x_2 \,.\,.\, x_n = x_n.$$

Unser voriges Resultat läfst sich dann so aussprechen:

Drückt man mittels der Relation

$$\varphi_1(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) = c_1$$

irgend eine der Variabeln x, etwa x_1, als Funktion von $x_2 \,.\,.\, x_n$ und der arbiträren Konstanten c_1 aus, und substituirt den so erhaltenen Wert in einen Pfaff'schen Ausdruck Δ der Klasse $\varkappa\,(< n)$, so verwandelt sich Δ in einen Ausdruck Δ_1 mit $n - 1$ Variabeln $x_2 \,.\,.\, x_n$, der für beliebige Werte von c_1 die Klasse $\varkappa - 2$, $\varkappa - 1$ oder $\varkappa$ besitzt, je nachdem φ_1 das vollständige, zu Δ gehörige System V, oder das vollständige System W, nicht aber V, oder endlich weder V noch W befriedigt.

Im Falle $\varkappa = n$ besitzt Δ_1 die Klasse $n - 2$ oder $n - 1$, je nachdem φ_1 die partielle Differentialgleichung V erfüllt oder nicht.

Wir wollen die Variabelntransformation (9) als „*erste*" oder „*zweite Clebsch'sche Reduktionsmethode*" bezeichnen, je nachdem φ_1 dem System V, oder dem System W, nicht aber dem System V genügt.

153. Ehe wir an diese beiden Reduktionsmethoden weitere Schlüsse knüpfen, wollen wir sie an dem Spezialfall $n = \varkappa = 3$ erläutern. Das System V, das zu dem bedingungslosen Pfaff'schen Ausdruck

$$(10) \qquad \varDelta \equiv X dx + Y dy + Z dz$$

gehört, reduzirt sich nach Art. 133 auf die einzige partielle Differentialgleichung:

$$(11) \qquad (Y_z - Z_y)\frac{\partial f}{\partial x} + (Z_x - X_z)\frac{\partial f}{\partial y} + (X_y - Y_x)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$ [1]

Nehmen wir, um die Ideen zu fixiren, an, daſs $X_y - Y_x$ nicht identisch verschwinde, so besitzt diese Gleichung zwei, hinsichtlich x, y unabhängige Integrale φ, ψ (Art. 46). Eins derselben, etwa φ, muſs x wirklich enthalten, und wir können darnach mittels der Gleichung

$$(12) \qquad \varphi(xyz) = x'$$

die Variable x in der Form

$$(13) \qquad x = \omega(x', y, z)$$

ausdrücken. Substituiren wir diesen Wert von x in (10), so erhalten wir für $\varDelta$ die Darstellung:

$$(14) \qquad \varDelta \equiv X\frac{\partial \omega}{\partial x'}dx' + \left(Y + X\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)dy + \left(Z + X\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)dz.$$

Nach Nr. 151 ist jetzt der Ausdruck

$$\varDelta_1 \equiv \left(Y + X\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)dy + \left(Z + X\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)dz$$

ein exaktes Differential, wenn man sich in X, Y, Z die Variable x durch ω ersetzt denkt, und x' als willkürliche Konstante betrachtet. Es ist nicht ohne Interesse, sich davon direkt zu überzeugen. Damit $\varDelta_1$ exakt sei, muſs man haben:

$$(15) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(Y + X\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(Z + X\frac{\partial \omega}{\partial z}\right).$$

Die Funktionen XYZ enthalten nun die Variabeln y und z sowohl explicite als auch implicite, da x durch ω ersetzt ist. Mit Rücksicht darauf schreibt sich die Bedingung (15) folgendermaſsen:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial z}\right) \equiv$$
$$\equiv \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right),$$

wobei natürlich x überall durch ω ersetzt ist; d. h. man muſs vermöge $x = \omega$ identisch haben

$$Y_z - Z_y + (Y_x - X_y)\frac{\partial \omega}{\partial z} + (X_z - Z_x)\frac{\partial \omega}{\partial y} \equiv 0$$

---

1) $X_y \equiv \dfrac{\partial X}{\partial y}$ etc.

für jedes beliebige Wertsystem x', y, z. Daſs aber diese Bedingung thatsächlich erfüllt ist, folgt unmittelbar aus der Bedeutung von ω.

Demnach kann $\varDelta_1$ mittels einer Operation null auf die Form

$$\varDelta_1 \equiv df_2(x', y, z)$$

gebracht werden, worin aber bei der Ausrechnung des Differentials df_2 die Gröſse x' als Konstante zu betrachten ist. Führt man diesen Ausdruck in $\varDelta$ ein, und versteht man unter dem Symbol d wie gewöhnlich eine Differentiation, die sich auf alle drei Variable $x'yz$ bezieht, so ergiebt sich:

$$\varDelta \equiv df_2(x'yz) + F_1(x', y, z)df_1,$$

worin

$$F_1 \equiv X\frac{\partial \omega}{\partial x'} - \frac{\partial f_2}{\partial x'}$$

und f_1 statt x' geschrieben wurde. Ersetzt man hinterher x' wiederum durch $\varphi(xyz)$, so gehen f_1, f_2, F_1 in Funktionen von xyz über, und man erhält für $\varDelta$ die *Normalform*

$$\varDelta \equiv df_2 + F_1 df_1.$$

Daſs die Funktionen f_1, f_2, F_1 hinsichtlich der Variabeln xyz unabhängig sind, folgt schon daraus, daſs andernfalls $\varDelta$ mit einem Ausdruck in nur zwei unabhängigen Veränderlichen identisch wäre, also nicht die Klasse 3 besitzen könnte.

Die vorstehende Methode zur Herstellung der Normalform von $\varDelta$ erfordert, wie man sieht, auſser Differentiationen und Eliminationen nur eine einzige Operation 2 und eine einzige Operation null, ist also bedeutend einfacher, als die bisherigen Reduktionsmethoden.

Unser Verfahren bestätigt aufs neue die auch aus der Multiplikatortheorie folgende Thatsache, daſs nach Ermittelung einer Lösung φ der partiellen Differentialgleichung (11) die zweite Lösung ψ durch Differentiationen, Eliminationen und eine einzige Quadratur gefunden wird.

Beispiel: $$\varDelta \equiv y\,dx + z\,dy + x\,dz.$$

Man hat in diesem Falle

$$Y_z - Z_y \equiv 1;\ Z_x - X_z \equiv 1,\ X_y - Y_x \equiv 1;$$

also wird die partielle Differentialgleichung V:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Eines ihrer Integrale ist $x - y$; setzen wir daher:

$$x - y = x';\ x = y + x',$$

und substituiren diesen Wert von x in $\varDelta$, so kommt:

$$\varDelta \equiv y dx' + (y + z) dy + (y + x') dz.$$

Man hat nun

$$\varDelta_1 \equiv (y + z) dy + (y + x') dz \equiv d\left(\frac{1}{2} y^2 + yz + x'z\right),$$

wenn bei der Differentiation x' als Konstante gilt; betrachtet man aber x' als Variable und substituirt den Ausdruck für $\varDelta_1$ in $\varDelta$, so folgt:

$$\varDelta \equiv (y - z) dx' + d\left(\frac{1}{2} y^2 + yz + x'z\right)$$

oder, wenn man x' wieder durch $x - y$ ersetzt:

$$\varDelta \equiv d\left(\frac{1}{2} y^2 + xz\right) + (y - z) d(x - y).$$

Man wird bemerken, dafs die Funktionen $x - y$ und $y - z$ zwei unabhängige Lösungen der Gleichung V darstellen, was mit Nr. 131 übereinstimmt.

154. Genügt die Funktion φ in (12) der linearen partiellen Differentialgleichung (11) nicht, ist sie also ganz beliebig gewählt, so verwandelt sich $\varDelta$ vermöge der Substitution (13) in einen Ausdruck der Form (14), und $\varDelta_1$ besitzt jetzt nach Art. 151 die Klasse zwei, wenn x' darin als Konstante betrachtet wird.

Ist dann

$$\psi'(x', y, z) = c$$

die allgemeine Integralgleichung der Gleichung $\varDelta_1 = 0$, (die eine gewöhnliche Differentialgleichung in den beiden Variabeln y und z darstellt), so hat $\varDelta_1$ die Form:

$$\chi'(x', y, z) d\psi,$$

wenn sich das Differentiationssymbol nur auf y, z bezieht, und es erhält $\varDelta$ schliefslich die Form

$$\pi' dx' + \chi' d\psi',$$

wobei jetzt das Differential $d\psi'$ auf alle drei Variabeln $x'yz$ zu beziehen ist und

$$\pi' \equiv X \frac{\partial \omega}{\partial x'} - \chi' \frac{\partial \psi'}{\partial x'}$$

gesetzt wurde. Indem wir schliefslich x' wieder durch seinen Wert φ ersetzen, wodurch $\pi' \chi' \psi'$ bezw. in π, χ, ψ übergehen mögen, erhalten wir die reduzirte Form:

$$\varDelta \equiv \pi(xyz) d\varphi(xyz) + \chi(xyz) d\psi(xyz).$$

Dieses Verfahren, welches offenbar mit der „ungeraden Pfaff'schen Reduktion" des Art. 109 übereinstimmt, erfordert, wie man sieht, nur eine einzige Operation 1, liefert aber dafür auch keine Normalform, sondern nur eine reduzirte Form mit 2 Differentialelementen.

§ 2. Dritter Beweis des Fundamentaltheorems.

155. Indem wir nunmehr zu der Betrachtung des allgemeinen Falles zurückkehren, wollen wir uns auf den Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ mit der Klasse $\varkappa$ die erste Clebsch'sche Reduktion angewendet denken, d. h. wir führen mittels der Formel

$$x_1' = f_1(x_1 x_2 \,..\, x_n), \tag{1}$$

worin f_1 ein beliebiges Integral des Systems V bedeutet, statt x_1 die neue Variable x_1' in $\varDelta$ ein, während wir die übrigen Variabeln $x_2 \,..\, x_n$ auch in der Bezeichnung beibehalten wollen. Hierdurch erhält $\varDelta$ die Form

$$\begin{aligned}\varDelta &\equiv \Phi^{(1)}(x_1', x_2 \,..\, x_n)\, dx_1' + \sum_2^n{}^{k} a_k^{(1)}(x_1' x_2 \,..\, x_n)\, dx_k \\ &\equiv \Phi^{(1)}(x_1' x_2 \,..\, x_n)\, dx_1' + \varDelta_1,\end{aligned}$$

wobei $\varDelta_1$ als Pfaff'scher Ausdruck in den Variabeln $x_2 x_3 \,..\, x_n$ die Klasse $\varkappa - 2$ besitzt. Ist nun $\varkappa - 2 > 1$, so existirt nach Art. 132 ein vollständiges System $V^{(1)}$ mit den Independenten $x_2 \,..\, x_n$, das zu $\varDelta_1$ in der analogen Beziehung steht, wie das System V zu $\varDelta$. Die Anzahl der Gleichungen von $V^{(1)}$ ist gleich

$$n - 1 - (\varkappa - 2) + 1 = n - \varkappa + 2$$

und die Zahl seiner unabhängigen Integrale gleich

$$n - 1 - (n - \varkappa + 2) = \varkappa - 3.$$

Es sei $f_2^{(1)}(x_1' x_2 \,..\, x_n)$ ein beliebiges Integral des vollständigen Systems $V^{(1)}$; die Funktion $f_2^{(1)}$ wird natürlich im allgemeinen von dem Parameter x_1', der in die Koeffizienten der Gleichungen $V^{(1)}$ eingeht, ebenfalls abhängen. Ferner dürfen wir voraussetzen, dafs $f_2^{(1)}$ die Variable x_2 wirklich enthält, da wir dies nötigenfalls dadurch erreichen können, dafs wir die Variabeln $x_2 \,..\, x_n$ anders nummeriren. Mittels der Formel

$$x_2' = f_2^{(1)}(x_1', x_2 \,..\, x_n)$$

führen wir dann statt x_2 die neue Variable x_2' in $\varDelta_1$ ein, während wir die andern Variabeln $x_3 \,..\, x_n$ beibehalten. Dadurch erhält $\varDelta_1$ die Form:

$$\begin{aligned}\varDelta_1 &\equiv \Phi^{(2)}(x_1' x_2' x_3 \,..\, x_n)\, dx_2' + \sum_3^n{}^{k} a_k^{(2)}(x_1' x_2' x_3 \,..\, x_n)\, dx_k \\ &\equiv \Phi^{(2)}(x_1' x_2' x_3 \,..\, x_n)\, dx_2' + \varDelta_2,\end{aligned}$$

wo $\varDelta_2$, als Pfaff'scher Ausdruck in den Variabeln $x_3 \ldots x_n$ betrachtet, die Klasse $\varkappa - 4$ besitzt. Ist jetzt $\varkappa - 4 > 1$, so gehört zu $\varDelta_2$ ein vollständiges System $V^{(2)}$ in demselben Sinne wie V zu $\varDelta$, und zwar besteht $V^{(2)}$ aus $n - \varkappa + 3$ Gleichungen in $n - 2$ Independenten $x_3 \ldots x_n$, besitzt also $\varkappa - 5$ Integrale. Ist

$$f_3^{(2)}(x_1' x_2' x_3 \ldots x_n)$$

eines dieser Integrale, so führen wir mittels der Formel

$$x_3' = f_3^{(2)}$$

statt x_3 die Variabeln x_3' in $\varDelta_2$ ein etc.

Nach ν derartigen Schritten kommen wir zu einem Ausdruck $\varDelta_\nu$, der mit dem vorhergehenden Ausdruck $\varDelta_{\nu-1}$ folgendermaßsen zusammenhängt:

$$\varDelta_{\nu-1} \equiv \Phi^{(\nu)} dx_\nu' + \varDelta_\nu; \quad \varDelta_\nu \equiv \sum_{\nu+1}^{n}{}^k a_k^{(\nu)} dx_k.$$

Dabei sind $\Phi^{(\nu)}$ und $a_k^{(\nu)}$ Funktionen der Variabeln $x_1' \ldots x_\nu' x_{\nu+1} \ldots x_n$, und $\varDelta_\nu$ besitzt als Pfaff'scher Ausdruck mit den Veränderlichen $x_{\nu+1} \ldots x_n$ die Klasse $\varkappa - 2\nu$. Die Gröſsen $x_1' \ldots x_\nu'$ hängen mit den ursprünglichen x durch die Formeln

$$x_\iota' = f_i^{(i-1)}(x_1' x_2' \ldots x_{i-1}' x_i, x_{i+1} \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2 \ldots \nu)$$

zusammen, und es ist allgemein $f_i^{(\iota-1)}$ ein beliebiges Integral des $n - \varkappa + i$-gliedrigen vollständigen Systems $V^{(\iota-1)}$ mit $n - i + 1$ Independenten, das zu $\varDelta_{\iota-1}$ in derselben Beziehung steht, wie V zu $\varDelta$.

Wir bemerken ein für allemal, daſs bei der hier gewählten Bezeichnungsweise der obere Index $^{(\nu)}$ andeuten soll, daſs die betreffende Funktion ausschlieſslich die Variabeln $x_1' \ldots x_\nu' x_{\nu+1} \ldots x_n$ enthält; darnach wird f^0 statt f geschrieben.

156. Es sei zunächst $\varkappa = 2\lambda$. Dann erhalten wir durch $\lambda - 1$-malige Anwendung des soeben geschilderten Verfahrens einen Pfaff'schen Ausdruck

$$\varDelta_{\lambda-1} \equiv \sum_{\lambda}^{n}{}^k a_k^{(\lambda-1)} dx_k,$$

der die Klasse zwei besitzt, wenn darin $x_\lambda x_{\lambda+1} \ldots x_n$ als Veränderliche, dagegen $x_1' \ldots x_{\lambda-1}'$ als willkürliche Parameter betrachtet werden. Man kann daher mittels einer Operation 1 eine Funktion $f_\lambda^{(\lambda-1)}$ so bestimmen, das $\varDelta_{\lambda-1}$ die Form

$$\Phi^{(\lambda)}(x_1' \ldots x_\lambda' x_{\lambda+1} \ldots x_n) dx_\lambda'$$

annimmt, wenn man mittels der Gleichung

$$(2) \qquad x_\lambda' = f_\lambda^{(\lambda-1)}(x_1' \,..\, x_{\lambda-1}' x_\lambda x_{\lambda+1} \,..\, x_n)$$

statt x_λ die neue Variable x_λ' einführt. Es gilt dann also die Identität:

$$(3) \qquad \varDelta_{\lambda-1} \equiv F_\lambda^{(\lambda-1)} df_\lambda^{(\lambda-1)},$$

wenn mit $F_\lambda^{(\lambda-1)}$ diejenige Funktion der Variabeln $x_1' \,..\, x_{\lambda-1}' x_\lambda \,..\, x_n$ bezeichnet wird, die aus $\Phi^{(\lambda)}$ entsteht, wenn darin x_λ' durch seinen Ausdruck (2) ersetzt wird. In der Identität (3) sind bei der Differentiation rechts nur $x_\lambda \,..\, x_n$ als Variable zu behandeln. Setzen wir daher für $\varDelta_{\lambda-1}$ seinen Ausdruck (3) in die Gleichung

$$\varDelta_{\lambda-2} \equiv \Phi^{(\lambda-1)} dx_{\lambda-1}' + \varDelta_{\lambda-1}$$

ein, so erhalten wir:

$$\varDelta_{\lambda-2} \equiv F_{\lambda-1}^{(\lambda-1)} dx_{\lambda-1}' + F_\lambda^{(\lambda-1)} df_\lambda^{(\lambda-1)},$$

worin gesetzt ist:

$$F_{\lambda-1}^{(\lambda-1)} \equiv \Phi^{(\lambda-1)} - F_\lambda^{(\lambda-1)} \frac{\partial f_\lambda^{(\lambda-1)}}{\partial x_{\lambda-1}'}.$$

Setzen wir hierin für $x_{\lambda-1}'$ seinen Wert

$$(4) \qquad x_{\lambda-1}' = f_{\lambda-1}^{(\lambda-2)}(x_1' \,..\, x_{\lambda-2}', x_{\lambda-1} \,..\, x_n),$$

so erhält man für $\varDelta_{\lambda-2}$ folgende Darstellung:

$$\varDelta_{\lambda-2} \equiv F_{\lambda-1}^{(\lambda-2)} df_{\lambda-1}^{(\lambda-2)} + F_\lambda^{(\lambda-2)} df_\lambda^{(\lambda-2)},$$

darin bedeuten

$$F_{\lambda-1}^{(\lambda-2)}, \quad F_\lambda^{(\lambda-2)}, \quad f_\lambda^{(\lambda-2)}$$

diejenigen Funktionen, die bez. aus

$$F_{\lambda-1}^{(\lambda-1)}, \quad F_\lambda^{(\lambda-1)}, \quad f_\lambda^{(\lambda-1)}$$

dadurch entstehen, daſs man $x_{\lambda-1}'$ durch seinen Ausdruck (4) ersetzt.

Setzt man die so erhaltene Darstellung von $\varDelta_{\lambda-2}$ in den Ausdruck für $\varDelta_{\lambda-3}$ etc.; so erhält man allgemein für $\varDelta_\nu$ ($\nu = \lambda - 1, \lambda - 2, .. 1$) die Darstellung:

$$(5) \qquad \varDelta_\nu \equiv F_{\nu+1}^{(\nu)} df_{\nu+1}^{(\nu)} + F_{\nu+2}^{(\nu)} df_{\nu+2}^{(\nu)} + \cdots + F_\lambda^{(\nu)} df_\lambda^{(\nu)};$$

alle in diesem Ausdruck vorkommenden $F_{\nu+k}^{(\nu)}$, $f_{\nu+k}^{(\nu)}$ sind Funktionen der Variabeln $x_1' x_2' \,..\, x_\nu' x_{\nu+1} \,..\, x_n$; die Differentiale rechts beziehen sich ausschlieſslich auf die Variabeln $x_{\nu+1} \,..\, x_n$. Man erhält $f_{\nu+k}^{(\nu)}$ aus $f_{\nu+k}^{(\nu+k-1)}$, indem man daraus die Variabeln $x_{\nu+k-1}'$, $x_{\nu+k-2}'$, .. $x_{\nu+1}'$ mittels der Relationen:

$$(6) \qquad x_1' = f_1, \; x_2' = f_2^{(1)} \,..\, x_\lambda' = f_\lambda^{(\lambda-1)}$$

successive wegschafft. Ebenso entsteht $F^{(\nu)}_{\nu+k}$ aus $F^{(\nu+k)}_{\nu+\lambda}$, indem man aus dieser Funktion die Variabeln $x'_{\nu+k}, x'_{\nu+\lambda-1} \ldots x'_{\nu+1}$ mittels (6) successive entfernt. Um also auch alle Koeffizienten $F^{(\nu)}_{\nu+k}$ zu kennen, genügt es, die Funktionen $F_s^{(s)}$ $(s = \lambda, \lambda - 1 \ldots 1)$ zu ermitteln. Diese letzteren ergeben sich aber mittels der Rekursionsformel:

$$F_s^{(s)} = \Phi^{(s)} - F^{(s)}_{s+1} \frac{\partial f^{(s)}_{s+1}}{\partial x_s'} - F^{(s)}_{s+2} \frac{\partial f^{(s)}_{s+2}}{\partial x_s'} - \cdots - F^{(s)}_{\lambda} \frac{\partial f^{(s)}_{\lambda}}{\partial x_s'}.$$

Mittels dieser Formel und der nachstehenden:

$$F_\lambda^{(\lambda)} \equiv \Phi^{(\lambda)}$$

lassen sich die Funktionen $F^{(\lambda-1)}_{\lambda-1}, F^{(\lambda-2)}_{\lambda-2} \ldots F^{(1)}_1$ successive berechnen, da ja die rechtsstehenden Funktionen $F^{(s)}_{s+k}$ sich aus $F^{(s+\lambda)}_{s+\lambda}$ durch Elimination ergeben.

Setzen wir in der Identität (5) den Index $\nu = 0$, und schreiben wir F_ι statt F_ι^0 und f_i statt f_ι^0, so erhalten wir für $\varDelta_0$ oder $\varDelta$ folgende Darstellung:

$$(7) \qquad \varDelta \equiv \sum a_\iota dx_i \equiv F_1 df_1 + \cdots + F_\lambda df_\lambda,$$

worin die F_i, f_i nur mehr die ursprünglichen Variabeln $x_1 \ldots x_n$ enthalten. Die Funktion f_i entsteht aus $f_i^{(i-1)}$, und ebenso F_ι aus $F_\iota^{(i)}$, indem man daraus die x_k' mittels (6) eliminirt. Statt aber die F_ι in dieser Weise zu berechnen, können wir sie direkt mittels der aus (7) folgenden Identitäten

$$(8) \qquad a_i \equiv F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_\iota} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_\iota} + \cdots + F_\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\iota} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

ermitteln. In der That sind ja die Funktionen $f_1 \ldots f_\lambda$ ihrer Entstehung nach hinsichtlich $x_1 \ldots x_\lambda$ unabhängig, also lassen sich die ersten λ Gleichungen (8) nach $F_1 \ldots F_\lambda$ auflösen.

157. Im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ bleibt die ganze vorige Betrachtung gültig, nur mit dem Unterschiede, dafs jetzt der Pfaff'sche Ausdruck $\varDelta_{\lambda-1}$, wenn man darin $x_\lambda, x_{\lambda+1} \ldots x_n$ als Variable betrachtet, die Klasse 1 besitzt, also mit Hülfe einer einzigen Operation null auf die Form eines exakten Differentials

$$df_\lambda^{(\lambda-1)}(x_1' x_2' \ldots x'_{\lambda-1} x_\lambda \ldots x_n)$$

gebracht werden kann, wobei die Differentiation nur auf die Variabeln $x_\lambda \ldots x_n$ zu beziehen ist. Wir haben daher im vor. Art. die Funktion $F_\lambda^{(\lambda)}$ oder $\Phi^{(\lambda)}$, und infolge dessen auch alle Funktionen $F_\lambda^{(\lambda-1)}$,

$F_\lambda^{(\lambda-2)} \ldots F_\lambda^{(1)} F_\lambda$ identisch gleich eins zu setzen, und erhalten so für den gegebenen Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ die Darstellung:

$$(9) \qquad \varDelta \equiv F_1 df_1 + \cdots + F_{\lambda-1} df_{\lambda-1} + df_\lambda .$$

158. Es sei vor allem hervorgehoben, dafs die soeben auseinandergesetzte Reduktionsmethode uns einen neuen, von dem früheren vollkommen unabhängigen *Beweis des Fundamentaltheorems* liefert. Es ist nützlich, die einzelnen Stadien dieses Beweises noch einmal kurz anzugeben: In Art. 98 wurde gezeigt, dafs die Klasse $\varkappa$ eine Invariante des Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$ ist; in Art. 140 und 141 sodann, dafs die beiden Gleichungensysteme V und W vollständig und mit $\varDelta$ invariant verknüpft sind. Auf Grund dieser drei Thatsachen zeigten wir sodann in Art. 149 die Möglichkeit der ersten Clebsch'schen Reduktion, und mit deren Hülfe in der vor. Nr. das Bestehen einer Normalform (7) bezw. (9) in den Fällen $\varkappa = 2\lambda$ bezw. $2\lambda - 1$. Nach Art. 127 und 130 läfst sich jetzt hinterher zeigen, dafs die genannten Normalformen in der That nur einem $\varDelta$ mit der Klasse 2λ bezw. $2\lambda - 1$ zukommen, und dafs die darin auftretenden $\varkappa$ Funktionen F, f unabhängig sind.

159. Die oben geschilderte Reduktion liefert uns überdies ein weit einfacheres Verfahren zur Herstellung einer Normalform von $\varDelta$ als die bisherigen Methoden. In der That genügt es ja, um eine Normalform von $\varDelta$ zu erhalten, die λ Funktionen

$$f_\nu^{(\nu-1)}(x_1' x_2' \ldots x_{\nu-1}' x_\nu \ldots x_n) \quad (\nu = 1, 2, \ldots \lambda)$$

zu ermitteln; die Normalform ergiebt sich dann durch gewisse Differentiationen und Eliminationen. Nun ist $f_\nu^{(\nu-1)}$ ein beliebiges Integral des $n - \varkappa + \nu$-gliedrigen vollständigen Systems $V^{(\nu-1)}$ mit den $n - \nu + 1$ Independenten $x_\nu, x_{\nu+1} \ldots x_n$. Wendet man nun auf das System $V^{(\nu-1)}$ die Mayer'sche Methode an (Art. 87, 88), so erfordert die Ermittelung von $f_\nu^{(\nu-1)}$ eine einzige Operation

$$n - \nu + 1 - (n - \varkappa + \nu) = \varkappa - 2\nu + 1.$$

Die Herstellung der Normalform eines Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$ mit der Klasse $\varkappa$ erfordert demnach aufser Differentiationen und Eliminationen bei geradem $\varkappa$ nur noch je eine Operation

$$\varkappa - 1, \ \varkappa - 3, \ \ldots \ 3, \ 1$$

und bei ungeradem $\varkappa$ je eine Operation

$$\varkappa - 1, \ \varkappa - 3, \ \ldots \ 4, \ 2, \ 0.$$

Beiläufig sei noch hervorgehoben, dafs f_1 eine *beliebige* Lösung des Systems V, allgemein $f_\nu^{(\nu-1)}$ eine *beliebige* Lösung von $V^{(\nu-1)}$ bedeutet, daſs also jeder Pfaff'sche Ausdruck $\varDelta$, dessen Klasse $\varkappa > 1$ ist, unendlich viele Normalformen besitzt (vgl. auch Art. 124).

160. Das vollständige System $V^{(\nu-1)}$ mit den Independenten $x_\nu \,..\, x_{n+1}$, das zur Bestimmung der Funktion $f_\nu^{(\nu-1)}$ dient, steht zu dem Pfaff'schen Ausdruck

$$\varDelta_{\nu-1} \equiv \sum_\nu^n {}^k a_k^{(\nu-1)} dx_k$$

in derselben Beziehung, wie V zu $\varDelta$; die Koeffizienten der in $V^{(\nu-1)}$ enthaltenen linearen partiellen Differentialgleichungen sind darnach gewisse rationale Ausdrücke in den Gröſsen $a_k^{(\nu-1)}$ und $a_{kl}^{(\nu-1)}$, wenn gesetzt wird:

$$a_{kl}^{(\nu-1)} \equiv \frac{\partial a_k^{(\nu-1)}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_l^{(\nu-1)}}{\partial x_k}.$$

Um die Funktionen $a_k^{(\nu-1)}$ zu erhalten, hat man vermöge der Formeln

$$x_1' = f_1;\; x_2' = f_2^{(1)} \,..\, x_{\nu-1}' = f_{\nu-1}^{(\nu-2)}$$

oder, was offenbar dasselbe ist, vermöge der Formeln

$$x_1' = f_1,\; x_2' = f_2 \,..\, x_{\nu-1}' = f_{\nu-1}$$

statt $x_1 \,..\, x_{\nu-1}$ die Variabeln $x_1' \,..\, x_{\nu-1}'$ in $\varDelta$ einzuführen. Der Koeffizient des Differentials dx_k in dem so transformirten Ausdruck $\varDelta$ ist dann $a_k^{(\nu-1)}$.

Demnach hängen die Koeffizienten des Systems $V^{(\nu-1)}$ implicite ab von den Funktionen $f_1 \,..\, f_{\nu-1}$, und können also erst angegeben werden, wenn die Form dieser Funktionen wirklich bestimmt ist. Aus diesem Grunde haben wir das Reduktionsverfahren der Artikel 155 bis 157 in der Überschrift dieses Kapitels als „*implicites*“ Verfahren gekennzeichnet, und zwar im Gegensatz zu einer in Kap. IX zu entwickelnden „expliciten“ Methode; bei dieser erfolgt nämlich, wie wir sehen werden, die Bestimmung der in der Normalform auftretenden Funktion f_ν durch Integration eines vollständigen Systems V_ν, dessen Koeffizienten die Gröſsen a_i, a_{ik} und die Ableitungen von $f_1 f_2 \,..\, f_{\nu-1}$ explicite enthalten, das also der Form nach angegeben werden kann, auch wenn $f_1 \,..\, f_{\nu-1}$ noch nicht bekannt sind.

161. Wir wollen auch auf die *zweite* Reduktionsmethode von Clebsch noch mit ein paar Worten eingehen. Bedeutet $\varphi_1(x_1 x_2 \,..\, x_n)$ ein beliebiges, von x_1 nicht unabhängiges Integral des zu $\varDelta$ gehörigen vollständigen Systems W, bezw. im Falle $\varkappa = n$ eine arbiträre Funktion der Variabeln x, und führen wir mittels der Formel

$$x_1' = \varphi_1(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)$$

statt x_1 die neue Variable x_1' in den Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ ein, so erhält $\varDelta$ die Form

$$\varDelta \equiv \varPhi^{(1)} dx_1' + \varDelta_1,$$

worin der Ausdruck

$$\varDelta_1 \equiv \sum_2^n{}^k a_k'(x_1', x_2 \,.\,.\, x_n) dx_k$$

die Klasse $\varkappa - 1$ besitzt, wenn $x_2 \,.\,.\, x_n$ als Variable betrachtet werden. Nehmen wir zunächst $\varkappa = 2\lambda - 1$ an, so läſst sich $\varDelta_1$ nach Art. 156 auf die Form

$$\varDelta_1 \equiv \varPhi_2^{(1)} d\varphi_2^{(1)} + \varPhi_3^{(1)} d\varphi_3^{(1)} + \cdot\cdot + \varPhi_\lambda^{(1)} d\varphi_\lambda^{(1)}$$

reduziren, worin die Funktionen $\varPhi_k^{(1)}$, $\varphi_k^{(1)}$ von den Variabeln $x_1', x_2 \,.\,.\, x_n$ abhängen, die Differentiale $d\varphi_k^{(1)}$ aber nur auf die Veränderlichen $x_2 \,.\,.\, x_n$ Bezug haben. Es folgt dann eine Identität der Form:

$$\varDelta_1 \equiv \varPhi_1^{(1)} dx_1' + \varPhi_2^{(1)} d\varphi_2^{(1)} + \cdot\cdot + \varPhi_\lambda^{(1)} d\varphi_\lambda^{(1)},$$

worin gesetzt ist

$$\varPhi_1^{(1)} \equiv \varPhi^{(1)} - \sum_2^\lambda{}^s \varPhi_s^{(1)} \frac{\partial \varphi_s^{(1)}}{\partial x_1'}$$

und die Differentiale $d\varphi_k^{(1)}$ sich jetzt auf alle n Variabeln $x_1'\ x_2 \,.\,.$ beziehen. Ersetzt man x_1' überall durch φ_1, und geht dadurch $\varPhi_i^{(1)}$ in $\varPhi_i$ und $\varphi_i^{(1)}$ in φ_i über so erhält man:

$$(10) \qquad \varDelta \equiv \varPhi_1 d\varphi_1 + \varPhi_2 d\varphi_2 + \cdot\cdot + \varPhi_\lambda d\varphi_\lambda,$$

und wir wissen aus Art. 129, daſs zwischen den Funktionen $\varPhi_1 \,.\,.\, \varPhi_\lambda$ $\varphi_1 \,.\,.\, \varphi_\lambda$ eine und nur eine identische Relation besteht, die nach einer von den Gröſsen $\varPhi$ aufgelöst werden kann.

Diese Methode zur Herstellung einer reduzirten Form (10) erfordert, falls $\varkappa = 2\lambda - 1 < n$ ist, auſser der Operation $\varkappa$, die zur Ermittelung der Funktion $\varphi_1(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)$ nötig ist, noch je eine Operation $\varkappa - 2$, $\varkappa - 4$, .. 3, 1, also höhere Operationen als das Verfahren des Art. 159. Ist dagegen $\varkappa = 2\lambda - 1 = n$, so kann für φ_1 eine beliebige Funktion gewählt werden, und es sind nur die Operationen $\varkappa - 2$, $\varkappa - 4$, .. 1 erforderlich, also niedrigere Operationen als bei der Methode des Art. 159; freilich liefert unser Verfahren dafür auch keine Normalform von $\varDelta$, sondern lediglich eine reduzirte Form mit λ Differentialelementen (für $\lambda = 2$ vgl. Art. 154). Nebenbei zeigt sich hier neuerdings, daſs in der reduzirten Form eines bedingungslosen

Ausdrucks mit ungerader Variabelnzahl eines der Differentialelemente, nämlich $d\varphi_1$, ganz beliebig angenommen werden kann (vgl. Art. 111).

162. Ist $\varkappa = 2\lambda$, so besitzt der vorhin mit $\varDelta_1$ bezeichnete Pfaff'sche Ausdruck die Klasse $2\lambda - 1$, kann also nach Art. 157 auf die Normalform

$$d\Phi^{(1)} + \Phi_2^{(1)} d\varphi_2^{(1)} + \cdots + \Phi_\lambda^{(1)} d\varphi_\lambda^{(1)}$$

gebracht werden, wobei die $\Phi^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$ Funktionen der Variabeln x_1', $x_2 \,.\,.\, x_n$ bedeuten, und die Differentiationssymbole d sich nur auf $x_2 \,.\,.\, x_n$ erstrecken. Man gelangt so zu der folgenden Darstellung des Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$:

$$\varDelta \equiv d\Phi + \Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_\lambda d\varphi_\lambda.$$

Offenbar besteht zwischen den Funktionen Φ, φ eine, aber auch nur eine identische Relation.

Dieses Verfahren erfordert aufser Differentiationen und Eliminationen je eine Operation $\varkappa, \varkappa - 2, \,.\,.\, 2, 0$; im Falle $\varkappa = n$ nur die Operationen $\varkappa - 2, \varkappa - 4, \,.\,.\, 2, 0$. Obwohl man auf diesem Wege zu einer Form von $\varDelta$ gelangt, die nicht die Minimalzahl von Differentialelementen enthält, so ist die hiermit angedeutete Reduktionsmethode doch für eine spätere Anwendung von Wichtigkeit.

§ 3. Die analytische Beschaffenheit der Normalform.

163. Die Klasse $\varkappa$ des Pfaff'schen Ausdrucks

$$\varDelta \equiv \sum_1^n {}^i\, a_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)\, dx_i$$

sei gleich 2λ, und die Pfaff'schen Aggregate

$$P = (1, 2 \,.\,.\, 2\lambda);\ \Pi_{2\lambda, 0} = (1, 2 \,.\,.\, 2\lambda - 1, 0)$$

mögen nicht identisch null sein. Es sei jetzt

(1) $$x_1^0 x_2^0 \,.\,.\, x_n^0$$

eine Stelle, an der alle Koeffizienten $a_1 \,.\,.\, a_n$ regulär und die beiden Funktionen P und $\Pi_{2\lambda, 0}$ nicht null sind. Nach Art. 128 kann dann das zu $\varDelta$ gehörige System V auf die folgende Form gebracht werden

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_1^{\varkappa - 1} {}^k\, \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i = \varkappa, \varkappa + 1 \,.\,.\, n)$$

und sämtliche Koeffizienten ξ_{ik} sind an der Stelle (1) regulär (Art. 38, 5), 6)). Das System V besitzt daher unbegrenzt viele Integrale, die an der Stelle (1) regulär sind. Es sei $f_1(x_1 \,.\,.\, x_n)$ ein solches Integral; die Funktion $\psi(x_1 \,.\,.\, x_{\varkappa-1})$, auf die sich f_1 vermöge $x_\varkappa = x_\varkappa^0 \,.\,.\, x_n = x_n^0$

reduzirt, kann beliebig gewählt werden (Art. 62) und infolge dessen dürfen wir auch annehmen, dafs die Ableitung $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ an der Stelle (1) nicht null ist. Bezeichnen wir dann mit $\bar{x}_1'$ den Wert, den f_1 an der Stelle (1) annimmt, so läfst sich die Gleichung

$$x_1' = f_1(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) \tag{3}$$

folgendermafsen auflösen

$$x_1 = \varphi(x_1' x_2 \,.\,.\, x_n), \tag{4}$$

und die Funktion φ ist eine gewöhnliche Potenzreihe der n Gröfsen

$$x_1 - \bar{x}_1',\; x_2 - x_2^0 \,.\,.\, x_n - x_n^0; \tag{5}$$

sie nimmt an der Stelle

$$\bar{x}_1',\, x_2^0 \,.\,.\, x_n^0 \tag{6}$$

den Wert x_1^0 an, und es ist $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1'}$ daselbst nicht null. Führt man nun mittels der Formel (3) die neue Variable x_1' statt x_1 in $\varDelta$ ein, so erhält man

$$\varDelta \equiv a_1' dx_1' + \sum_2^n{}^k a_k' dx_k \equiv a_1' dx_1' + \varDelta_1,$$

wenn gesetzt wird:

$$a_1' \equiv a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1'}; \quad a_k' \equiv a_k + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \tag{7}$$

Ersetzt man in den Funktionen a_i die Gröfse x_1 überall durch φ_1, so erhält man für die Funktionen $a_1' \,.\,.\, a_n'$ nach Art. 38, 6) gewöhnliche Potenzreihen der Gröfsen (5). Schreiben wir jetzt:

$$a_{1k}' \equiv \frac{\partial a_1'}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k'}{\partial x_1'} \equiv - a_{k1}' \qquad (k = 2, 3, \,.\,.\, n)$$

$$a_{ik}' \equiv \frac{\partial a_i'}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k'}{\partial x_i} \equiv - a_{ki}' \qquad (i, k = 2, \,.\,.\, n)$$

so findet man auf Grund der Formeln (7):

$$a_{1k}' \equiv a_{1k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1'}; \quad a_{ik}' = a_{ik} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} a_{i1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} a_{1k}. \tag{8}$$

Wir betrachten jetzt die beiden Matrices:

$$(\mathrm{B}') \left\| \begin{matrix} 0 & a_1' & a_2' & .\,. & a_n' \\ -a_1' & 0 & a_{12}' & .\,. & a_{1n}' \\ . & . & . & . & . \\ -a_n' & a_{n1}' & a_{n2}' & .\,. & 0 \end{matrix} \right\|; \quad (\mathrm{C}') \left\| \begin{matrix} 0 & a_{12}' & .\,. & a_{1n}' \\ a_{21}' & 0 & .\,. & a_{2n}' \\ . & . & . & . \\ a_{n1}' & a_{n2}' & .\,. & 0 \end{matrix} \right\|;$$

sie besitzen beide, ebenso wie die Matrices (B) und (C), den Rang 2λ (Art. 98). Wir schreiben nun

$$(9) \qquad (0, i)' \equiv a_i'; \; (i, k)' \equiv a_{ik}' \qquad (i, k = 1, 2 \, .. \, n)$$

und verstehen unter $(k_1 k_2 \, .. \, k_{2\nu})'$ das Pfaff'sche Aggregat, das aus den Elementen (9) genau nach denselben Regeln gebildet wird, wie das Pfaff'sche Aggregat $(k_1 \, .. \, k_{2\nu})$ aus den Elementen $(0, i)$, (i, k) (Art. 18—20; 97). Dann sind die beiden Pfaff'schen Aggregate

$$(10) \qquad (1, 2, .. \, 2\lambda)'; \; (1, 2, .. \, 2\lambda - 1, \, 0)'$$

Funktionen der n Variabeln x_1', $x_2 \, .. \, x_n$ und verschwinden an der Stelle (6) nicht. Denn diese beiden Ausdrücke sind bezw. mit den folgenden identisch:

$$\frac{\partial \varphi}{d x_1'} \cdot (1, 2 \, .. \, 2\lambda); \; \frac{\partial \varphi}{\partial x_1'} (1, 2, .. \, 2\lambda - 1, 0);$$

es folgt dies unmittelbar aus der Thatsache, dafs auf Grund der Formeln (7) und (8) die Determinanten, die aus (B′) durch Streichung der letzten $n - 2\lambda + 1$ Zeilen und Spalten, bezw. aus (C′) durch Streichung der letzten $n - 2\lambda$ Zeilen und Spalten entstehen, den entsprechenden, mit $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1'}\right)^2$ multiplicirten Unterdeterminanten der Matrices (B) bezw. (C) gleich sind.

Ferner dürfen wir annehmen, dafs nicht alle Funktionen a_2', $a_3' \, .. \, a_{2\lambda-1}'$ an der Stelle (6) null sind. In der That hat man mit Rücksicht auf (7):

$$a_k' \equiv a_k - a_1 \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}};$$

da aber die Funktion $\Pi_{2\lambda, 0}$ an der Stelle $x_1^0 \, .. \, x_n^0$ nicht null ist, so können auch nicht alle Funktionen $a_1 a_2 \, .. \, a_{2\lambda-1}$ daselbst verschwinden; ferner ist an dieser Stelle $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ nicht null. Da nun die Werte, welche die Ableitungen $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_{2\lambda-1}}$ an der Stelle $x_1^0 \, .. \, x_n^0$ annehmen, ganz beliebig gewählt werden können, so läfst es sich stets erreichen, dafs die Gleichungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} : \frac{\partial f_1}{\partial x_2} : \cdots : \frac{\partial f_1}{\partial x_{2\lambda-1}} = a_1 : a_2 : \cdots : a_{2\lambda-1}$$

an der Stelle $x_1^0 \, .. \, x_n^0$ nicht stattfinden, was zu zeigen war.

Es seien jetzt $k_1, k_2 \ldots k_{2\lambda-2}$ irgend welche Zahlen der Reihe

$$(11) \qquad 0, 2, 3, \ldots 2\lambda - 1;$$

dann existirt, behaupten wir, unter den Pfaff'schen Aggregaten der Form

$$(12) \qquad (k_1, k_2 \ldots k_{2\lambda-2})'$$

mindestens eines, das die Ziffer 0 enthält, und vermöge $x_1' = \bar{x}_1'$, $x_2 = x_2^0 \ldots x_n = x_n^0$ nicht null ist. Denn nach der Festsetzung, die wir gerade über die Funktionen $a_2' \ldots a_{2\lambda-1}'$ getroffen haben, müfsten im entgegengesetzten Fall überhaupt alle aus der Reihe (11) zu bildenden Pfaff'schen Aggregate der Form (12) verschwinden (Art. 26); also wäre auch das Aggregat

$$(0, 1, 2, \ldots 2\lambda - 1)'$$

an der Stelle (6) null, was nicht der Fall ist. Daher können wir uns, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, die Variabeln $x_2, x_3, \ldots x_{2\lambda-1}$ von vorneherein so numerirt denken, dafs das Pfaff'sche Aggregat

$$(13) \qquad (2, 3, \ldots 2\lambda - 2, 0)'$$

an der Stelle (6) nicht null ist.

Da nun der Rang der Matrix, die aus (B') durch Streichung der zweiten Zeile und Spalte entsteht, gleich $2\lambda - 2$ ist, so reduziren sich die Pfaff'schen Gleichungen:

$$0 = a_2' dx_2 + \cdots + a_n' dx_n$$
$$a_k' dx_0 = a_{k2}' dx_2 + \cdots + a_{kn}' dx_n \qquad (k = 2 \ldots n)$$

auf nur $2\lambda - 2$ unabhängige, und lassen sich, da das Aggregat (13) an der Stelle (6) nicht verschwindet, in folgender Form auflösen (Art. 25):

$$(14) \qquad \begin{aligned} dx_0 &= \xi_{2\lambda-1,0}' dx_{2\lambda-1} + \xi_{2\lambda,0}' dx_{2\lambda} + \cdots + \xi_{n0}' dx_n \\ -dx_i &= \xi_{2\lambda-1,i}' dx_{2\lambda-1} + \xi_{2\lambda,i}' dx_{2\lambda} + \cdots + \xi_{ni}' dx_n \\ &\qquad (i = 2, 3, \cdots 2\lambda - 2), \end{aligned}$$

und die ξ_{ik}' sind Funktionen der n Variabeln $x_1' x_2 \ldots x_n$, die sich an der Stelle (6) regulär verhalten. Bezeichnen wir demnach wie im vorigen § mit $V^{(1)}$ dasjenige $n - \varkappa + 2$-gliedrige vollständige System mit den Independenten $x_2 \ldots x_n$, das zu $\varDelta_1$ in derselben Beziehung steht, wie V zu $\varDelta$, so bilden die Gleichungen (14) ein unbeschränkt integrabeles und zu $V^{(1)}$ adjungirtes System, also hat $V^{(1)}$ die Form (Art. 72):

$$(15) \; \frac{\partial f}{\partial x_k} = \xi_{k2}' \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_{k3}' \frac{\partial f}{\partial x_3} + \cdots + \xi_{k,\varkappa-2}' \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-2}} \;\; (k = \varkappa - 1, \varkappa \ldots n).$$

164. Es sei jetzt die Klasse $\varkappa$ des Ausdrucks $\varDelta$ gleich $2\lambda - 1$, und $x_1^0 \ldots x_n^0$ eine Stelle, an der alle a_{ι} regulär sind und die Aggregate

$$P' = (1, 2, \ldots 2\lambda - 2),\ Q = (0, 1, \ldots 2\lambda - 1)$$

nicht verschwinden. Dann hat das zu $\varDelta$ gehörige vollständige System V wiederum die Form (2), worin alle $\xi_{\iota k}$ an der Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ regulär sind. Infolgedessen besitzt V unbegrenzt viele, an dieser Stelle reguläre Lösungen; ist $f_1(x_1 \ldots x_n)$ eine solche, so können wir annehmen, dafs $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ an der Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ nicht null ist. Führen wir dann mittels (3) die Variable x_1' statt x_1 in $\varDelta$ ein, und behalten wir alle Bezeichnungen des letzten Artikels bei, so zeigt sich wie oben, dafs die beiden Aggregate

$$(1, 2, \ldots 2\lambda - 2)',\ (0, 1 \ldots 2\lambda - 1)'$$

an der Stelle $\bar{x}_1' x_2^0 \ldots x_n^0$ nicht null sind. Infolgedessen verschwinden an dieser Stelle, wenn wir $\lambda \geqq 3$ annehmen, nicht alle Aggregate

$$(k_1 k_2 \ldots k_{2\lambda-4})',$$

deren Ziffern aus der Reihe $2, 3, \ldots 2\lambda - 2$ entnommen werden. Daher können wir die Variabeln $x_2 x_3 \ldots x_{2\lambda-2}$ von vorneherein so numeriren, dafs das Pfaff'sche Aggregat

$$(2, 3, \ldots 2\lambda - 3)'$$

an der Stelle (6) nicht null ist. Da $\varkappa - 2$ die Klasse von $\varDelta_1$ ist, so reduziren sich die Pfaff'schen Gleichungen

$$\sum_{k=2}^{n} a_{\iota k}' dx_k = 0 \qquad (i = 2, \ldots n)$$

auf nur $\varkappa - 3 = 2\lambda - 4$ unabhängige, und lassen sich nach dem eben Gesagten in der Form

$$- dx_\iota = \xi_{2\lambda-2,\iota}' dx_{2\lambda-2} + \xi_{2\lambda-1,\iota}' dx_{2\lambda-1} + \cdots + \xi_{n,\iota}' dx_n$$
$$(i = 2, 3, \ldots \varkappa - 2)$$

auflösen, wobei alle ξ_{ik}' an der Stelle (6) regulär sind. Auch in diesem Falle hat also $V^{(1)}$ die Form (15).

165. *In allen Fällen dürfen wir daher, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, da/s das vollständige System $V^{(1)}$, das bei der Reduktion des vor. § auftritt, nach den Ableitungen*

$$\frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-1}},\ \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa},\ \ldots\ \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

auflösbar ist, und da/s die Koeffizienten dieser aufgelösten Form, als

Funktionen der Variabeln x_1', x_2 .. x_n betrachtet, an der Stelle $\bar{x}_1'$, $x_2^0 \,..\, x_n^0$ regulär sind, wenn $\bar{x}_1' = f_1(x_1^0 \,..\, x_n^0)$ gesetzt wird.

Darnach besitzt $V^{(1)}$ unbegrenzt viele Integrale, die an der Stelle (6) regulär sind; ist $f_2^{(1)}(x_1', x_2 \,..\, x_n)$ ein solches Integral, so dürfen wir annehmen, daſs $\frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial x_2}$ an der Stelle (6) nicht null ist; benutzen wir dann bei der nächsten, nach dem vor. § auszuführenden Reduktion die Formel

$$x_2' = f_2^{(1)}(x_1', x_2 \,..\, x_n)$$

so zeigt eine Überlegung, die der in den letzten beiden Artikeln durchgeführten genau analog ist: Man darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daſs das $n - \varkappa + 3$-gliedrige vollständige System mit den Independenten $x_3 \,..\, x_n$, welches wir im vorigen § mit $V^{(2)}$ bezeichnet haben, nach den Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-2}} \; \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-1}} \,..\, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

aufgelöst werden kann, und daſs die Koeffizienten dieser aufgelösten Form, als Funktionen der n Variabeln $x_1' x_2' x_3 \,..\, x_n$ betrachtet, an der Stelle

$$\bar{x}_1' \bar{x}_2' x_3^0 \,..\, x_n^0$$

sämtlich regulär sind.

Allgemein dürfen wir über die Formelnserie:

$$(16) \quad x_1' = f_1(x_1 .. x_n);\; x_2' = f_2^{(1)}(x_1' x_2 .. x_n) .. x_i' = f_i^{(i-1)}(x_1' .. x_{i-1}' x_i .. x_n),$$

die bei der Methode des vor. § benutzt wurde, folgende Annahmen machen:

1) Wenn gesetzt wird:

$$\bar{x}_1' = f_1(x_1^0 \,..\, x_n^0);\; \bar{x}_2' = f_2^{(1)}(\bar{x}_1' x_2^0 \,..\, x_n^0),\; \bar{x}_3' = f_3^{(2)}(\bar{x}_1' \bar{x}_2' x_3^0 \,..) \text{ etc.},$$

so ist die Funktion

$$f_i^{(i-1)}(x_1' \,..\, x_{i-1}' x_i \,..\, x_n)$$

an der Stelle

$$(17) \qquad \bar{x}_1' \bar{x}_2' \,..\, \bar{x}_{i-1}' x_i^0 \,..\, x_n^0$$

regulär, und die Ableitung $\frac{\partial f_i^{(i-1)}}{\partial x_i}$ ist daselbst von Null verschieden.

2) Das System $V^{(i-1)}$ mit den Independenten $x_i, x_{i+1} \,..\, x_n$ ist nach den Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-i+1}} \; \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-i+2}} \,..\, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

auflösbar, und die Koeffizienten dieser Auflösung sind, als Funktionen der n Gröfsen $x_1' \ldots x_{i-1}' x_i \ldots x_n$ betrachtet, an der Stelle (17) regulär; $f_i^{(i-1)}$ ist ein Integral dieses Systems.

Es sei noch hervorgehoben, dafs $V^{(i)}$ alle $n - \varkappa + i$ Gleichungen enthält, die sich aus dem System $V^{(i-1)}$ ergeben, wenn man darin vermöge der Formel

$$x_i' = f_i^{(i-1)}$$

statt x_i die neue Independente x_i' einführt; aufserdem enthält $V^{(i)}$ noch *eine* weitere Gleichung.

166. Ist nun zunächst $\varkappa = 2\lambda$, so erhalten wir durch das Verfahren des vor. § λ Gleichungen der Form (16); durch geeignete Substitutionen lassen sich diese Gleichungen, wie man nach Art. 38, 6) leicht erkennt, auf folgende Form bringen:

$$x_1' = f_1(x_1 \ldots x_n); \quad \ldots x_\lambda' = f_\lambda(x_1 \ldots x_n);$$

dabei sind die Funktionen $f_1 \ldots f_\lambda$ an der Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ alle regulär, und die Funktionaldeterminante

$$\begin{pmatrix} f_1 \, f_2 \ldots f_\lambda \\ x_1 \, x_2 \ldots x_\lambda \end{pmatrix}$$

ist an der Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ nicht null. Daher lassen sich die ersten λ unter den Gleichungen

$$a_i \equiv F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \cdots + F_\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

nach den Unbekannten $F_1 \ldots F_\lambda$ auflösen, und liefern für dieselben augenscheinlich Funktionen, die an der Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ regulär sind. Aus der Identität (7) des Art. 127 und aus den Annahmen, die wir über die Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ gemacht haben, folgt überdies, dafs die nach $x_1 \ldots x_{2\lambda}$ genommene Funktionaldeterminante der F, f an der genannten Stelle nicht Null ist.

Ist zweitens $\varkappa = 2\lambda - 1$, so erhalten wir $\lambda - 1$ Gleichungen (16), also durch passende Substitutionen ein Gleichungensystem der Form

$$x_1' = f_1(x_1 x_2 \ldots x_n) \ldots x_{\lambda-1}' = f_{\lambda-1}(x_1 \ldots x_n);$$

die Funktionen $f_1 \ldots f_{\lambda-1}$ sind an der Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ regulär und die Funktionaldeterminante

$$\begin{pmatrix} f_1 \ldots f_{\lambda-1} \\ x_1 \ldots x_{\lambda-1} \end{pmatrix}$$

verschwindet daselbst nicht. Der Pfaff'sche Ausdruck, der im vorigen §

mit $\varDelta_{\lambda-1}$ bezeichnet wurde, und der, wie wir wissen, einem exakten Differential

$$df_\lambda^{(\lambda-1)}(x_1' \,.\,.\, x_{\lambda-1}' x_\lambda \,.\,.\, x_n)$$

gleich ist, besitzt nunmehr Koeffizienten, die, als Funktionen von $x_1' \,.\,.\, x_{\lambda-1}' x_\lambda \,.\,.\, x_n$ betrachtet, an der Stelle

$$x_1' \,.\,.\, x_{\lambda-1}' x_\lambda^0 \,.\,.\, x_n^0$$

regulär sind. Also ist auch $f_\lambda^{(\lambda-1)}$ an dieser Stelle regulär (Art. 92), verwandelt sich also, wenn die x_i' daraus mittels (16) eliminirt werden, nach Art. 38, 6) in eine an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ reguläre Funktion $f_\lambda(x_1 \,.\,.\, x_n)$. Die $\lambda - 1$ ersten unter den Relationen

$$a_i - \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \equiv F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + F_{\lambda-1} \frac{\partial f_{\lambda-1}}{\partial x_i} \qquad (i = 1 \,.\,.\, n)$$

lassen sich jetzt nach den Unbekannten $F_1 \,.\,.\, F_{\lambda-1}$ auflösen, und liefern für dieselben offenbar Funktionen, die an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ regulär sind. Aus unsern Annahmen über diese Stelle und aus den Identitäten (5) und (7) des Art. 130 ergiebt sich ferner, dafs die nach $x_1 \,.\,.\, x_{2\lambda-1}$ genommene Funktionaldeterminante der $\varkappa$ Funktionen F, f sowie die nach $x_1 \,.\,.\, x_{2\lambda-2}$ genommene Funktionaldeterminante der Funktionen $F_1 \,.\,.\, F_{\lambda-1}, f_1 \,.\,.\, f_{\lambda-1}$ an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ von null verschieden sind.

167. Damit haben wir den nachstehenden Doppelsatz gewonnen, der eine funktionentheoretisch schärfere Formulirung des Fundamentaltheorems darstellt:

„*Besitzt ein Pfaff'scher Ausdruck*

$$\varDelta \equiv \sum_1^n {}^i\, a_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)\, dx_i$$

die Klasse $\varkappa = 2\lambda$, *und ist insbesondere das Pfaff'sche Aggregat*

$$P \equiv (1, 2, \,.\,.\, 2\lambda)$$

nicht identisch null, ist ferner $x_1^0 x_2^0 \,.\,.\, x_n^0$ *eine Stelle, an der alle* a_i *regulär sind und* P *nicht verschwindet, dann und nur dann kann* $\varDelta$, *und zwar auf unendlich viele Arten, auf eine Normalform*

$$\varDelta \equiv \sum_1^\lambda {}^i\, F_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)\, df_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n)$$

gebracht werden, von der Eigenschaft, dafs an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ *alle Funktionen*

$$F_1, \,.\,.\, F_\lambda,\ f_1, \,.\,.\, f_\lambda$$

sich regulär verhalten, und die Funktionaldeterminante

$$\begin{pmatrix} F_1 \,.\,.\, F_\lambda f_1 \,.\,.\, f_\lambda \\ x_1 \,.\,.\, x_\lambda x_{\lambda+1} \,.\,.\, x_{2\lambda} \end{pmatrix}$$

daselbst von Null verschieden ist.“

„*Besitzt ein Pfaff'scher Ausdruck $\varDelta$ die Klasse $\varkappa = 2\lambda - 1$, und verschwinden insbesondere die beiden Pfaff'schen Aggregate*

$$P' \equiv (1, 2, \,.\,.\, 2\lambda - 2); \quad Q \equiv (0, 1 \,.\,.\, 2\lambda - 1)$$

nicht identisch, ist ferner $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ eine Stelle, an der alle a_ι regulär und P', Q nicht null sind, dann und nur dann kann $\varDelta$, und zwar auf unendlich viele Arten, auf eine Normalform

$$\varDelta \equiv df_\lambda(x_1 \,.\,.\, x_n) + \sum_1^{\lambda-1} F_i(x_1 \,.\,.\, x_n) df_i(x_1 \,.\,.\, x_n)$$

gebracht werden, von der Eigenschaft, dafs an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ alle Funktionen

$$f_1 f_2 \,.\,.\, f_\lambda, \; F_1 F_2 \,.\,.\, F_{\lambda-1}$$

regulär und die beiden Funktionaldeterminanten

$$\begin{pmatrix} F_1 F_2 \,.\,.\, F_{\lambda-1} f_1 \,.\,.\, f_{\lambda-1} \\ x_1\, x_2 \,.\,.\, \quad .\,. \quad .\,.\, x_{2\lambda-2} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} F_1 \,.\,.\, F_{\lambda-1} f_1 \,.\,.\, f_\lambda \\ x_1 \,.\,.\, \quad .\,. \quad .\,.\, x_{2\lambda-1} \end{pmatrix}$$

von Null verschieden sind.“

168. Sind im Falle $\varkappa = 2\lambda$ die Bedingungen des vorhergehenden Satzes erfüllt, so dürfen wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, dafs das Aggregat

$$\Pi_{2\lambda,0} \equiv -Q \equiv (1, 2, \,.\,.\, 2\lambda - 1, 0)$$

an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ nicht null ist. Dann können an dieser Stelle nicht alle Funktionen $F_1 \,.\,.\, F_\lambda$ verschwinden, da andernfalls daselbst alle a_i, und infolge dessen auch $\Pi_{2\lambda,0}$ null wären. Es sei etwa $F_i(x_1^0 \,.\,.\, x_n^0)$ von Null verschieden. Nach Art. 38, 5) sind dann die Funktionen

$$\frac{F_1}{F_\iota}, \,.\,.\, \frac{F_{i-1}}{F_\iota}, \; \frac{F_{i+1}}{F_\iota}, \,.\,.\, \frac{F_\lambda}{F_\iota}, \; f_1, \,.\,.\, f_\lambda \tag{18}$$

an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ sämtlich regulär. Nach der Schlufsbemerkung des Art. 128 ist nun $\Pi_{2\lambda,0}$ gleich der mit $\pm (F_\lambda)^\lambda$ multiplizirten, nach $x_1 \,.\,.\, x_{2\lambda-1}$ genommenen Funktionaldeterminante der $2\lambda - 1$ Funktionen

$$\frac{F_1}{F_\lambda} \,.\,.\, \frac{F_{\lambda-1}}{F_\lambda}, \; f_1 \,.\,.\, f_\lambda,$$

oder auch, wie man leicht erkennt, gleich der mit $\pm (F_\iota)^\lambda$ multiplizirten, nach denselben Variabeln genommenen Funktionaldeterminante der Funktionen (18). Diese letztere Determinante ist daher unter den gegenwärtigen Voraussetzungen nicht null.

Aus dem soeben Bewiesenen und aus dem zweiten Satze des vorigen Artikels folgt dann unmittelbar der Satz:

Besitzt ein Pfaff'scher Ausdruck

$$\varDelta = \sum_1^n {}^{\iota}\, a_\iota(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) dx_\iota$$

die Klasse 2λ *oder* $2\lambda - 1$, *ist ferner* $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ *eine Stelle, die den Bedingungen der vorigen Nr. genügt, so kann man die Gleichung* $\varDelta = 0$, *und zwar auf unendlich viele Arten, in der Form:*

$$d\zeta(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) - \sum_1^{\lambda-1} {}^{\iota}\, \pi_\iota(x_1 \,.\,.\, x_n) d\xi_\iota(x_1 \,.\,.\, x_n) = 0$$

schreiben, derart, daſs sich die Funktionen ζ, π_ι, ξ_i *an der Stelle* $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ *sämtlich regulär verhalten, und die Funktionaldeterminante*

$$\begin{pmatrix} \zeta, \pi_1 \,.\,.\, \pi_{\lambda-1}\, \xi_1 \,.\,.\, \xi_{\lambda-1} \\ x_1 \quad .\,. \quad .\,. \quad .\,.\, x_{2\lambda-1} \end{pmatrix}$$

daselbst von Null verschieden ist.

§ 4. Lie's Reduktionsverfahren.

169. Es seien an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ wiederum alle Koeffizienten a_i regulär, und im Falle $\varkappa = 2\lambda$ die Aggregate $P, \Pi_{2\lambda,0}$, im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ die Aggregate P', Q an dieser Stelle nicht null. Dann hat das vollständige System V, welches zu $\varDelta$ gehört, die Form:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\iota} = \sum_1^{\varkappa-1} {}^{s}\, \xi_{\iota s} \frac{\partial f}{\partial x_s} \qquad (i = \varkappa, \varkappa + 1, \,.\,.\, n) \tag{1}$$

und alle ξ_{ik} sind an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ regulär.

Will man, um eine Lösung f_1 des Systems (1) zu bestimmen, die Mayer'sche Theorie (Kap. II, § 5) zur Anwendung bringen, so hat man mittels der Formeln:

$$\left\{\begin{array}{ll} x_{\varkappa+1} & = x_{\varkappa+1}^0 + (x_\varkappa - x_\varkappa^0) y_{\varkappa+1} \\ \quad . & . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \\ x_n & = x_n^0 \quad + (x_\varkappa - x_\varkappa^0) y_n \end{array}\right. \tag{2}$$ [1])

1) Anstatt $x_\varkappa - x_\varkappa^0$ durch $y_\varkappa$ zu ersetzen, wollen wir der bequemeren Bezeichnungsweise halber $x_\varkappa$ beibehalten.

statt $x_{\lambda+1} \,.\,. \, x_n$ die neuen Variabeln $y_{\lambda+1} \,.\,. \, y_n$ einzuführen. Bezeichnet dann $[\varphi]$ diejenige Funktion der Variabeln $x_1 \,.\,. \, x_\varkappa, y_{\lambda+1} \,.\,. \, y_n$, die aus $\varphi(x_1 \,.\,. \, x_n)$ durch die Substitution (2) hervorgeht, so reduzirt sich nach Art. 85 die Integration des vollständigen Systems V auf diejenige der einzigen linearen partiellen Differentialgleichung

$$[\mathrm{V}] \qquad \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = \sum_1^{\lambda-1}{}_s ([\xi_{\lambda s}] + y_{\lambda+1}[\xi_{\lambda+1,s}] + \cdots + y_n[\xi_{ns}]) \frac{\partial f}{\partial x_s},$$

die wir kurz als die Gleichung [V] zitiren wollen.

Wir betrachten nun andererseits den Pfaff'schen Ausdruck $\bar{\varDelta}$, der aus $\varDelta$ dadurch hervorgeht, dafs wir darin $x_{\lambda+1} \,.\,. \, x_n$ durch ihre Werte (2) ersetzen, und die Gröfsen $y_{\lambda+1} \,.\,. \, y_n$ als Konstante behandeln. Es ist also identisch

$$\bar{\varDelta} \equiv \sum_1^{\varkappa}{}_i \, \bar{a}_i dx_i,$$

wobei gesetzt ist:

$$(3) \qquad \begin{cases} \bar{a}_1 \equiv [a_1]; \; \bar{a}_2 \equiv [a_2] \,.\,. \, \bar{a}_{\varkappa-1} \equiv [a_{\varkappa-1}] \\ \bar{a}_\varkappa \equiv [a_\varkappa] + y_{\lambda+1}[a_{\lambda+1}] + \cdots + y_n[a_n] \end{cases}.$$

Wir fragen zunächst, welche Klasse der Ausdruck $\bar{\varDelta}$ besitzt, wenn man darin nur $x_1 \,.\,. \, x_\varkappa$ als Variable behandelt. Den Fällen $\varkappa = 2\lambda$ bez. $2\lambda - 1$ entsprechend, denken wir uns $\varDelta$ auf die eine oder die andere Normalform

$$\sum_1^{\lambda}{}_i \, F_i df_i; \quad df_\lambda + \sum_1^{\lambda-1}{}_i \, F_i df_i$$

gebracht, die wie in Art. 167 definirt sei. Dann gestattet $\bar{\varDelta}$ die eine oder die andere Darstellung

$$(4) \qquad \sum_1^{\lambda}{}_i \, [F_i] d[f_i]; \quad d[f_\lambda] + \sum_1^{\lambda-1}{}_i \, [F_i] d[f_i],$$

wobei das Differentiationssymbol d sich ausschliefslich auf die Variabeln $x_1 \,.\,. \, x_\varkappa$ bezieht. Ist nun φ eine beliebige Funktion von $x_1 \,.\,. \, x_n$, so hat man:

$$\frac{\partial [\varphi]}{\partial x_i} \equiv \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right] \qquad (i = 1, 2, \,.\,. \, \varkappa - 1)$$

$$\frac{\partial [\varphi]}{\partial x_\varkappa} \equiv \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_\varkappa} + y_{\lambda+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\varkappa+1}} + \cdots + y_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right].$$

Betrachten wir daher, um die Ideen zu fixiren, den Fall $\varkappa = 2\lambda$, so nimmt die Funktionaldeterminante

$$(5) \qquad \begin{pmatrix} [F_1] & .. & [F_\lambda] & [f_1] & .. & [f_\lambda] \\ x_1 & .. & x_\lambda & x_{\lambda+1} & .. & x_{2\lambda} \end{pmatrix},$$

wenn man darin die Substitution:

$$(6) \qquad x_1 = x_1^0 \,..\, x_\varkappa = x_\varkappa^0;\ y_{\varkappa+1} = 0 \,..\, y_n = 0$$

ausführt, einen Wert an, den man andererseits auch erhält, wenn man in der Funktionaldeterminante

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} F_1 & .. & F_\lambda & f_1 & .. & f_\lambda \\ x_1 & .. & x_\lambda & x_{\lambda+1} & .. & x_{2\lambda} \end{pmatrix}$$

zuerst die Substitution (2) und hinterher die Substitution

$$x_1 = x_1^0 \,..\, x_\varkappa = x_\varkappa^0$$

ausführt, oder, was offenbar dasselbe ist, wenn man in (7) die Gröfsen $x_1 \,..\, x_n$ bezw. durch $x_1^0 \,..\, x_n^0$ ersetzt. Nach den Annahmen, die in Art. 167 über die Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ gemacht wurden, ist sonach der Wert, den die Determinante (5) vermöge der Substitution (6) annimmt, von Null verschieden, und da analoges auch im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ gilt, so folgt, dafs der eine oder der andere der beiden Ausdrücke (4) eine *Normalform* von $\overline{\varDelta}$ darstellt, *dafs also der Pfaff'sche Ausdruck* $\overline{\varDelta}$ *mit den* $\varkappa$ *Variabeln* $x_1 x_2 \,..\, x_\varkappa$ *bedingungslos ist.*

Das vollständige System $\overline{V}$ mit den Independenten $x_1 \,..\, x_\varkappa$, welches zu $\overline{\varDelta}$ in derselben Beziehung steht wie V zu $\varDelta$, reduzirt sich sonach auf eine einzige lineare partielle Differentialgleichung; es ist dies, behaupten wir, keine andere als die Gleichung, die vorhin mit $[V]$ bezeichnet wurde. In der That besitzen ja alle beiden Gleichungen $[V]$ und $\overline{V}$, ihrer Definition nach, die $\varkappa - 1$ unabhängigen Integrale

$$\frac{[F_1]}{[F_\lambda]} \,..\, \frac{[F_{\lambda-1}]}{[F_\lambda]},\ [f_1] \,..\, [f_\lambda]$$

im Falle $\varkappa = 2\lambda$, bezw. die $\varkappa - 1$ Integrale

$$[F_1] \,..\, [F_{\lambda-1}],\ [f_1] \,..\, [f_{\lambda-1}]$$

im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ und sind daher notwendig identisch.

170. Nach der Mayer'schen Theorie (Art. 87) läfst sich aus einem bekannten, nicht nur von $y_{\varkappa+1} \,..\, y_n$ abhängenden Integral $\varphi(x_1 \,..\, x_\varkappa\, y_{\varkappa+1} \,..\, y_n)$ der linearen partiellen Differentialgleichung $[V]$ durch blofse Differentiationen und Eliminationen mindestens eine Lösung des Systems V ableiten. Wir nehmen an, dafs auf diesem Wege eine Lösung $f_1(x_1 \,..\, x_n)$

von V gefunden sei, die überdies den in Art. 163 bezw. 164 formulirten Bedingungen genügen möge.

In derselben Weise wie auf V läfst sich die Mayer'sche Theorie nun auch auf die successiven vollständigen Systeme $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ etc. des § 2 anwenden. Da das vollständige System $V^{(i)}$ nach den Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-i}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-i+1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

auflösbar, und die Koeffizienten dieser aufgelösten Form als Funktionen von $x_1' \ldots x_i'\, x_{i+1} \ldots x_n$ betrachtet, an der Stelle $\bar{x}_1' \ldots \bar{x}_i'\, x_{i+1}^0 \ldots x_n^0$ regulär sind, so können wir auf $V^{(i)}$ etwa die folgende Mayer'sche Transformation ausüben:

$$(8)\quad \begin{cases} \text{a)}\ x_{\varkappa-i+h} = x^0_{\varkappa-i+h} + (x_\varkappa - x^0_\varkappa)\, y_{\varkappa-i+h} & (h = 0, 1, 2 \ldots i-1) \\ \text{b)}\ x_{\varkappa+s} \quad = x^0_{\varkappa+s} \quad + (x_\varkappa - x^0_\varkappa)\, y_{\varkappa+s} & (s = 1, 2 \ldots n-\varkappa) \end{cases}$$

und die Aufsuchung einer Lösung $f_{i+1}^{(i)}$ des Systems $V^{(i)}$ ist so nach Art. 87 auf die Bestimmung einer Lösung einer gewissen linearen partiellen Differentialgleichung $[V^{(i)}]$ mit den $\varkappa - 2i$ unabhängigen Veränderlichen $x_{i+1} x_{i+1}, \ldots x_{\varkappa-i-1}, x_\varkappa$ zurückgeführt.

Macht man andererseits in dem Pfaff'schen Ausdruck, der im § 2 dieses Kapitels mit Δ_i bezeichnet wurde, die Substitution (8) und betrachtet die y als Konstante, so erhält man einen Pfaff'schen Ausdruck $\bar{\Delta}_i$, der als Ausdruck in den Variabeln $x_{i+1} \ldots x_{\varkappa-i-1}, x_\varkappa$ die Klasse $\varkappa - 2i$ besitzt, also bedingungslos ist; das zu Δ_i gehörige vollständige System V_i reduzirt sich daher auf eine einzige Gleichung, die mit $[V^{(i)}]$ identisch ist.

Die Herstellung der Normalform von Δ verlangt also die Ermittelung je einer Lösung der partiellen Differentialgleichungen

$$[V],\ [V^{(1)}],\ [V^{(2)}] \ldots,$$

mithin die in Art. 159 angegebenen Integrationsoperationen, und aufserdem nur noch gewisse Differentiationen und Eliminationen.

171. Die Koeffizienten $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_\varkappa$ des Pfaff'schen Ausdrucks

$$\bar{\Delta} \equiv \sum_1^\varkappa {}_s\, \bar{a}_s\, dx_s$$

sind ihrer Entstehung nach Funktionen der n Variabeln

$$x_1 x_2 \ldots x_\varkappa\, y_{\varkappa+1} \ldots y_n,$$

die an der Stelle

(9) $$x_1^0 x_2^0 \,.\,. x_\varkappa^0,\ 0 \,.\,. 0$$

regulär sind. Setzen wir

$$\bar{a}_{ik} \equiv \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1, 2 \,.\,. \varkappa)$$

und verstehen wir unter $\overline{P}$, $\overline{\Pi}_{2\lambda,0}$, $\overline{P}'$, $\overline{Q}$ diejenigen Pfaff'schen Aggregate, die aus den Elementen $\bar{a}_i$, $\bar{a}_{ik}$ genau ebenso gebildet sind, wie die entsprechenden Aggregrate P etc. aus a_i, a_{ik}, so sind, wie man nach Art. 169 leicht erkennt, im Falle $\varkappa = 2\lambda$ die Aggregate $\overline{P}$, $\overline{\Pi}_{2\lambda,0}$, im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ die Aggregate $\overline{P}'$, $\overline{Q}$ an der Stelle (9) von Null verschieden. Besitzt daher $\overline{\varDelta}$, diesen beiden Fällen entsprechend, die eine oder die andere der beiden Normalformen:

(10) $$\sum_1^\lambda{}^i \varPhi_i(x_1 \,.\,. x_\varkappa, y_{\varkappa+1} \,.\,. y_n)\, d\varphi_i(x_1 \,.\,. x_\varkappa, y_{\varkappa+1} \,.\,. y_n)$$

(11) $$d\varphi_\lambda(x_1 \,.\,. y_n) + \sum_1^{\lambda-1}{}^i \varPhi_i(x_1 \,.\,. y_n)\, d\varphi_i(x_1 \,.\,. x_\varkappa, y_{\varkappa+1} \,.\,. y_n),$$

so dürfen wir nach Art. 167 voraussetzen, dafs alle Funktionen $\varPhi$, φ an der Stelle (9) regulär sind. Es besteht nun die bemerkenswerte Thatsache:

„*Aus einer beliebigen Normalform von $\overline{\varDelta}$ kann man bei geradem $\varkappa$ durch blofse Differentiationen und Eliminationen, bei ungeradem $\varkappa$ durch Differentiationen, Eliminationen und e i n e Quadratur eine Normalform des ursprünglichen Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$ herstellen.*“

Es seien $h_1, h_2 \,.\,. h_{\varkappa-1}$ die Hauptintegrale des vollständigen Systems V hinsichtlich $x_\varkappa = x_\varkappa^0 \,.\,. x_n = x_n^0$ (Art. 62); dann sind die Funktionen $[h_1] \,.\,. [h_{\varkappa-1}]$ die Hauptintegrale hinsichtlich $x_\varkappa = x_\varkappa^0$ von der linearen partiellen Differentialgleichung $[V]$ (vgl. Art. 85).

Wir betrachten zunächst den Fall $\varkappa = 2\lambda$. Führt man statt $x_1 \,.\,. x_{\varkappa-1}$ die neuen unabhängigen Variabeln $h_1 \,.\,. h_{\varkappa-1}$ in $\varDelta$ ein, so erhält man nach Art. 135 eine Identität der Form

$$\varDelta \equiv \sigma \sum_1^{\varkappa-1}{}^s b_s(h_1 h_2 \,.\,. h_{\varkappa-1})\, dh_s.$$

Setzt man darin $x_\varkappa = x_\varkappa^0 \,.\,. x_n = x_n^0$, und vergleicht die beiderseitigen Koeffizienten von $dx_1 \,.\,. dx_{\varkappa-1}$, so folgt

$$a_s(x_1 \,.\,. x_{\varkappa-1},\ x_\varkappa^0 \,.\,. x_n^0) \equiv \sigma b_s(x_1 \,.\,. x_{\varkappa-1})$$

und mithin

$$b_s(h_1 h_2 \,.\,. h_{\varkappa-1}) \equiv \varrho\, a_s(h_1 \,.\,. h_{\varkappa-1},\ x_\varkappa^0 \,.\,. x_n^0).$$

Also kann Δ in der Form

(12) $$\Delta \equiv \varrho \sum_1^{\varkappa-1}{}^s a_s(h_1 \,..\, h_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0 \,..\, x_n^0)\, dh_s$$

dargestellt werden, wobei ϱ eine gewisse Funktion von $x_1 \,..\, x_n$ bedeutet.

Macht man ferner in dem Ausdruck $\overline{\Delta}$ die Substitution $x_\varkappa = x_\varkappa^0$, so erhält er einerseits mit Rücksicht auf (3) die Gestalt

(13) $$\sum_1^{\varkappa-1}{}^s a_s(x_1 \,..\, x_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0 \,..\, x_n^0)\, dx_s$$

und andererseits die aus (10) hervorgehende Form

(14) $$\sum_1^{\lambda}{}^i \Phi_i(x_1 \,..\, x_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0, y_{\varkappa+1} \,..\, y_n)\, d\varphi_i(x_1 \,..\, x_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0, y_{\varkappa+1} \,..).$$

Die Identität der beiden Ausdrücke (13) und (14) lehrt, einmal, daſs der Ausdruck (14) die Gröſsen $y_{\varkappa+1} \,..\, y_n$ nur scheinbar enthält, daſs also sämtliche $\varkappa - 1$ Funktionen

$$\sum_1^{\lambda}{}^i \Phi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \qquad (s = 1 \,..\, \varkappa - 1)$$

von den Parametern $y_{\varkappa+1} \,..\, y_n$ vollkommen unabhängig werden, wenn man $x_\varkappa = x_\varkappa^0$ setzt, und ferner, daſs der Ausdruck Δ wegen (12) die folgende Darstellung zuläſst:

$$\Delta \equiv \varrho \sum_1^{\lambda}{}^i \Phi_i(h_1 \,..\, h_{\varkappa-1}\, x_\varkappa^0\, y_{\varkappa+1} \,..\, y_n)\, d\varphi_i(h_1 \,..\, h_{\varkappa-1}\, x_\varkappa^0\, y_{\varkappa+1} \,..\, y_n).$$

Da die rechte Seite dieser Identität von $y_{\varkappa+1} \,..\, y_n$ nicht abhängt, können wir diesen Gröſsen irgendwelche bestimmte numerische Werte $y_{\varkappa+1}^0 \,..\, y_n^0$ erteilen.

Nun stellen die $\varkappa - 1$ Funktionen

(15) $$\frac{\Phi_i(x_1 \,..\, x_\varkappa\, y_{\varkappa+1} \,..\, y_n)}{\Phi_\lambda(x_1 \,..\, x_\varkappa\, y_{\varkappa+1} \,..\, y_n)}, \quad \varphi_k(x_1 \,..\, x_\varkappa, y_{\varkappa+1} \,..\, y_n)$$
$$(i = 1, 2 \,..\, \lambda - 1;\ k = 1, 2 \,..\, \lambda)$$

ein System von $\varkappa - 1$ hinsichtlich $x_1 x_2 \,..\, x_{\varkappa-1}$ unabhängigen Integralen der linearen partiellen Differentialgleichung $[\overline{V}]$ dar, da diese Gleichung zu dem Pfaff'schen Ausdruck $\overline{\Delta}$ in derselben Beziehung steht, wie das vollständige System V zu Δ. Versteht man daher in der Gleichung

(16) $$\psi(x_1 \,..\, x_{\varkappa-1}, x_\varkappa, y_{\varkappa+1} \,..\, y_n) = \psi([h_1] \,..\, [h_{\varkappa-1}], x_\varkappa^0, y_{\varkappa+1} \,..\, y_n)$$

unter ψ der Reihe nach die $\varkappa - 1$ Funktionen (15), und löst die so erhaltenen $\varkappa - 1$ Relationen nach den Unbekannten $[h_\iota]$ auf, so erhält man diese letzteren als Funktionen der Variabeln $x_1 \,..\, x_\varkappa,\ y_{\varkappa+1} \,..\, y_n$ ausgedrückt, und damit auch die Hauptintegrale h_i, indem man die Parameter $y_{\varkappa+1} \,..\, y_n$ aus den $[h_\iota]$ mittels der Formeln (2) eliminirt (Art. 47, 85). Setzt man nunmehr:

$$\Phi_\iota(h_1 h_2 \,..\, h_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0, y_{\varkappa+1}^0 \,..\, y_n^0) \equiv \Psi_\iota(x_1 x_2 \,..\, x_n)$$
$$\varphi_i(h_1 h_2 \,..\, h_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0, y_{\varkappa+1}^0 \,..\, y_n^0) \equiv f_\iota(x_1 x_2 \,..\, x_n) \qquad (i = 1 \,..\, \lambda),$$

bestimmt man ferner die Funktion $\varrho(x_1 x_2 \,..\, x_n)$ aus irgend einer der Identitäten:

$$a_s \equiv \varrho \cdot \sum_1^\lambda {}^i\, \Psi_\iota \frac{\partial f_\iota}{\partial x_s} \qquad (s = 1 \,..\, n)$$

und schreibt schliefslich F_ι statt $\varrho \Psi_\iota$, so erhält man für $\varDelta$ in der That die Normalform

$$\sum_1^\lambda {}^i\, F_\iota \, df_\iota,$$

womit im Falle $\varkappa = 2\lambda$ unsere obige Behauptung erwiesen ist.

Man verifizirt leicht, dafs das vorstehende Theorem im Falle $\varkappa = 2$ die Methode des Art. 91 liefert.

Es sei jetzt $\varkappa = 2\lambda - 1$ und (11) eine beliebige Normalform von $\overline{\varDelta}$, derart, dafs die Φ_ι, φ_ι an der Stelle (9) alle regulär sind. Dann werden die $[h_\iota]$ und damit auch die Funktionen $h_1 \,..\, h_{\varkappa-1}$ dadurch ermittelt, dafs man in der Relation (16) unter ψ der Reihe nach die Funktionen

(17) $\Phi_i(x_1 \,..\, x_\varkappa, y_{\varkappa+1} \,..\, y_n)$; $\varphi_i(x_1 \,..\, x_\varkappa, y_{\varkappa+1} \,..\, y_n)$ $\quad (i = 1 \,..\, \lambda - 1)$

versteht, und die so erhaltenen $\varkappa - 1$ Relationen nach den $[h_\iota]$ auflöst; in der That bilden ja die Funktionen (17) ein System von $\varkappa - 1$ hinsichtlich $x_1 \,..\, x_{\varkappa-1}$ unabhängigen Lösungen der partiellen Differentialgleichung $[V]$.

Führt man nun die so gefundenen Funktionen $h_1 \,..\, h_{\varkappa-1}$ statt $x_1 \,..\, x_{\varkappa-1}$ als neue Variable in $\varDelta$ ein, so erhält man nach Art. 137 eine Identität der Form

$$\varDelta \equiv d\Psi(x_1 x_2 \,..\, x_n) + \sum_1^{\varkappa-1} {}^i\, b_i(h_1 h_2 \,..\, h_{\varkappa-1})\, dh_i.$$

Macht man hierin die Substitution $x_\varkappa = x_\varkappa^0 \,..\, x_n = x_n^0$ und vergleicht links und rechts die Koeffizienten von $dx_1 \,..\, dx_{\varkappa-1}$, so folgt:

$$a_\iota(x_1 \,..\, x_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0 \,..\, x_n^0) \equiv \frac{\partial \Psi(x_1 \,..\, x_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0 \,..\, x_n^0)}{\partial x_i} + b_\iota(r_1 x_2 \,..\, x_{\varkappa-1}),$$

hieraus ergiebt sich:

$$b_\iota(h_1 \,..\, h_{\varkappa-1}) \equiv a_\iota(h_1 \,..\, h_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0 \,..\, x_n^0) - \frac{\partial \Psi(h_1 \,..\, h_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0 \,..\, x_n^0)}{\partial h_\iota}.$$

Schreibt man demnach

$$\Omega(x_1 x_2 \,..\, x_n) \equiv \Psi(x_1 x_2 \,..\, x_n) - \Psi(h_1 \,..\, h_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0 \,..\, x_n^0),$$

so folgt für $\varDelta$ die Darstellung:

$$\varDelta \equiv d\Omega + \sum_1^{\varkappa-1} {}^\iota\, a_\iota(h_1 \,..\, h_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0 \,..\, x_n^0)\, dh_\iota.$$

Macht man nun in dem Pfaff'schen Ausdruck $\overline{\varDelta}$ die Substitution $x_\varkappa = x_\varkappa^0$, so verwandelt er sich einerseits in den Ausdruck (13), andererseits in den folgenden:

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} & d\varphi_\lambda(x_1 \,..\, x_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0, y_{\varkappa+1} \,..\, y_n) + \\ & + \sum_1^{\lambda-1} {}^\iota\, \Phi_\iota(x_1 \,..\, x_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0, y_{\varkappa+1} \,..\, y_n)\, d\varphi_\iota(x_1 \,..\, y_n). \end{aligned} \right.$$

Aus der Identität der beiden Ausdrücke (13) und (18) folgt erstens, daſs der Ausdruck (18) die Parameter $y_{\varkappa+1} \,..\, y_n$ nicht mehr enthält, und zweitens, daſs $\varDelta$ auf die nachstehende Form gebracht werden kann:

$$\varDelta \equiv df_\lambda + \sum_1^{\lambda-1} {}^i\, F_i\, df_i.$$

Dabei wird gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} F_i(x_1 x_2 \,..\, x_n) &\equiv \Phi_\iota(h_1 \,..\, h_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0, y_{\varkappa+1}^0 \,..\, y_n^0) \\ f_\iota(x_1 x_2 \,..\, x_n) &\equiv \varphi_i(h_1 \,..\, h_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0, y_{\varkappa+1}^0 \,..\, y_n^0), \end{aligned} \right\} \qquad i = 1 \,..\, \lambda - 1,$$

wobei die $y_{\varkappa+s}^0$ irgend welche numerischen Werte bedeuten. Ferner hat man

$$f_\lambda(x_1 \,..\, x_n) \equiv \Omega + \varphi_\lambda(h_1 \,..\, h_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0, y_{\varkappa+1}^0 \,..\, y_n^0),$$

und es läſst sich f_λ entweder dadurch bestimmen, daſs man Ω aus der Identität

$$d\Omega \equiv \sum_1^n {}^s\, a_s\, dx_s - \sum_1^{\varkappa-1} {}^i\, a_i(h_1 \,..\, h_{\varkappa-1}, x_\varkappa^0 \,..\, x_n^0)\, dh_\iota$$

durch eine Quadratur ermittelt, oder aber direkt durch Quadratur aus der Identität

$$df_\lambda \equiv \sum_1^n {}^s\, a_s\, dx_s - \sum_1^{\lambda-1} {}^i\, F_i\, df_i,$$

wenn die Funktionen F_i, f_i bereits bestimmt sind.

Damit ist unser Theorem auch für den Fall $\varkappa = 2\lambda - 1$ als richtig erkannt.

172. *Durch das vorstehende Theorem ist die Herstellung einer Normalform für den Ausdruck Δ mit der Klasse $\varkappa$ auf die Ermittelung einer Normalform für einen bedingungslosen Ausdruck $\overline{\Delta}$ in $\varkappa$ Variabeln zurückgeführt.*

Um diese letztere Aufgabe zu lösen, bestimmen wir irgend ein an der Stelle (9) reguläres Integral $\varphi_1(x_1 \ldots x_\nu y_{\nu+1} \ldots y_n)$ der zu $\overline{\Delta}$ gehörigen linearen partiellen Differentialgleichung $[V]$, derart dafs $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$ an der Stelle (9) nicht verschwindet. Führt man dann mittels der Formel

$$x_1' = \varphi_1(x_1 \ldots x_\nu y_{\nu+1} \ldots y_n)$$

die Variable x_1' statt x_1 in $\overline{\Delta}$ ein, so erhält dieser Ausdruck nach Art. 151 die Form:

$$\overline{\Delta} = \Psi(x_1' x_2 \ldots x_\nu y_{\nu+1} \ldots y_n)\, dx_1' + \nabla_1,$$

worin gesetzt ist:

$$\nabla_1 = \sum_2^{\varkappa} \bar{a}_i'(x_1' x_2 \ldots x_\varkappa y_{\nu+1} \ldots y_n)\, dx_i$$

und ∇_1, als Ausdruck in den Variabeln $x_2 \ldots x_\varkappa$ betrachtet, die Klasse $\varkappa - 2$ besitzt. Durch unsere Transformation ist sonach das Problem der Herstellung einer Normalform für $\overline{\Delta}$ auf das analoge Problem für ∇_1 zurückgeführt. Auf ∇_1 läfst sich nun aber das Theorem des vorigen Art. von neuem anwenden. Nach Nr. 163 dürfen wir nämlich voraussetzen, dafs das zweigliedrige vollständige System mit den Independenten $x_2 \ldots x_\varkappa$, das zu ∇_1 in demselben Sinne gehört wie V zu Δ, hinsichtlich der Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}$ auflösbar sei, und dafs die Koeffizienten dieser aufgelösten Form an der Stelle

$$x_1' = \bar{x}_1',\ x_2 = x_2^0 \ldots x_\varkappa = x_\varkappa^0,\ y_{\nu+1} = 0 \ldots y_n = 0$$

regulär sind, wenn mit $\bar{x}_1'$ die Konstante

$$\varphi_1(x_1^0 \ldots x_\varkappa^0, 0 \ldots 0)$$

bezeichnet wird. Nach Art. 169 verwandelt sich daher ∇_1 vermöge der Substitution:

$$x_\varkappa = x_\varkappa^0 + (x_{\varkappa-1} - x_{\varkappa-1}^0)\, y_\varkappa, \tag{19}$$

wenn $y_\varkappa$ als Konstante betrachtet wird, in einem bedingungslosen Ausdruck $\overline{\nabla}_1$ mit $\varkappa - 2$ Variabeln $x_2 \ldots x_{\varkappa-1}$, und aus einer beliebigen Normalform von $\overline{\nabla}_1$ erhält man bei geradem $\varkappa$ durch blofse Differentiationen und Eliminationen, bei ungeradem $\varkappa$ durch Differentiationen, Eliminationen und eine Quadratur eine Normalform des Pfaff'schen Ausdrucks ∇_1, und damit eine solche von $\overline{\varDelta}$.

Bezeichnen wir jetzt mit $\overline{V}_1$ die partielle Differentialgleichung, die zu $\overline{\nabla}_1$ in demselben Sinne gehört wie das System V zu $\varDelta$, so besitzt $\overline{V}_1$ die Independenten $x_2 \ldots x_{\varkappa-1}$ und ist nach $\frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-1}}$ auflösbar; die Koeffizienten dieser aufgelösten Form sind Funktionen der n Variabeln $x_1' x_2 \ldots x_{\varkappa-1} y_\varkappa y_{\varkappa+1} \ldots y_n$ und an der Stelle $x_1' x_2^0 \ldots x_{\varkappa-1}^0, 0 \ldots 0$ ausnahmslos regulär. Daher kann man auf $\overline{\nabla}_1$ dieselbe Reduktionsmethode anwenden wie vorher auf $\overline{\varDelta}$ etc. und gelangt so, wenn $\varkappa$ gleich 2λ oder gleich $2\lambda - 1$ ist, zu einer Serie Pfaff'scher Ausdrücke

$$\overline{\varDelta},\ \overline{\nabla}_1,\ \overline{\nabla}_2 \ldots \overline{\nabla}_{\lambda-1}$$

mit bezw. $\varkappa, \varkappa - 2, \varkappa - 4, \ldots$ Variabeln. Alle diese Ausdrücke sind bedingungslos, und aus der Normalform des Ausdrucks $\overline{\nabla}_{\lambda-1}$ kann man die Normalformen aller vorhergehenden ermitteln; dazu sind nur Differentiationen und Eliminationen, und bei ungeradem $\varkappa$ auch noch gewisse Quadraturen erforderlich. Der Ausdruck $\overline{\nabla}_{\lambda-1}$ enthält im Falle $\varkappa = 2\lambda$ nur zwei Variabeln; die Herstellung seiner Normalform erfordert darnach eine Operation 1. Ist $\varkappa = 2\lambda - 1$, so enthält $\overline{\nabla}_{\lambda-1}$ nur eine einzige Variabele, und die Normalform dieses Ausdrucks wird durch eine Operation null ermittelt. Die Bestimmung der successiven Ausdrücke $\overline{\nabla}_1, \overline{\nabla}_2 \ldots$ geschieht nach dem obigen durch Aufsuchung je eines Integrals einer linearen partiellen Differentialgleichung

$$[V],\ \overline{V}_1,\ \overline{V}_2 \ldots, \tag{20}$$

bezw. mit $\varkappa, \varkappa - 2, \varkappa - 4 \ldots$ Variabeln, also im Falle eines geraden $\varkappa$ durch je eine Operation

$$\varkappa - 1,\ \varkappa - 3, \ldots 5, 3,$$

bei ungeradem $\varkappa$ durch je eine Operation

$$\varkappa - 1,\ \varkappa - 3, \ldots 4, 2.$$

Das vorstehende, von Lie herrührende Reduktionsverfahren erfordert sonach dieselben Integrationsoperationen wie die Methode des Art. 170, bei ungeradem $\varkappa$ aufserdem noch gewisse Quadraturen, die bei der Methode des Art. 170 nicht erforderlich sind. Ein wesentlicher Vorzug der Lie'schen Methode besteht dagegen darin, dafs bei dieser die Integrale der successiven Gleichungen (20) unmittelbar zur weiteren Reduktion benutzt werden, während nach dem Verfahren des Art. 170 für jeden Index $i = 1, 2 \ldots$ zunächst ein Integral der linearen partiellen Differentialgleichung $[V^{(i)}]$ bestimmt und aus diesem dann durch die Methode des Art. 87 eine Lösung des vollständigen Systems $V^{(0)}$ hergeleitet werden mufs. Bei der Lie'schen Methode wird ferner die Substitution (2) *ein für allemal* ausgeführt, und weiterhin sind nur noch Substitutionen vom Typus (19) erforderlich, während nach Art. 170 eine Reihe von Substitutionen der Form (8), darunter die Substitutionen (8a) *immer wieder von neuem* anzuwenden sind.

173. 1. Beispiel.[1])

$$(21) \qquad \Delta \equiv \sum_1^6 a_i\, dx_i$$

$$a_1 = x_1 + x_6 + x_3 x_6 + x_6^2;\; a_2 = x_5;\; a_3 = 1 + x_6;$$
$$a_4 = x_6 + x_6^2;\; a_5 = x_5 x_6;\; a_6 = x_1 + x_4 + x_5^2 + x_1 x_6 + x_4 x_6.$$

Bildet man die Ausdrücke a_{ik} und aus ihnen die Matrix (B), die zu dem Pfaff'schen Ausdruck Δ gehört, so findet man, dafs das Pfaff'sche Aggregat (1, 2, 3, 4, 5, 6) an der Stelle 0, . . 0 von null verschieden ist, dafs also Δ die Klasse 6 besitzt. Ferner zeigt sich, dafs der Rang von (B) um zwei Einheiten sinkt, wenn man die Zeile und die Spalte mit dem Index 1 wegläfst. Daraus folgt leicht, dafs x_1 eine Lösung der zu Δ gehörigen linearen partiellen Differentialgleichung V ist. Daher besitzt der Ausdruck

$$\Delta_1 \equiv a_2 dx_2 + \cdot\cdot + a_6 dx_6,$$

wenn man darin x_1 als willkürliche Konstante betrachtet, die Klasse 4 (Art. 151).

Da die beiden Aggregate (2 3 5 6) und (2 3 5 0) an der Stelle 0 . . 0 nicht null sind, verwandelt sich Δ_1 bei der Substitution:

$$x_6 = x_4 y_4$$

in einen bedingungslosen Ausdruck

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_1 \equiv\;& x_5 dx_2 + (1 + x_4 y_4) dx_3 + \\ &+ (2x_4 y_4 + 2x_4^2 y_4^2 + y_4 x_5^2 + x_1 x_4 y_4^2 + x_1 y_4) dx_4 + x_4 x_5 y_4\, dx_5\end{aligned}$$

mit den Variabeln $x_2\, x_3\, x_4\, x_5$. Das zugehörige vollständige System $\overline{V}_1$ reduzirt sich daher auf die *eine* Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = \left(x_5 y_4 + \frac{x_4 x_5 y_4^2}{1 + x_4 y_4}\right) \frac{\partial f}{\partial x_2} + (x_1 y_4 + 2 x_4 y_4) \frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{x_5 y_4}{1 + x_4 y_4} \frac{\partial f}{\partial x_5}.$$

Diese Gleichung besitzt das Integral $x_2 + x_4 y_4 x_5$; vermöge der Substitution

---

1) Es ist natürlich äufserst leicht, für die Anwendung der Methoden dieses Kapitels einfache Beispiele in beliebiger Anzahl zu konstruiren.

$$x_2' = x_2 + x_4 x_5 y_4$$

nimmt $\overline{\nabla}_1$ die Form an:

$$x_5 dx_2' + (1 + x_4 y_4) dx_3 + (2x_4 y_4 + 2x_4^2 y_4^2 + x_1 x_4 y_4^2 + x_1 y_4) dx_4;$$

die beiden letzten Terme bilden für sich einen Pfaff'schen Ausdruck in 3 Variabeln $x_3 x_4 x_5$ mit der Klasse 2; die Normalform dieses Ausdrucks ist:

$$(1 + x_4 y_4) d(x_3 + x_4^2 y_4 + x_1 x_4 y_4),$$

worin d sich nur auf die Variabeln x_3, x_4 bezieht. Daraus erhält man für $\overline{\nabla}_1$ die Normalform

$$x_5 d(x_2 + x_4 x_5 y_4) + (1 + x_4 y_4) d(x_3 + x_4^2 y_4 + x_1 x_4 y_4),$$

wobei d sich auf $x_2 x_3 x_4 x_5$ bezieht, und endlich eine Normalform für $\varDelta$:

$$(x_4 + x_3 x_6) dx_1 + x_5 d(x_2 + x_5 x_6) + (1 + x_6) d(x_3 + x_1 x_6 + x_4 x_6).$$

2. Beispiel.[1]) Wir betrachten einen Ausdruck der Form (21), worin:

$$a_1 = x_1 x_2 + x_2 x_6; \quad a_2 = x_1^2 + x_2 x_5; \quad a_3 = x_1 x_4; \quad a_4 = x_1 x_3;$$
$$a_5 = x_1 x_6 + x_2^2; \quad a_6 = x_1 x_5 + x_1 x_2.$$

Dieser Ausdruck besitzt die Klasse 4, und die Pfaff'schen Aggregate

$$(1, 2, 5, 6) \quad \text{und} \quad (1, 2, 5, 0)$$

sind nicht identisch null. Es sei $x_1^0 \,..\, x_6^0$ irgend eine Stelle, an der diese Aggregate nicht verschwinden. Dann verwandelt sich $\varDelta$ vermöge der Substitution

$$(22) \qquad x_3 = x_3^0 + y_3(x_6 - x_6^0); \quad x_4 = x_4^0 + y_4(x_6 - x_6^0)$$

in einen bedingungslosen Ausdruck mit 4 Veränderlichen $x_1 x_2 x_5 x_6$:

$$\overline{\varDelta} \equiv (x_1 x_2 + x_2 x_6) dx_1 + (x_1^2 + x_2 x_5) dx_2 + (x_1 x_6 + x_2^2) dx_5$$
$$+ [x_1 x_5 + x_1 x_2 + x_1 y_3 x_4^0 + 2 x_1 y_3 y_4 (x_6 - x_6^0) + x_1 y_4 x_3^0] dx_6.$$

Die zugehörige lineare partielle Differentialgleichung $[V]$ besitzt die Lösung $x_1 x_6 + x_2 x_5$. Daraus erhält man leicht für $\overline{\varDelta}$ die Normalform:

$$\Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2$$
$$\varphi_1 \equiv x_1 x_6 + x_2 x_5; \quad \Phi_1 \equiv x_2; \quad \Phi_2 \equiv x_1$$
$$\varphi_2 \equiv x_1 x_2 + x_5 x_6 + (y_3 x_4^0 + y_4 x_3^0) x_6 + y_3 y_4 (x_6^2 - 2 x_6^0 x_6).$$

Wir müssen nun zunächst für die zu $\overline{\varDelta}$ gehörige lineare partielle Differentialgleichung $[V]$ die Hauptintegrale $[h_1]$, $[h_2]$, $[h_5]$ bestimmen,

1) Forsyth II § 149.

die sich für $x_6 = x_6^0$ bez. auf x_1, x_2, x_5 reduziren. Die $[h_i]$ bestimmen sich aus den 3 Gleichungen

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{[h_2]}{[h_1]} \\ x_1x_6 + x_2x_5 = [h_1]x_6^0 + [h_2][h_5] \\ x_1x_2 + x_5x_6 + (y_3x_1^0 + y_4x_3^0)x_6 + y_3y_4(x_6^2 - 2x_6^0x_6) = [h_1][h_2] + \\ \qquad + x_6^0[h_5] + (y_3x_4^0 + y_4x_3^0)x_6^0 - y_3y_4(x_6^0)^2. \end{cases}$$

Aus den so bestimmten Funktionen $[h_i]$ ergeben sich die Hauptintegrale h_i hinsichtlich $x_6 = x_6^0$, $x_3 = x_3^0$, $x_4 = x_4^0$ von dem zu $\varDelta$ gehörigen vollständigen System V, indem man y_3 und y_4 durch ihre aus (22) folgenden Werte ersetzt. Statt dessen aber können wir die Ausdrücke für y_3 und y_4 auch direkt in die Relationen (23) einsetzen, und erhalten so

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{x_2}{x_1};\ h_1x_6^0 + h_2h_5 = x_1x_6 + x_2x_5;$$

$$h_1h_2 + h_5x_6^0 = x_1x_2 + x_5x_6 + x_3x_4 - x_3^0x_4^0.$$

Die auf den linken Seiten dieser Gleichungen stehenden Ausdrücke ergeben sich aber auch, wenn man in den Funktionen

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2},\ \varphi_1,\ \varphi_2$$

die Gröfsen $x_1x_2x_5$ bezw. durch $h_1h_2h_5$, ferner x_6 durch x_6^0 und y_3, y_4 durch Null ersetzt. Darnach besitzt $\varDelta$ eine Normalform von folgender Gestalt (vgl. S. 223):

$$\varrho\left[d(x_1x_2 + x_5x_6 + x_3x_4) + \frac{x_2}{x_1}\,d(x_1x_6 + x_2x_5)\right]$$

und die Vergleichung mit $\varDelta$ liefert schliefslich $\varrho \equiv x_1$, also

$$\varDelta \equiv x_1d(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6) + x_2d(x_1x_6 + x_2x_5).$$

Kapitel VII.

Die Integraläquivalente einer Pfaff'schen Gleichung.

§ 1. Flächenelemente und Elementvereine.[1])

174. Die Frage nach den Integraläquivalenten einer Pfaff'schen Gleichung wollen wir zunächst unter der Voraussetzung erledigen, dafs die gegebene Pfaff'sche Gleichung folgende Form besitzt:

1) Lie II Kap. 3 und 4.

(1) $\nabla = dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \cdots - p_m dx_m = 0,$

worin die Gröfsen

(2) $z, x_1, .. x_m, p_1 .. p_m$

irgend $2m + 1$ unabhängige Variable bedeuten. Es sei

(3) $\Phi_s(z, x_1 .. x_m, p_1 .. p_m) = 0 \quad (s = 1, 2, .. r;\ r < 2m + 1)$

ein Integraläquivalent der Gleichung (1), d. h. ein r-gliedriges Gleichungensystem (Art. 40, 82) von folgender Eigenschaft: Löst man die Relationen (3) nach r von den Variabeln (2) auf, und substituirt die erhaltenen Ausdrücke in ∇, so verschwindet das Resultat dieser Substitution identisch für alle Werte der $2m + 1 - r$ übrigen Variabeln (2) und ihrer Differentiale.

Aus den Relationen (3) mufs sich nun mindestens *eine* Relation ableiten lassen, die nur die Variabeln $z, x_1 .. x_m$, nicht aber $p_1 .. p_m$ enthält. Andernfalls könnte man die Gleichungen (3) nach r von den Variabeln p_i auflösen, und durch Substitution der erhaltenen Ausdrücke in ∇ würde sich kein identisch verschwindendes Resultat ergeben, da der Koeffizient von dz mit 1 identisch wäre.

Wir können daher annehmen, dafs sich aus (3) genau $\nu + 1$ unabhängige Gleichungen der Form

(4) $\psi_i(z, x_1, x_2, .. x_m) \qquad (i = 1, 2, .. \nu + 1)$

ableiten lassen, wobei ν eine Zahl der Reihe $0, 1, .. m$ bedeutet, und dafs jede andere, aus (3) folgende Relation in $z, x_1 .. x_m$ allein eine Folge des Systems (4) ist. Aus demselben Grunde wie soeben ergiebt sich, dafs die Gleichungen (4) nicht auf eine von z unabhängige Form gebracht werden können. Daher ist das System folgendermafsen auflösbar:

(5) $$\begin{cases} z = \varphi\left(x_{\alpha_{\nu+1}}, x_{\alpha_{\nu+2}}, .. x_{\alpha_m}\right) \\ x_{\alpha_i} = \varphi_i\left(x_{\alpha_{\nu+1}}, x_{\alpha_{\nu+2}}, .. x_{\alpha_m}\right) \quad (i = 1 .. \nu), \end{cases}$$

wobei die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 .. \alpha_m$ eine gewisse Permutation des Indices $1 .. m$ bedeuten; die Determinante

(6) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{\alpha_1}} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{\alpha_2}} & .. & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{\alpha_\nu}} & \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial \psi_{\nu+1}}{\partial x_{\alpha_1}} & \frac{\partial \psi_{\nu+1}}{\partial x_{\alpha_2}} & .. & \frac{\partial \psi_{\nu+1}}{\partial x_{\alpha_\nu}} & \frac{\partial \psi_{\nu+1}}{\partial z} \end{vmatrix}$$

verschwindet also nicht vermöge (4) identisch. Wenn wir nun mittels der Relationen

$$(7)\qquad \frac{\partial\psi_i}{\partial z}dz + \sum_1^m{}_s \frac{\partial\psi_i}{\partial x_s}dx_s = 0 \quad (i = 1, \dots r)$$

die Differentiale dz, $dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_r}$ als lineare homogene Ausdrücke in den Differentialen

$$(8)\qquad dx_{\alpha_{r+1}},\ dx_{\alpha_{r+2}} \dots dx_{\alpha_m}$$

darstellen und in ∇ substituiren, so müssen in dem so erhaltenen Substitutionsresultat die Koeffizienten der Differentiale (8) vermöge (3) null sein; es mufs also die Gleichung (1), als lineare homogene Gleichung in dz, $dx_1 \dots dx_m$ betrachtet, vermöge (3) eine Folge der Relationen (7) sein, d. h. es müssen insbesondere die Relationen

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} -1, & p_{\alpha_1} & p_{\alpha_2} & \dots & p_{\alpha_r} & p_s \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial z} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_{\alpha_1}} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_{\alpha_2}} & \dots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_{\alpha_r}} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\psi_{r+1}}{\partial z} & \frac{\partial\psi_{r+1}}{\partial x_{\alpha_1}} & \dots & \dots & \frac{\partial\psi_{r+1}}{\partial x_{\alpha_r}} & \frac{\partial\psi_{r+1}}{\partial x_s} \end{vmatrix} = 0 \qquad (s = \alpha_{r+1} \dots \alpha_m)$$

vermöge (3) stattfinden. Umgekehrt, sind die Gleichungen (9) eine Folge des Systems (3), und beachtet man, dafs die Determinante (6) vermöge (4) der Annahme nach nicht verschwindet, so verschwinden überhaupt alle $\nu + 2$-reihigen Determinanten der zu dem Gleichungensystem (1) (7) gehörigen Matrix vermöge (3) (Art. 7), also bilden die Gleichungen (3) wirklich ein Integraläquivalent der Gleichung $\nabla = 0$. Damit sind folgende Sätze bewiesen:

Jedes Integraläquivalent der Gleichung

$$(1)\qquad dz - p_1dx_1 - \dots - p_mdx_m = 0$$

enthält mindestens $m + 1$ Relationen zwischen den Variabeln

$$(2)\qquad z,\ x_1x_2 \dots x_m p_1 p_2 \dots p_m$$

und mindestens eine Relation zwischen $z, x_1 \dots x_m$ allein.

Das allgemeinste $m + 1$-gliedrige Integraläquivalent der Gleichung (1) wird folgendermafsen gefunden:

Man verstehe unter ν irgend eine Zahl der Reihe $0, 1, \dots m$, wähle $\nu + 1$ beliebige Relationen der Form

$$(4)\qquad \psi_i(z, x_1, x_2, \dots x_m) = 0 \qquad (i = 1, \dots \nu + 1)$$

die sich nach z und nach ν von den Variabeln x, etwa nach $x_{\alpha_1}x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_\nu}$ auflösen lassen, und füge die $m - \nu$ Relationen hinzu, die durch Elimination der Gröfsen ϱ_i aus den Gleichungen

$$(10)\quad \begin{cases} p_i = \varrho_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \varrho_2 \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \cdots + \varrho_{\nu+1} \dfrac{\partial \psi_{\nu+1}}{\partial x_i} \quad (i = 1 \,..\, m) \\ -1 = \varrho_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial z} + \varrho_2 \dfrac{\partial \psi_2}{\partial z} + \cdots + \varrho_{\nu+1} \dfrac{\partial \psi_{\nu+1}}{\partial z}, \end{cases}$$

oder, was dasselbe besagt, durch Elimination der Verhältnisse der ϱ_i *aus den Gleichungen*

$$-p_i = \frac{\varrho_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \cdots + \varrho_{\nu+1} \dfrac{\partial \psi_{\nu+1}}{\partial x_i}}{\varrho_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial z} + \cdots + \varrho_{\nu+1} \dfrac{\partial \psi_{\nu+1}}{\partial z}} \qquad (i = 1 \,..\, m)$$

hervorgehen.

Das so erhaltene $m+1$-gliedrige Gleichungensystem ist offenbar nach den Variabeln

$$(11)\qquad z, x_{\alpha_1} \,..\, x_{\alpha_\nu} p_{\alpha_{\nu+1}} p_{\alpha_{\nu+2}} \,..\, p_{\alpha_m}$$

auflösbar.

Das allgemeinste aus $m + \tau + 1$ ($\leqq 2m + 1$) Gleichungen bestehende Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung (1) ergiebt sich dann folgendermaſsen:

Man bestimme nach dem vorigen ein beliebiges $m+1$*-gliedriges Integraläquivalent, das nach den Variabeln* (11) *auflösbar sein möge, und wobei* $\nu \geqq \tau$ *gewählt werden muſs, und füge ein System von* τ *willkürlichen Relationen*

$$\chi_i(p_{\alpha_1} \,..\, p_{\alpha_\nu}, \; x_{\alpha_{\nu+1}} \,..\, x_{\alpha_m}) = 0 \qquad (i = 1, 2 \,..\, \tau)$$

hinzu, die keine neue Gleichung in den x *allein liefern, also nach* τ *von den Variabeln* $p_{\alpha_1} \,..\, p_{\alpha_\nu}$ *aufgelöst werden können.*

175. Indem wir uns das Gleichungensystem (4) von vorneherein in der Form (5) aufgelöst denken, lassen sich die vorstehenden Sätze auch so aussprechen:

Jedes $m+1$*-gliedrige Integraläquivalent der Gleichung* (1) *kann auf die folgende Form gebracht werden:*

$$(12)\quad \begin{aligned} &z = \varphi(x_{\alpha_{\nu+1}}, x_{\alpha_{\nu+2}} \,..\, x_{\alpha_m}); \; x_{\alpha_i} = \varphi_i(x_{\alpha_{\nu+1}} \,..\, x_{\alpha_m}) \; (i = 1, \,..\, \nu) \\ &-p_s = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} + p_{\alpha_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} + \cdots + p_{\alpha_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_s} \qquad (s = \alpha_{\nu+1} \,..\, \alpha_m). \end{aligned}$$

Darin bedeuten $\alpha_1 \,..\, \alpha_m$ *irgend eine Permutation der Indices* $1 \,..\, m$; ν *ist eine Zahl der Reihe* $0, 1 \,..\, m$; *die Funktionen* φ, φ_i *sind beliebig.*

Jedes $m + \tau + 1$*-gliedrige Integraläquivalent der Gleichung* (1) *kann nachstehende Form erhalten:*

$$z = \varphi(x_{\alpha_{\nu+1}} \dots x_{\alpha_m}); \; x_{\alpha_i} = \varphi_i(x_{\alpha_{\nu+1}} \dots x_{\alpha_m}) \quad (i = 1 \dots \nu)$$

$$-p_s = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} + p_{\alpha_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} + \dots + p_{\alpha_\nu}\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_s} \quad (s = \alpha_{\nu+1} \dots \alpha_m)$$

$$p_{\beta_h} = \omega_h(p_{\beta_{\tau+1}}, p_{\beta_{\tau+2}} \dots p_{\beta_\nu}, x_{\alpha_\nu+1} \dots x_{\alpha_m}) \quad (h = 1 \dots \tau).$$

Darin bedeuten $\alpha_1 \dots \alpha_m$ eine Permutation der Zahlen $1 \dots m$, ν eine Zahl der Reihe $0, 1 \dots m$, welche $\geqq \tau$ gewählt werden mufs, endlich $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\nu$ irgend eine Permutation der Indices $\alpha_1 \dots \alpha_\nu$; die Funktionen φ, φ_i, ω_h sind arbiträr.

Um die Gleichungen (12) in einer einfacheren Form zu schreiben, setzen wir:

$$W(p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_\nu}, x_{\alpha_{\nu+1}} \dots x_{\alpha_m}) = \varphi - p_{\alpha_1}\varphi_1 - p_{\alpha_2}\varphi_2 - \dots - p_{\alpha_\nu}\varphi_\nu.$$

Dann schreibt sich das allgemeinste $m+1$-gliedrige Integraläquivalent von (1) folgendermafsen:

$$(13) \quad \begin{cases} z - x_{\alpha_1}p_{\alpha_1} - \dots - x_{\alpha_\nu}p_{\alpha_\nu} = W \\ x_{\alpha_1} = -\dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_1}} \quad \dots \quad x_{\alpha_\nu} = -\dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_\nu}} \\ p_{\alpha_{\nu+1}} = \dfrac{\partial W}{\partial x_{\alpha_{\nu+1}}} \dots \quad p_{\alpha_m} = \dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_m}}. \end{cases}$$

Darin bedeutet W eine Funktion der Variabeln

$$(14) \qquad p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_\nu}, \; x_{\alpha_{\nu+1}} \dots x_{\alpha_m},$$

die in $p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_\nu}$ ganzlinear, im übrigen aber beliebig ist. Doch ist hervorzuheben, dafs die Gleichungen (13) auch dann ein $m+1$-gliedriges Integraläquivalent von (1) darstellen, wenn W eine ganz beliebige Funktion der m Variabeln (14) bedeutet. Aus (13) folgt nämlich:

$$(15) \quad \begin{cases} dz \equiv dW + \sum\limits_1^\nu i \, (x_{\alpha_i}dp_{\alpha_i} + p_{\alpha_i}dx_{\alpha_i}) \\ \quad \equiv dW - \sum\limits_1^\nu i \, \dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_i}} dp_{\alpha_i} - \sum\limits_1^\nu i \, p_{\alpha_i} d\left(\dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_i}}\right) \\ dx_{\alpha_s} \equiv -d\left(\dfrac{\partial W}{\partial p_{\alpha_s}}\right) \qquad (s = 1 \dots \nu). \end{cases}$$

Substituirt man für dz, $dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_\nu}$ und für $p_{\alpha_{\nu+1}} \dots p_{\alpha_m}$ ihre Ausdrücke (13) (15) in ∇, so erhält man ein identisch verschwindendes Resultat, was zu zeigen war.

Das allgemeinste $m+1$-gliedrige Integraläquivalent der Gleichung $\nabla = 0$ hat also die Form (13), worin W eine arbiträre Funktion der

m Variabeln (14) bedeutet; insbesondere läfst sich stets erreichen, dafs W eine ganze lineare Funktion von $p_{\alpha_1} \ldots p_{\alpha_\nu}$ ist.

176. Um für die vorstehenden Resultate eine geometrische Ausdrucksweise zu gewinnen, wollen wir die $2m+1$ Variabeln (2) nicht als Punktkoordinaten eines R_{2m+1}, sondern im Raum R_{m+1} $(z, x_1 \ldots x_m)$ folgendermafsen interpretiren:

Es seien $z, x_1 \ldots x_m$ die Koordinaten irgend eines Punktes P des R_{m+1}. Wir betrachten dann eine beliebige, durch P gehende Ebene π, deren Gleichung, in laufenden Koordinaten ζ, ξ_i geschrieben, so lautet:

$$\zeta - z = p_1(\xi_1 - x_1) + \cdots + p_m(\xi_m - x_m). \tag{16}$$

Der Inbegriff des Punktes P und der durch ihn gehenden Ebene π bezeichnen wir als ein „*Flächenelement*“ des Raums R_{m+1} $(z, x_1 \ldots x_m)$; die $2m+1$ Gröfsen

$$z, x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m \tag{2}$$

heifsen die „*Koordinaten*“ dieses Flächenelements. Der Punkt P heifst „der zu dem Flächenelement (2) gehörige Punkt“ oder auch kurz „der Punkt des Flächenelements (2)“, die Ebene π wird „die zu dem Flächenelement (2) gehörige Ebene“ oder auch: „die Ebene des Flächenelements (2)“ genannt.

Zwei unendlich benachbarte Flächenelemente e, e', die bezw. die Koordinaten

$$z, x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m \tag{e}$$

$$z + dz, x_1 + dx_1 \ldots x_m + dx_m, p_1 + dp_1 \ldots p_m + dp_m \tag{e'}$$

besitzen, heifsen „*vereinigt liegend*“, wenn die Bedingung (1) erfüllt ist; letzteres kommt darauf hinaus, dafs der Punkt des Flächenelements e' auf der Ebene von e gelegen ist. In der That geht die Gleichung (16) in (1) über, wenn man ζ, ξ_i bezw. durch $z + dz$, $x_i + dx_i$ ersetzt.

Zwei benachbarte Flächenelemente liegen stets vereinigt, wenn zu ihnen derselbe Punkt gehört, wenn also die Inkremente dz, dx_i alle verschwinden.

177. Es giebt ∞^{2m+1} Flächenelemente in R_{m+1}. Ein $2m+1-\varrho$-gliedriges Gleichungensystem

$$\Phi_i(z, x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots 2m+1-\varrho) \tag{17}$$

definirt eine ϱ-fach ausgedehnte Schar von Flächenelementen. Ist das Gleichungensystem (17) ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung (1), dann und nur dann hat die genannte Schar die Eigenschaft, dafs jedes Flächenelement der Schar mit allen unendlich benachbarten und gleichfalls der Schar angehörenden Flächenelementen vereinigt liegt. Eine derartige ∞^ϱ-Schar nennen wir dann eine ϱ-fach ausgedehnte „*Elementmannigfaltigkeit*“ oder einen „*ϱ-fach ausgedehnten Elementverein*“ oder auch kurz eine „*Element M_ϱ*“ des Raums R_{m+1}. Die Gleichungen (17) heifsen die „Definitionsgleichungen“ des Elementvereins.

Es ist nun leicht, die Resultate des Art. 174 durch begriffliche Überlegungen wiederzugewinnen. Zunächst ersieht man sofort, dafs die Definitionsgleichungen einer Element-M_ϱ mindestens *eine* Relation in $z, x_1 \,..\, x_m$ enthalten müssen. Andernfalls nämlich würde jeder Punkt des R_{m+1} mindestens zu einem Flächenelement der Element-M_ϱ gehören. Ist dann e ein Flächenelement derselben, P der zugehörige Punkt, π die zugehörige Ebene, so giebt es zu P stets ∞^m Nachbarpunkte, die nicht auf π liegen, andererseits aber zu je einem Flächenelement der Element-M_ϱ gehören; d. h. e könnte nicht mit allen benachbarten Flächenelementen der Element-M_ϱ vereinigt liegen.

Es mögen demnach die bez. zu den Flächenelementen unseres Elementvereins gehörigen Punkte P eine $m - \nu$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit Π erfüllen, die durch (4) definirt sei. Dabei ist ν eine Zahl der Reihe $0, 1 \,..\, m$. Unter einer 0-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit verstehen wir insbesondere einen einzelnen Punkt des R_{m+1}. Nach der Schlufsbemerkung der vorigen Nr. erhalten wir dann jedenfalls eine Element-M_ϱ ($\varrho \leqq m$), wenn wir irgend ∞^ϱ Flächenelemente betrachten, die alle zu demselben Punkt $z^0, x_1^0 \,..\, x_m^0$ gehören, die also durch ein Gleichungensystem der Form

$$z = z^0,\ x_i = x_i^0;\ \omega_s(p_1 p_2 \,..\, p_m) = 0 \quad (i = 1 \,..\, m;\ s = 1 \,..\, m - \varrho)$$

definirt werden.

Es sei jetzt $\nu < m$; sind dann die Gröfsen (2) die Koordinaten eines beliebigen Flächenelements unserer Element-M_ϱ, ferner P der zugehörige Punkt, π die zugehörige Ebene, so ist P auf der Punktmannigfaltigkeit Π gelegen, und die Ebene π mufs, der Definition eines Elementvereins entsprechend, nicht nur P, sondern auch sämtliche auf Π gelegenen Nachbarpunkte enthalten, d. h. die Relation (1) mufs für jedes beliebige Wertsystem dz, dx_i erfüllt sein, das den Gleichungen (7) genügt. Wir schliefsen daraus wiederum, dafs die Gleichungen (4) nicht auf eine von z freie Form gebracht werden können; denn andernfalls würde das Gleichungensystem (7) durch die Annahme $dx_1 = 0 \,..\, dx_m = 0$ und durch beliebiges dz erfüllt, was für die Gleichung (1) nicht zutrifft.

Die soeben gefundene Bedingung liefert uns für die Koeffizienten p_i der Ebenengleichung (16) wiederum die $m - \nu$ Relationen, die durch Elimination der ϱ_i aus (10) entstehen, d. h. es giebt durch jeden Punkt P der Mannigfaltigkeit Π genau ∞^ν Ebenen von der geforderten Eigenschaft; es sind dies offenbar die ∞^ν zu dem Punkte P gehörigen Tangentialebenen der Punktmannigfaltigkeit Π (Art. 44). Sie bestimmen mit P zusammen ebensoviele Flächenelemente, die sich, wie wir sagen wollen, „*im Punkte P an die Punktmannigfaltigkeit Π anschliefsen*“, oder anders ausgedrückt, sie bilden einen Büschel, dessen „Axe“ die zu P gehörige Tangential-$\mu_{m-\nu}$ der Punktmannigfaltigkeit Π ist (Art. 44). Läfst man P auf Π alle möglichen Lagen annehmen, so erhält man ∞^m Flächenelemente, die einen Elementverein bilden. *Die Dimensionszahl ϱ einer Element-M_ϱ ist also höchstens gleich m.*

Die Gerade, die im R_{m+1} durch die Gleichungen

$$x_1 = 0 \;..\; x_m = 0$$

definirt wird, ist nach Art. 43 als die „z-Axe“ unseres Koordinatensystems zu bezeichnen. Die Gleichungen

$$x_1 = x_1^0 \;..\; x_m = x_m^0$$

stellen dann eine „zur z-Axe parallele Gerade“ dar. Eine $m-\nu$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit, die durch $\nu + 1$ Gleichungen zwischen den Variabeln $x_1 \,..\, x_m$ allein definirt ist, werden wir demgemäfs im Falle $\nu < m$ als „*eine zur z-Axe parallele cylindrische Punktmannigfaltigkeit,*“ im Falle $\nu = 0$ insbesondere als „*einen zur z-Axe parallelen Cylinder*“ bezeichnen, da sie offenbar $\infty^{m-\nu-1}$ zur z-Axe parallele Gerade enthält.

Nunmehr können wir die Ergebnisse des Art. 174 so aussprechen: *Im R_{m+1} $(z, x_1 \,..\, x_m)$ giebt es $m+1$ verschiedene Kategorien von Element-M_m, je nachdem die zugehörige Punktmannigfaltigkeit m-fach, $m-1$-fach, .. 1-fach, 0-fach ausgedehnt ist. Die allgemeinste Element-M_m der k^{ten} Kategorie besteht aus allen ∞^m Flächenelementen, die sich an eine beliebige $m-k+1$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit des R_{m+1} anschliefsen; diese letztere darf aber keine zur z-Axe parallele cylindrische Mannigfaltigkeit, im Falle $k = m$ insbesondere keine zur z-Axe parallele Gerade sein.*

Eine Element-M_m der k^{ten} Kategorie wird kurz als ein „Element-M_m^{m-k+1}“ bezeichnet; eine Element-M_m^m besteht aus allen ∞^m Flächenelementen, die sich an eine „Fläche“ des R_{m+1} anschliefsen, ist also durch ein Gleichungensystem der Form:

$$z = \varphi(x_1 x_2 \,..\, x_m);\; p_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \,..\, p_m = \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}$$

definirt.

Für jeden Index ϱ der Reihe $0, 1 \ldots m$ giebt es $\varrho + 1$ verschiedene Kategorien von Element-M_ϱ, je nachdem die zugehörige Punktmannigfaltigkeit ϱ-fach, $\varrho - 1$-fach, .. 1-fach, 0-fach ausgedehnt ist. Eine Element-M_1 wird auch ein „*Streifen*“ genannt.

178. Im dreifach ausgedehnten Raum R_3 (xyz) haben wir unter einem Flächenelement den Inbegriff eines Punktes xyz und einer durch ihn gehenden Ebene

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

zu verstehen; die 5 Gröfsen $xyzpq$ sind die Koordinaten dieses Flächenelements. Es giebt drei Kategorien von Element-M_2, d. h. von dreigliedrigen Integraläquivalenten der Pfaff'schen Gleichung

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0;$$

eine Element-M_2 der ersten Kategorie besteht aus den Punkten und zugehörigen Tangentialebenen einer beliebigen Fläche, die aber kein zur z-Axe paralleler Cylinder sein darf, ist also durch ein Gleichungensystem der Form

$$z = \varphi(xy),\ p = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

definirt. Die Flächenelemente einer Element-M_2 der zweiten Kategorie schliefsen sich an eine beliebige Raumkurve an, die keine zur z-Axe parallele Gerade ist; die 3 Definitionsgleichungen einer solchen M_2 haben also die Gestalt:

$$z = \varphi(x);\ y = \psi(x);\ \varphi'(x) = p + q\psi'(x);$$

worin φ und ψ arbiträre Funktionen, φ', ψ' ihre Ableitungen bedeuten.

Endlich besteht eine Element-M_2 der dritten Kategorie aus allen ∞^2 Flächenelementen, die denselben Punkt $x_0 y_0 z_0$ enthalten.

Eine Element-M_1 oder ein Streifen des R_3 ist entweder definirt durch Gleichungen der Form

$$z = \varphi(x),\ y = \psi(x);\ q = \chi(x);\ p = \varphi' - \chi\psi',$$

entsteht also, indem man jedem Punkte P einer beliebigen Raumkurve, die keine zur z-Axe parallele Gerade ist, nach irgend einem Gesetze eine von den ∞^1 durch P gehenden Tangentialebenen der Raumkurve zuweist; oder die 4 Definitionsgleichungen der Element-M_1 haben die Form:

$$(18) \qquad x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ f(p, q) = 0$$

d. h. der Streifen besteht aus ∞^1 Elementen, die zu demselben Punkt gehören, also einen Kegel mit der Spitze P umhüllen. Dieser Kegel kann auch in ein Ebenenbüschel, dessen Axe durch P geht, oder in mehrere solche Büschel degeneriren.

Ein Streifen, dessen Definitionsgleichungen die Form (18) haben, heifst auch ein „*Elementarkegel*".

179 Im Raume $R_2\,(xy)$, d. h. in der Ebene mit den cartesischen Koordinaten xy verstehen wir unter einem „Linienelement" den Inbegriff eines Punktes xy und einer durch ihn gehenden, zur y-Axe nicht parallelen Geraden

$$\eta - y = y'(\xi - x)$$

und nennen xyy' die 3 „Koordinaten" des Linienelements. Zwei benachbarte Linienelemente xyy' und $x + dx$, $y + dy$, $y' + dy'$ heifsen „vereinigt liegend", wenn die Relation

$$dy - y'\,dx = 0 \tag{19}$$

erfüllt ist, wenn also der Punkt des zweiten Linienelements auf der Geraden des ersten liegt. Es giebt zwei Arten von Element-M_1 im $R_2(xy)$, d. h. von zweigliedrigen Integraläquivalenten der Pfaff'schen Gleichung (19). Eine Element-M_1 der ersten Kategorie besteht aus den ∞^1 Punkten und zugehörigen Tangenten einer beliebigen Kurve, wird also durch zwei Gleichungen der Form

$$y = \varphi(x),\ y' = \varphi'(x)$$

definirt. Eine Element-M_1 der zweiten Kategorie besteht aus allen Linienelementen durch denselben Punkt der Ebene.

180. Wir wollen nun im Raume $R_{m+1}\ (z, x_1 \,.\,.\, x_m)$ insbesondere alle diejenigen Element-M_ϱ ins Auge fassen, deren Definitionsgleichungen die Relation $z = 0$ enthalten; die Punktmannigfaltigkeit, an die sich eine solche Element-M_ϱ anschliefst, ist also ganz in der Ebene $z = 0$ gelegen. Werden die Gleichungen, durch die ein Elementverein dieser Art definirt ist, auf die Form

$$z = 0$$

$$\Phi_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_m p_1 p_2 \,.\,.\, p_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, 2m - \varrho) \tag{20}$$

gebracht, so bilden die Relationen (20) offenbar ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_m dx_m = 0. \tag{21}$$

Umgekehrt, genügen die Gleichungen (20) dieser Pfaff'schen Gleichung, so definiren sie mit $z = 0$ zusammen eine Element-M_ϱ der oben erwähnten besonderen Beschaffenheit; durch die Aufsuchung aller dieser Elementvereine ist also die Frage nach dem allgemeinsten Integraläquivalent von (21) miterledigt.

181. Um zunächst alle m-gliedrigen Integraläquivalente:

$$(22)\qquad \Phi_1 = 0,\ \Phi_2 = 0, \ldots \Phi_m = 0$$

der Pfaff'schen Gleichung (21) zu erhalten, nehmen wir erstens an, dafs sich aus (22) keine Relation in $x_1 \ldots x_m$ allein ableiten läfst. Die Gleichungen (22) sind dann offenbar mit den folgenden identisch:

$$(23)\qquad p_1 = 0,\ p_2 = 0, \ldots p_m = 0.$$

Es mögen sich zweitens aus (22) genau ν unabhängige Relationen der Form

$$(24)\qquad \psi_i(x_1 x_2 \ldots x_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots \nu)$$

herstellen lassen, die nach $x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_\nu}$ auflösbar seien. Ersetzen wir die Gleichungen (4) durch $z = 0$ und das System (24), so nehmen die Relationen (9) nachstehende Form an:

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} p_{\alpha_1} & p_{\alpha_2} & \cdot\cdot & p_{\alpha_\nu} & p_s \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{\alpha_1}} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{\alpha_2}} & \cdot\cdot & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{\alpha_\nu}} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_{\alpha_1}} & \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_{\alpha_2}} & \cdot\cdot & \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_{\alpha_\nu}} & \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_s} \end{vmatrix} = 0 \qquad (s = \alpha_{\nu+1},\ \alpha_{\nu+2} \ldots \alpha_m)$$

die sich auch durch Elimination der ϱ_i aus den Beziehungen

$$(26)\qquad p_i = \sum_1^m {}^k \varrho_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \qquad (i = 1 \ldots m)$$

ergeben, und mit (20) und mit $z = 0$ zusammen im Raume R_{m+1} eine Element-M_m der oben geforderten Beschaffenheit darstellen.

Löst man die Relationen (24) nach $x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_\nu}$ auf:

$$(27)\qquad x_{\alpha_i} = \varphi_i(x_{\alpha_{\nu+1}} \ldots x_{\alpha_m}) \qquad (i = 1 \ldots \nu),$$

so schreiben sich die Gleichungen (25) so:

$$(28)\quad 0 = p_s + p_{\alpha_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} + p_{\alpha_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_s} + \cdot\cdot + p_{\alpha_\nu}\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_s} \quad (s = \alpha_{\nu+1}, \alpha_{\nu+2}, \ldots \alpha_m).$$

Unter Gebrauch der Abkürzung

$$U(p_{\alpha_1} \cdot\cdot p_{\alpha_\nu} x_{\alpha_{\nu+1}} \cdot\cdot x_{\alpha_m}) \equiv \varphi_1 \cdot p_{\alpha_1} + \varphi_2 \cdot p_{\alpha_2} + \cdot\cdot + \varphi_\nu \cdot p_{\alpha_\nu}$$

läfst sich das Gleichungensystem (27) (28) ersetzen durch das nachstehende:

$$(29)\qquad x_h = \frac{\partial U}{\partial p_h};\ p_l = -\frac{\partial U}{\partial x_l} \qquad (h = \alpha_1 \ldots \alpha_\nu;\ l = \alpha_{\nu+1} \ldots \alpha_m).$$

Dabei bedeutet U eine Funktion der Variabeln

$$(30)\qquad p_{\alpha_1}\,..\,p_{\alpha_\nu}x_{\alpha_{\nu+1}}\,..\,x_{\alpha_m},$$

die hinsichtlich $p_{\alpha_1}\,..\,p_{\alpha_\nu}$ ganz, linear und homogen ist. Doch liefern die Gleichungen (29) auch dann ein m-gliedriges Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung (21), wenn U eine *beliebige* Funktion der m Variabeln (30) bedeutet, die nur der einen Bedingung zu genügen hat, daſs sie hinsichtlich $p_{\alpha_1}\,..\,p_{\alpha_\nu}$ homogen erster Ordnung ist, also die Euler'sche Identität

$$(31)\qquad p_{\alpha_1}\frac{\partial U}{\partial p_{\alpha_1}}+p_{\alpha_2}\frac{\partial U}{\partial p_{\alpha_2}}+\cdots+p_{\alpha_\nu}\frac{\partial U}{\partial p_{\alpha_\nu}}\equiv U$$

befriedigt. Zum Beweise unserer Behauptung bemerken wir, daſs vermöge (29) (31) identisch:

$$\begin{aligned}p_{\alpha_1}dx_{\alpha_1}+\cdots+p_{\alpha_\nu}dx_{\alpha_\nu}&\equiv d(p_{\alpha_1}x_{\alpha_1}+\cdots+p_{\alpha_\nu}x_{\alpha_\nu})\\&\quad-x_{\alpha_1}dp_{\alpha_1}-\cdots-x_{\alpha_\nu}dp_{\alpha_\nu}\\&\equiv dU-\frac{\partial U}{\partial p_{\alpha_1}}dp_{\alpha_1}-\cdots-\frac{\partial U}{\partial p_{\alpha_\nu}}dp_{\alpha_\nu}.\end{aligned}$$

Ferner hat man nach (29):

$$p_{\alpha_{\nu+1}}dx_{\alpha_{\nu+1}}+\cdots+p_{\alpha_m}dx_{\alpha_m}\equiv-\frac{\partial U}{\partial x_{\alpha_{\nu+1}}}dx_{\alpha_{\nu+1}}-\cdots$$

Durch Addition der beiden letzten Identitäten folgt, daſs vermöge (29) identisch:

$$p_1dx_1+\cdots+p_mdx_m\equiv dU-dU\equiv 0,$$

was zu zeigen war.

Demnach ist folgender Satz bewiesen:

Ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung

$$(21)\qquad p_1dx_1+p_2dx_2+\cdots+p_mdx_m=0$$

enthält mindestens m Gleichungen. Das allgemeinste m-gliedrige Integraläquivalent, das nicht die Form

$$(23)\qquad p_1=0,\ p_2=0,\ ..\ p_m=0$$

besitzt, wird erhalten, indem man zu einem beliebigen ν-gliedrigen Gleichungensystem der Form

$$(24)\qquad \psi_i(x_1x_2\,..\,x_m)=0\qquad (i=1,2,..\,\nu)$$

diejenigen m — ν Gleichungen hinzufügt, die sich durch Elimination der ϱ_i *aus*

$$(26)\qquad p_i = \sum_1^r \varrho_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \qquad (i = 1 \,.\,.\, m)$$

ergeben. Ein solches Integraläquivalent kann stets die Form:

$$(29)\qquad x_h = \frac{\partial U}{\partial p_h}; \; p_l = -\frac{\partial U}{\partial x_l} \quad (h = \alpha_1 \,.\,.\, \alpha_\nu;\; l = \alpha_{\nu+1} \,.\,.\, \alpha_m)$$

erhalten, worin U eine arbiträre Funktion der Variabeln

$$p_{\alpha_1} \,.\,.\, p_{\alpha_\nu} x_{\alpha_{\nu+1}} \,.\,.\, x_{\alpha_m}$$

bedeutet, die in der p_{α_ι} homogen erster Ordnung ist. Insbesondere läſst sich stets erreichen, daſs U in den p_{α_ι} ganz, linear und homogen wird.

Das allgemeinste $m + \tau$-gliedrige Integraläquivalent von (21) wird erhalten, indem man entweder zu den Gleichungen (23) irgend τ Relationen in $x_1 \,.\,.\, x_m$, oder zu einem Gleichungensystem der Form (29) noch τ beliebige Relationen

$$(32)\qquad \chi_i(p_{\alpha_1} \,.\,.\, p_{\alpha_\nu} x_{\alpha_{\nu+1}} \,.\,.\, x_{\alpha_m}) = 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, \tau)$$

hinzufügt, die keine neue Relation in den x allein liefern.

Alle diese Resultate hätten wir natürlich auch ohne Bezugnahme auf die Pfaff'sche Gleichung (1), direkt aus der Form der Gleichung (21) ableiten können.

182. Wir betrachten jetzt gleichzeitig den Raum $R_{m+1}(z, x_1 \,.\,.\, x_m)$ und den Raum $R_m(x_1 x_2 \,.\,.\, x_m)$, der aus dem R_{m+1} durch die Gleichung

$$(33)\qquad z = 0$$

ausgeschnitten wird, der also mit der „Ebene $z = 0$" identisch ist. Die Ebene des R_{m+1}, die zu dem Flächenelement mit den Koordinaten $0, x_1 \,.\,.\, x_m p_1 \,.\,.\, p_m$ gehört, schneidet die Ebene (33), d. h. also den Raum R_m nach einer linearen $m - 1$-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit, die im R_m durch die Gleichung:

$$(34)\qquad p_1(\xi_1 - x_1) + \cdots + p_m(\xi_m - x_m) = 0$$

mit den laufenden Koordinaten ξ_ι dargestellt wird. Es ist dies eine durch den Punkt $x_1 \,.\,.\, x_m$ gehende „Ebene" des R_m.

Wir bezeichnen nun allgemein den Inbegriff eines im R_m gelegenen Punktes $x_1 \,.\,.\, x_m$ und einer beliebigen durch ihn gehenden, im R_m gelegenen Ebene (34) als ein „Flächenelement des R_m"; die Gröſsen

$$(35)\qquad x_1 x_2 \,.\,.\, x_m p_1 p_2 \,.\,.\, p_m$$

sollen die *„homogenen Koordinaten"* dieses Flächenelements genannt werden. Die $2m$ Gröſsen (35) sind natürlich dann und nur dann die homogenen Koordinaten eines Flächenelements des R_m, wenn nicht alle p_i verschwinden, und das Flächenelement (35) ist schon durch Angabe der $m-1$ Verhältnisse der p_i bestimmt; es giebt also ∞^{2m-1} Flächenelemente in R_m. Wir erkennen jetzt unmittelbar:

Jedem Flächenelement des R_{m+1}, das die Koordinaten

$$0, x_1 x_2 \,.\,.\, x_m p_1 p_2 \,.\,.\, p_m \tag{36}$$

besitzt, und für welches nicht alle p_i null sind, ist in der geschilderten Weise ein und nur ein Flächenelement (35) des R_m zugewiesen. Umgekehrt bestimmt jedes Flächenelement (35) des R_m einfach unendlich viele Flächenelemente des R_{m+1}, deren Koordinaten die Form

$$0, x_1 \cdot\cdot x_m, \sigma p_1, \sigma p_2 \cdot\cdot \sigma p_m \tag{37}$$

besitzen, wo σ eine arbiträre Konstante bedeutet. Wir können diesen Sachverhalt kurz so aussprechen; Jedes Flächenelement (36) des R_{m+1} für das nicht alle p_i null sind, schneidet aus dem Raum R_m ein ganz bestimmtes Flächenelement (35) aus, und umgekehrt gehen durch jedes Flächenelement (35) des R_m einfach unendlich viele Flächenelemente (37) des R_{m+1} hindurch.

So schneidet z. B. ein Flächenelement $x, y, 0, p, q$ des $R_3(xyz)$ aus der xy-Ebene ein Linienelement aus, bestehend aus dem Punkt x, y und der durch ihn gehenden Geraden

$$p(\xi - x) + q(\eta - q) = 0;$$

umgekehrt gehen durch dieses Linienelement die ∞^1 Flächenelemente $x, y, 0, \sigma p, \sigma q$ des R_3 hindurch.

183. Die homogenen Elementkoordinaten des R_m bieten den Vorteil, daſs sie jeden Punkt des R_m und *jede beliebige* durch ihn gehende Ebene des R_m darzustellen erlauben, während bei dem Gebrauch der nichthomogenen Elementkoordinaten $z, x_1 \,.\,.\, p_m$ im R_{m+1} alle diejenigen Flächenelemente, deren zugehörige Ebenen zur z-Axe parallel sind, von der Betrachtung ausgeschlossen sind. Es liegt daher nahe, auch im R_{m+1} homogene Elementkoordinaten einzuführen, indem wir setzen:

$$x_{m+1} = z; \quad -\frac{q_i}{q_{m+1}} = p_i \qquad (i = 1 \,.\,.\, m) \tag{38}$$

und die Gröſsen

$$x_1 x_2 \,.\,.\, x_{m+1}, \; q_1 q_2 \cdot\cdot q_{m+1} \tag{39}$$

als Koordinaten desjenigen Flächenelements bezeichnen, das aus dem Punkt $x_1 \,.\,.\, x_{m+1}$ und der durch ihn gehenden Ebene

$$q_1(\xi_1 - x_1) + \cdot\cdot + q_{m+1}(\xi_{m+1} - x_{m+1}) = 0$$

16*

des Raums $R_{m+1}(x_1 \ldots x_{m+1})$ besteht, vorausgesetzt, daſs nicht alle q_i verschwinden. Die früher von der Betrachtung ausgeschlossenen Flächenelemente sind jetzt einfach durch die Bedingung $q_{m+1} = 0$ charakterisirt.

Natürlich kann man auch andererseits von den homogenen Koordinaten (35) im R_m zu nichthomogenen dadurch übergehen, daſs man etwa $\frac{-p_i}{p_m}$ durch p_i' und $x_1 \ldots x_{m-1} x_m$ durch $x_1' \ldots x_{m-1}' z'$ ersetzt, wodurch aber alle Flächenelemente des R_m, deren Koordinate p_m gleich null ist, von der Betrachtung ausgeschlossen werden.

184. Die in Art. 176 und 177 gegebenen Definitionen nehmen im $R_m(x_1 \ldots x_m)$ unter Gebrauch der homogenen Elementkoordinaten folgende Form an:

Zwei benachbarte Flächenelemente $x_1 \ldots p_m$ und $x_1 + dx_1 \ldots p_m + dp_m$ heiſsen vereinigt liegend, wenn die Bedingung (21) erfüllt ist, wenn also die Ebene des ersten Flächenelements den Punkt des zweiten enthält. Eine Schar von ∞^ϱ Flächenelementen des R_m von der Eigenschaft, daſs jedes Element mit allen benachbarten, der Schar angehörigen Flächenelementen vereinigt liegt, heiſst ein ϱ-fach ausgedehnter Elementverein oder eine „Element-M_ϱ" des R_m, und ist definirt durch ein $2m - \varrho - 1$-gliedriges Gleichungensystem zwischen den Gröſsen (35), *das hinsichtlich der Variabeln $p_1 \ldots p_m$ homogen ist,* die Pfaff'sche Gleichung (21) befriedigt und nicht alle Relationen $p_1 = 0, \ldots p_m = 0$ enthält. Dann folgt aus den Entwickelungen des Art. 181 sofort der Satz:

Die Dimensionszahl ϱ einer Element-M_ϱ des R_m ist höchstens $m - 1$. Die m Definitionsgleichungen jeder Element-M_{m-1} können auf die Form (29) gebracht werden, worin U in den p_{α_i} homogen erster Ordnung ist; die allgemeinste Element-M_ϱ ($\varrho < m - 1$) wird erhalten, wenn man zu einem Gleichungensystem (29), in dem $\nu \geqq m - \varrho$ zu wählen ist, noch $m - \varrho - 1$ weitere Relationen:

$$\chi_i\left(\frac{p_{\alpha_2}}{p_{\alpha_1}}, \frac{p_{\alpha_3}}{p_{\alpha_1}} \cdots \frac{p_{\alpha_\nu}}{p_{\alpha_1}}, x_{\alpha_{\nu+1}} \cdots x_{\alpha_m}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m - \varrho - 1)$$

hinzufügt, die nach $m - \varrho - 1$ von den Verhältnissen

$$\frac{p_{\alpha_2}}{p_{\alpha_1}}, \frac{p_{\alpha_3}}{p_{\alpha_1}} \cdots \frac{p_{\alpha_\nu}}{p_{\alpha_1}}$$

aufgelöst werden können.

Um auf diese Weise alle Element-M_ϱ des R_{m+1} in homogenen Koordinaten (39) ausgedrückt zu erhalten, brauchen wir nur in den Gleichungen der Art. 174 und 175 die Substitution (38) auszuführen.

Die Relationen (4) können jetzt auch eine zur z-Axe parallele cylindrische Mannigfaltigkeit darstellen, d. h. von z (bezw. x_{m+1}) frei sein; die Definitionsgleichungen einer Element-M_ϱ, die sich an eine solche cylindrische Mannigfaltigkeit anschliefst, enthalten offenbar die Relation $q_{m+1} = 0$.

Die Relationen (29), (32) definiren ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung (21) auch dann, wenn die Gleichungen (32) in den p_ι nicht homogen sind. In diesem Falle können wir die Gleichungen (32) immer auf folgende Form gebracht denken:

$$(40)\qquad \omega_\iota\left(\frac{p_{\alpha_2}}{p_{\alpha_1}}, \frac{p_{\alpha_3}}{p_{\alpha_1}} \cdots \frac{p_{\alpha_\nu}}{p_{\alpha_1}}, x_{\alpha_{\nu+1}} \cdots x_{\alpha_m}\right) = 0 \qquad (\iota = 1 \,.\,. \tau - 1)$$

$$(41)\qquad p_{\alpha_1} = F\left(\frac{p_{\alpha_2}}{p_{\alpha_1}}, \frac{p_{\alpha_3}}{p_{\alpha_1}} \cdots \frac{p_{\alpha_\nu}}{p_{\alpha_1}}, x_{\alpha_{\nu+1}} \cdots x_{\alpha_m}\right).$$

Jetzt liefern die Relationen (29), (40) zusammen einen $m - \tau$-fach ausgedehnten Elementverein des R_m; ist $x_1^0 \,.\,. p_m^0$ ein beliebiges Flächenelement dieses Elementvereins, und substituiren wir statt der x_ι und p_ι die Gröfsen x_ι^0 und σp_ι^0 in die Gleichung (41), so liefert uns diese für σ einen ganz bestimmten Wert, d. h. die Relation (41) ordnet jedem Flächenelement $x_1^0 \,.\,. p_m^0$ der durch (29), (40) definirten Element $M_{m-\tau}$ des R_m ein ganz bestimmtes Flächenelement $0, x_1^0 \,.\,. x_m^0$ $\sigma p_1^0 \,.\,. \sigma p_m^0$ des R_{m+1} zu.

Wir dürfen daher schliefslich folgende Sätze aussprechen:

Jedes m-gliedrige Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung

$$(21)\qquad p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m = 0$$

ist in den p_i homogen, und hat entweder die Form

$$(23)\qquad p_1 = 0, \,.\,. \, p_m = 0$$

oder es stellt in homogenen Elementkoordinaten x, p_i eine Element-M_{m-1} des Raumes $R_m(x_1 \,.\,. x_m)$ dar.

Enthält ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung (21) *mehr als m Gleichungen, und ist es in den p_ι homogen, so besteht es entweder aus den Relationen* (23) *und beliebigen Gleichungen in $x_1 \,.\,. x_m$, oder es stellt im R_m einen Elementverein dar, hat also die Form* (29), (32). *Jedes in den p_ι nicht homogene Integraläquivalent entsteht aus den Definitionsgleichungen eines Elementvereins des R_m durch Hinzufügung einer in den p_ι unhomogenen Gleichung.*

§ 2. **Die Integraläquivalente einer beliebigen Pfaff'schen Gleichung.**

185. Die Entwickelungen des vorigen § setzen uns in den Stand, die Frage nach allen Integraläquivalenten einer beliebigen Pfaff'schen Gleichung

$$(1)\qquad \varDelta \equiv \sum_1^n a_i(x_1 x_2 \dots x_n)\, dx_i = 0$$

zu erledigen. Wir nehmen zunächst an, daſs die Klasse $\varkappa$ des Ausdrucks $\varDelta$ gleich 2λ sei, daſs also $\varDelta$ auf die folgende Normalform gebracht werden kann:

$$(2)\qquad \varDelta = \sum_1^\lambda F_i(x_1 x_2 \dots x_n)\, df_i(x_1 x_2 \dots x_n)$$

und wir dürfen nach Art. 167 die Existenz einer Stelle $x_1^0 \dots x_n^0$ voraussetzen, an der alle F_i, f_i regulär sind und die Funktionaldeterminante

$$\begin{pmatrix} F_1 \dots F_\lambda f_1 \dots f_\lambda \\ x_1 \dots\dots\dots x_\varkappa \end{pmatrix}$$

nicht verschwindet. Führen wir jetzt statt $x_1 \dots x_\varkappa$ mittels der Formeln

$$x_1' = f_1 \dots x_\lambda' = f_\lambda;\;\; p_1' = F_1; \dots p_\lambda' = F_\lambda$$

die neuen Veränderlichen x_i', p_i' ein, so nimmt die Pfaff'sche Gleichung (1) die nachstehende Gestalt an:

$$(3)\qquad p_1' dx_1' + p_2' dx_2' + \dots + p_\lambda' dx_\lambda' = 0.$$

Auf diese Gleichung lassen sich jetzt unmittelbar die Resultate des vorigen § übertragen, indem man daselbst die Zahl m durch λ, und die Variabeln $x_i p_i$ durch $x_i' p_i'$ ersetzt. Darnach besitzt die Pfaff'sche Gleichung (3) insbesondere Integraläquivalente, die aus λ Gleichungen bestehen, und die Form haben

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\psi_i(x_1' x_2' \dots x_\lambda') = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots \nu;\; \nu \leqq \lambda) \\ &\begin{vmatrix} p_{\alpha_1}' & p_{\alpha_2}' & \cdots & p_{\alpha_\nu}' & p_s' \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_{\alpha_1}'} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_{\alpha_2}'} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_{\alpha_\nu}'} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_s'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \psi_\nu}{\partial x_{\alpha_1}'} & \dfrac{\partial \psi_\nu}{\partial x_{\alpha_2}'} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_\nu}{\partial x_{\alpha_\nu}'} & \dfrac{\partial \psi_\nu}{\partial x_s'} \end{vmatrix} = 0 \qquad (s = \alpha_{\nu+1}, \alpha_{\nu+2}, \dots \alpha_\lambda), \end{aligned}\right.$$

oder in aufgelöster Form

$$(5)\qquad \begin{aligned} &x_{\alpha_h}' = \varphi_h(x_{\alpha_{\nu+1}}', x_{\alpha_{\nu+2}}' \dots x_{\alpha_\lambda}') \qquad (h = 1, 2, \dots \nu) \\ &-p_l' = p_{\alpha_1}' \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_l'} + p_{\alpha_2}' \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_l'} + \dots + p_{\alpha_\nu}' \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_l'} \quad (l = \alpha_{\nu+1} \dots \alpha_\lambda). \end{aligned}$$

Darin ist ν eine Zahl der Reihe $1 \ldots \lambda$; ferner bedeuten $\alpha_1 \ldots \alpha_\lambda$ irgend eine Permutation dieser Indices; endlich sind unter den ψ_ι, φ_ι willkürliche Funktionen zu verstehen. Ersetzt man in den Relationen (4) oder (5) die x_ι', p_ι' bezw. durch die in der Normalform von Δ auftretenden Funktionen f_ι, F_ι, so erhält man ein λ-gliedriges, in den ursprünglichen Variabeln $x_1 \ldots x_n$ ausgedrücktes Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung (1).

186. Weitere Integraläquivalente der Pfaff'schen Gleichung (1) oder (3) erhalten wir nach den Regeln des vorigen §, indem wir zu einem System der Form (4) oder (5) noch andere Relationen in den $x_\iota' p_\iota'$ hinzufügen, die mit den vorhergehenden zusammen keine weitere Beziehung in den x_ι' allein liefern. Da aber gegenwärtig nicht nur die $x_\iota' p_\iota'$, sondern auch noch die Gröfsen $x_{\varkappa+1}, x_{\varkappa+2}, \ldots x_n$ als Variable zu betrachten sind, so entsteht die Frage: Welches ist das allgemeinste Gleichungensystem der Form

$$(6) \qquad \Omega_i(x_1' \ldots x_\lambda' p_1' \ldots p_\lambda', x_{\varkappa+1} \ldots x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

welches die Gleichung (3) befriedigt?

Wir nehmen an, dafs sich aus den Gleichungen (6) genau $\nu + \tau$ Relationen der Form

$$(7) \qquad \psi_i(x_1' \ldots x_\lambda', x_{\varkappa+1} \ldots x_n) = 0 \qquad (i = 1 \cdot . \nu + \tau)$$

ableiten lassen; τ dieser Relationen mögen nur die Variabelen $x_{\varkappa+1} \ldots x_n$ enthalten, so dafs das Gleichungensystem (7) durch Auflösung folgende Form annimmt:

$$(8) \qquad x_{\alpha_h}' = \varphi_h(x_{\alpha_{\nu+1}}', \ldots x_{\alpha_\lambda}', x_{\beta_{\tau+1}}, \ldots x_{\beta_{n-\varkappa}}) \qquad (h = 1 \ldots \nu)$$

$$(9) \qquad x_{\beta_l} = \psi_l(x_{\beta_{\tau+1}}, \ldots x_{\beta_{n-\varkappa}}) \qquad (l = 1, 2, \ldots \tau)$$

wobei $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-\varkappa}$ irgend eine Anordnung der Indices $\varkappa + 1$, $\varkappa + 2, \ldots n$ bedeutet. Die Zahl ν mufs offenbar mindestens gleich 1 sein. Dagegen kann τ verschwinden; dann kommen die Gleichungen (9) in Wegfall und die rechten Seiten der Gleichungen (8) können sämtliche Variable $x_{\varkappa+1} \ldots x_n$ enthalten. Setzt man für die x_{α_h}' ihre Ausdrücke (8) in die linke Seite von (3) ein, so müssen in dem entstehenden Substitutionsresultat die Koeffizienten aller Differentiale

$$dx_{\alpha_{\nu+1}}' \ldots dx_{\alpha_\lambda}'; \quad dx_{\beta_{\tau+1}} \ldots dx_{\beta_{n-\varkappa}}$$

verschwinden, wenn das Gleichungensystem (6) ein Integraläquivalent unserer Pfaff'schen Gleichung sein soll, d. h. die Relationen (6) müssen folgende Gleichungen umfassen:

$$(10)\qquad p_s' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s'} p_{\alpha_1}' + \cdots + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_s'} p_{\alpha_\nu}' = 0 \quad (s = \alpha_{\nu+1} \,..\, \alpha_\lambda)$$

$$(11)\qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_t} p_{\alpha_1}' + \cdots + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_t} p_{\alpha_\nu}' = 0 \quad (t = \beta_{\tau+1} \,..\, \beta_{n-\varkappa}).$$

Die Gleichungen (11) brauchen nicht von einander unabhängig zu sein; aber offenbar liefern sie zusammen mindestens *eine* Gleichung, die keine Folge von (10) ist, wenn die Funktionen $\varphi_1 \,..\, \varphi_\nu$ von den Variabeln $x_{\varkappa+1} \,..\, x_n$ nicht vollkommen unabhängig sind. Indem wir die bisherigen Resultate zusammenfassen, und von dem speziellen Gleichungensysteme $p_1' = 0, \,..\, p_\lambda' = 0$ vorläufig absehen, erhalten wir folgende Sätze:

Es sei $\varkappa = 2\lambda$ die Klasse des Pfaff'schen Ausdrucks

$$\varDelta = \sum_1^n a_i(x_1 x_2 \,..\, x_n) dx_i\,,$$

ferner

$$F_1 df_1 + \cdots + F_\lambda df_\lambda$$

eine Normalform von $\varDelta$, die den Bedingungen des Art. 167 genügt. Dann enthält jedes Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung $\varDelta = 0$, das auf die Form:

$$(12)\qquad \Omega_i(f_1 \,..\, f_\lambda,\ F_1 \,..\, F_\lambda,\ x_{\varkappa+1} \,..\, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \,..)$$

gebracht werden kann, mindestens λ Gleichungen.

Jedes λ-gliedrige Integraläquivalent dieser Art kann nachstehende Form erhalten:

$$(13)\ \begin{cases} f_{\alpha_h} = \varphi_h(f_{\alpha_{\nu+1}}, f_{\alpha_{\nu+2}} \,..\, f_{\alpha_\lambda}) & (h = 1 \,..\, \nu) \\ F_l + \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_l} F_{\alpha_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial f_l} F_{\alpha_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial f_l} F_{\alpha_\nu} = 0 & (l = \alpha_{\nu+1} \,..\, \alpha_\lambda). \end{cases}$$

Darin ist ν irgend eine Zahl der Reihe $1 \,..\, \lambda$; die $\alpha_1 \,..\, \alpha_\lambda$ bedeuten irgend eine Permutation dieser Zahlen; endlich sind unter den φ_i willkürliche Funktionen zu verstehen.

Jedes andere Integraläquivalent von der Form (12) hat entweder folgende Gestalt

$$(14)\ \begin{cases} f_{\alpha_h} = \varphi_h(f_{\alpha_{\nu+1}} \cdots f_{\alpha_\lambda} x_{\beta_{\tau+1}} \cdots x_{\beta_{n-\varkappa}}) & (h = 1 \,..\, \nu) \\ x_{\beta_l} = \psi_l(x_{\beta_{\tau+1}} x_{\beta_{\tau+2}} \cdots x_{\beta_{n-\varkappa}}) & (l = 1, 2 \,..\, \tau) \\ F_s + \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_s} F_{\alpha_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial f_s} F_{\alpha_\nu} = 0 & (s = \alpha_{\nu+1} \,..\, \alpha_\lambda) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_t} F_{\alpha_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_t} F_{\alpha_\nu} = 0 & (t = \beta_{\tau+1} \,..\, \beta_{n-\varkappa}) \end{cases}$$

wo τ eine Zahl der Reihe $0, 1 \ldots n - \varkappa$, ferner $\beta_1 \ldots \beta_{n-\varkappa}$ irgend eine Anordnung der Indices $\varkappa + 1 \ldots n$, endlich die φ_h, ψ_l willkürliche Funktionen bezeichnen; oder es entsteht aus einem Gleichungensystem der Form (13) oder (14) durch Hinzufügung beliebiger Relationen zwischen den Variabeln F_ι, f_ι, $x_{\varkappa+1} \ldots x_n$, die mit den vorhergehenden verträglich sind, und mit ihnen zusammen keine weiteren Relationen zwischen den Gröfsen $f_1 \ldots f_\lambda$, $x_{\varkappa+1} \ldots x_n$ allein ergeben.

In dem System (14) müssen die Funktionen φ_h so gewählt werden, dafs die Gleichungen, die in der letzten Zeile von (14) stehen, keine Relationen in den Gröfsen

$$f_{\alpha_{\nu+1}} \cdots f_{\alpha_\lambda} x_{\beta_{\tau+1}} \cdots x_{\beta_{n-\varkappa}}$$

allein liefern. Schliefsen wir also solche Systeme (14), vermöge deren alle Gröfsen $F_{\alpha_1} \ldots F_{\alpha_\nu}$ und infolge dessen überhaupt alle F_ι verschwinden, vorläufig von der Betrachtung aus, so müssen, falls $\nu + \tau \leqq n - \varkappa$ in der $n - \varkappa - \tau$-zeiligen Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_t} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_t} & \cdots & \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\| \qquad (t = \beta_{\tau+1} \ldots \beta_{n-\varkappa}).$$

alle ν-reihigen Determinanten identisch verschwinden.

187. In ganz analoger Weise erledigt sich nach dem vorigen § die Frage nach den Integraläquivalenten für den Fall, dafs die Klasse von $\varDelta$ ungerade ist, und es ergeben sich die Sätze:

Ist die Klasse $\varkappa$ des Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$ gleich $2\lambda - 1$, und hat $\varDelta$ die Normalform

$$df_\lambda + F_1 df_1 + \cdots + F_{\lambda-1} df_{\lambda-1} \tag{15}$$

die den Bedingungen des Art. 167 genügen möge, so enthält jedes Integraläquivalent der Gleichung $\varDelta = 0$, das auf die Form:

$$\Omega_\iota(f_1 \ldots f_\lambda, F_1 \ldots F_{\lambda-1}, x_{\varkappa+1} \ldots x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{16}$$

gebracht werden kann, mindestens λ Gleichungen.

Das allgemeinste λ-gliedrige Integraläquivalent dieser Art hat die Form

$$\left\{ \begin{aligned} f_\lambda &= \varphi(f_{\alpha_{\nu+1}} f_{\alpha_{\nu+2}} \cdots f_{\alpha_{\lambda-1}}) \\ f_{\alpha_h} &= \varphi_h(f_{\alpha_{\nu+1}} \quad \cdots \quad f_{\alpha_{\lambda-1}}) \qquad (h = 1 \ldots \nu) \\ 0 &= F_s + \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_s} F_{\alpha_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial f_s} F_{\alpha_\nu} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_s} \qquad (s = \alpha_{\nu+1} \ldots \alpha_{\lambda-1}). \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Jedes andere Integraläquivalent (16) hat entweder die Gestalt:

$$(18)\quad \begin{cases} f_\lambda = \varphi\,(f_{\alpha_{\nu+1}} \cdot\cdot f_{\alpha_{\lambda-1}},\ x_{\beta_{\tau+1}} \cdot\cdot x_{\beta_{n-\varkappa}}) & \\ f_{\alpha_h} = \varphi_h(f_{\alpha_{\nu+1}} \cdot\cdot f_{\alpha_{\lambda-1}},\ x_{\beta_{\tau+1}} \cdot\cdot x_{\beta_{n-\varkappa}}) & (h = 1 \,..\, \nu) \\ x_{\beta_l} = \psi_l\,(x_{\beta_{\tau+1}} \cdot\cdot x_{\beta_{n-\varkappa}}) & (l = 1 \,..\, \tau) \\ F_s + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial f_s} F_{\alpha_1} + \cdot\cdot + \dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial f_s} F_{\alpha_\nu} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial f_s} = 0 & (s = \alpha_{\nu+1} \,..\, \alpha_{\lambda-1}) \\ \quad \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_t} F_{\alpha_1} + \cdot\cdot + \dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_t} F_{\alpha_\nu} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_t} = 0 & (t = \beta_{\tau+1} \,..\, \beta_{n-\varkappa}), \end{cases}$$

oder es entsteht aus einem Gleichungensystem der Form (17) oder (18) durch Hinzufügung beliebiger Relationen in f_i, F_i, $x_{\varkappa+1} \,..\, x_n$, die mit den vorhergehenden verträglich sind, und mit ihnen zusammen keine neue Relation in $f_1 \,..\, f_\lambda$, $x_{\varkappa+1} \,..\, x_n$ allein liefern.

Die Funktionen φ und φ_h in (18) sind so zu wählen, dafs im Falle $\nu + \tau + 1 \leqq n - \varkappa$ in der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_t} & \cdot\cdot & \dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_t} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_t} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\| \qquad (t = \beta_{\tau+1},\ \beta_{\tau+2} \,..\, \beta_{n-\varkappa})$$

alle $\nu + 1$-reihigen Determinanten identisch verschwinden.

In den Formeln (17) (18) ist ν eine Zahl der Reihe $1 \,..\, \lambda - 1$; $\alpha_1 \,..\, \alpha_{\lambda-1}$ bedeuten eine Permutation dieser Indices; τ ist eine Zahl der Reihe $0, 1 \,..\, n - \varkappa$, die $\beta_1 \,..\, \beta_{n-\varkappa}$ bedeuten irgend eine Anordnung der Zahlen $\varkappa + 1 \,..\, n$; im Falle $\tau = 0$ fällt in dem Formelsysteme (18) die dritte Zeile fort; endlich sind φ, φ_h, ψ_l arbiträre Funktionen.

188. Aus den in Art. 186 und 187 ausgesprochenen Sätzen ergiebt sich ohne weiteres folgendes Korollar:

Es seien $x_1 x_2 \,..\, x_n$ irgend n unabhängige Veränderliche, und 2λ eine Zahl $< n$, ferner

$$(19)\qquad \Phi_i(x_1 x_2 \,..\, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \,..\, \lambda)$$

ein beliebiges λ-gliedriges Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung

$$x_{\lambda+1}\, dx_1 + x_{\lambda+2}\, dx_2 + \cdot\cdot + x_{2\lambda}\, dx_\lambda = 0,$$

so können die Relationen (19) stets auf eine Form gebracht werden, in der sie nur von den Variabeln $x_1 x_2 \,..\, x_{2\lambda}$, nicht aber von $x_{2\lambda+1} \,..\, x_n$ abhängen.

Bilden ferner die Gleichungen (19) ein λ-gliedriges Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung

$$dx_\lambda + x_{\lambda+1}dx_1 + \cdots + x_{2\lambda-1}dx_{\lambda-1} = 0 \quad (2\lambda - 1 < n)$$

so können sie eine Form erhalten, in der sie nur von $x_1 x_2 \ldots x_{2\lambda-1}$, nicht aber von $x_{2\lambda} \ldots x_n$ abhängen.

189. Aus den Ergebnissen der Artikel 186 und 187 heben wir noch das folgende heraus: „*Jede Pfaff'sche Gleichung vom Range* 2λ *läfst sich durch* λ *Relationen in* $x_1 x_2 \ldots x_n$ *befriedigen.*" Unter den λ-gliedrigen Integraläquivalenten der Pfaff'schen Gleichung $\Delta = 0$ erwähnen wir noch besonders diejenigen, die aus λ Relationen in $f_1 f_2 \ldots f_\lambda$ allein bestehen, also die Form

$$f_1 = c_1,\ f_2 = c_2 \ \ldots\ f_\lambda = c_\lambda \tag{20}$$

besitzen, worin die c_i Konstante bedeuten. Die Relationen (20) bezeichnen wir als „*vollständiges*" Integraläquivalent oder als ein „vollständiges Integral" der Pfaff'schen Gleichung (1), wenn unter den c_i *arbiträre* Konstante verstanden werden.

Stellen die Relationen (20) für jedes beliebige Wertsystem der Konstanten c_i ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung $\Delta = 0$ dar, so mufs Δ augenscheinlich in der Form

$$\sum_1^\lambda {}_i\, \varrho_i(x_1 \ldots x_n)\, df_i$$

geschrieben werden können, also ist der Rang der Gleichung $\Delta = 0$ sicher nicht gröfser als 2λ (Art. 119, 3)).

190. Wir behandeln nunmehr die Frage, ob sich jedes Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung (1) in der Form (13) oder (14) beziehungsweise (17) oder (18) darstellen läfst.

Sollen die Gleichungen

$$\Phi_i(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots) \tag{21}$$

ein Integraläquivalent der Gleichung (1) darstellen, so müssen wir nach einer Bemerkung des Art. 82 die Existenz einer Stelle $x_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0$ voraussetzen, an der sowohl sämtliche Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ unserer Pfaff'schen Gleichung, als auch das Gleichungensystem (21) im Sinne von Art. 40 regulär sind. Wir setzen jetzt überdies voraus, dafs an der genannten Stelle nicht sämtliche $\varkappa$-reihigen Determinanten der zu Δ gehörigen Matrix

$$\text{(A)} \quad \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|$$

und auch nicht alle Koeffizienten a_ι verschwinden. Dann dürfen wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, dafs an der Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ im Falle $\varkappa = 2\lambda$ die Pfaff'schen Aggregate

$$P = (1, 2, \,..\, 2\lambda); \; \Pi_{2\lambda, 0} = (1, 2, \,..\, 2\lambda - 1, 0)$$

und im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ die Pfaff'schen Aggregate

$$P' = (1, 2, \,..\, 2\lambda - 2); \; Q = (0, 1, \,..\, 2\lambda - 1)$$

von Null verschieden sind, und es läfst sich jetzt nach Art. 167 immer eine Normalform von $\varDelta$ zu Grunde legen, derart, dafs die $\varkappa$ in ihr auftretenden Funktionen F_ι, f_ι an der Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ regulär sind, und dafs ihre nach $x_1 \,..\, x_\varkappa$ genommene Funktionaldeterminante daselbst nicht verschwindet. Betrachten wir, um die Ideen zu fixiren, den Fall $\varkappa = 2\lambda$. Mittels der Formeln

$$f_i = f_\iota(x_1 x_2 \,..\, x_n); \; F_\iota = F_i(x_1 \,..\, x_n)$$

kann man dann statt $x_1 \,..\, x_{2\lambda}$ die neuen Independenten $f_1 \,..\, f_\lambda F_1 \,..\, F_\lambda$ in das Gleichungensystem (21) einführen; dieses erhält so die Form (12), und zwar sind diese Gleichungen an der Stelle

$$(22) \qquad f_1^0 \,..\, f_\lambda^0, \; F_1^0 \,..\, F_\lambda^0, \; x_{\varkappa+1}^0 \,..\, x_n^0$$

regulär, wenn wir mit f_i^0, F_i^0 die konstanten Werte bezeichnen, die die Funktionen f_i bezw. F_i an der Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ annehmen (Art. 45). Das Gleichungensystem (21) kann sonach auf die Form (13) oder (14) gebracht werden.

Ist umgekehrt ein Gleichungensystem (13) oder (14) an der Stelle (22) im Sinne von Art. 40 regulär, so verwandelt es sich, wenn die F_i, f_i durch die betreffenden Funktionen der x_k ersetzt werden, in ein Gleichungensystem mit den Variabeln $x_1 \,..\, x_n$, das an der Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ regulär ist (Art. 82), und die Pfaff'sche Gleichung $\varDelta = 0$ erfüllt.

Es ist leicht zu sehen, wie man über die willkürlichen Funktionen φ_h, φ_l verfügen mufs, damit ein Relationensystem (13) oder (14) an der Stelle (22) regulär sei. Um dies z. B. für das System (13) zu erreichen, braucht man nur die Funktionen

$$\varphi_h(f_{\alpha_\nu+1} f_{\alpha_\nu+2} \,..\, f_{\alpha_\lambda})$$

so zu wählen, dafs sie an der Stelle $f_{\alpha_\nu+1}^0 \,..\, f_{\alpha_\lambda}^0$ regulär sind, daselbst bezw. die Werte $f_{\alpha_h}^0$ annehmen, und dafs ihre ersten Ableitungen an der genannten Stelle den Bedingungen

$$F_l^0 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial f_l}\right)_0 \cdot F_{\alpha_1}^0 + \cdot\cdot + \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial f_l}\right)_0 F_{\alpha_\nu}^0 = 0 \quad (l = \alpha_{\nu+1} \,..\, \alpha_\lambda)$$

genügen.

Da ganz analoge Betrachtungen auch unter der Annahme $\varkappa = 2\lambda - 1$ angestellt werden können, so folgt der Satz:

Befriedigt das Gleichungensystem:

$$\Phi_i(x_1 \,.\,.\, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2 \,.\,.) \tag{21}$$

die Pfaff'sche Gleichung $\varDelta = 0$ *und existirt eine Stelle* $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$, *an der dieses Gleichungensystem sowie sämtliche Koeffizienten* a_i *regulär sind, ohne dafs alle* $\varkappa$*-reihigen Determinanten der Matrix* (A) *oder alle* a_i *daselbst verschwinden, so läfst sich das Gleichungensystem* (21) *durch Einführung neuer Variabelen auf die Form* (13) *oder* (14) *beziehungsweise* (17) *oder* (18) *bringen.*

Aufser den Integraläquivalenten, die mit Hülfe einer Normalform von $\varDelta$ *nach den Regeln der Art. 186 und 187 bestimmt werden, kann es also nur noch solche geben, vermöge deren entweder sämtliche* $\varkappa$*-reihigen Determinanten der Matrix* (A) *oder alle Koeffizienten* $a_1 \,.\,.\, a_n$ *verschwinden.* Der letztere Fall ist unter der Annahme $\varkappa = 2\lambda - 1$ als Spezialfall in dem ersteren enthalten und braucht also nur bei geradem $\varkappa$ besonders erwähnt zu werden.

Jedes Integraläquivalent, welches einer der beiden zuletzt genannten Kategorien angehört, werde als „*singulär*" bezeichnet.

Die nichtsingulären Integraläquivalente einer Pfaff'schen Gleichung $\varDelta = 0$ können somit alle nach der Methode der Art. 186 und 187 gefunden werden; doch darf man nicht erwarten, dafs *eine und dieselbe Normalform* von $\varDelta$ ausreicht, um *alle* nichtsingulären Integraläquivalente zu ermitteln. Vielmehr liefert eine bestimmte Normalform von $\varDelta$, die den Bedingungen des Art. 167 genügt, im Allgemeinen nur die Gesamtheit derjenigen Integraläquivalente, die an einer gewissen Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ im Sinne von Art. 40 regulär sind.

191. Um alle *singulären* Integraläquivalente der Pfaff'schen Gleichung $\varDelta = 0$ zu finden, hat man bei geradem $\varkappa$ zunächst zu untersuchen, ob das Relationensystem

$$a_1 = 0,\; a_2 = 0,\; \ldots\; a_n = 0$$

im Sinne von Art. 40 ein r-gliedriges ($r < n$) Gleichungensystem darstellt, oder wenigstens, ob es durch passende Umformungen in ein solches verwandelt werden kann.

Sodann bestimme man alle Gleichungensysteme, die den Bedingungen des Art. 40 genügen, und vermöge deren alle $\varkappa$-reihigen Determinanten der Matrix (A) null sind. Es sei (21) ein s-gliedriges Gleichungensystem dieser Art, und es existire eine Stelle, an der dieses System und alle a_i regulär sind. Drückt man jetzt mit Hülfe von (21) s von den Gröfsen x_ι als Funktionen der $n-s$ übrigen aus und substituirt die erhaltenen Werte in $\varDelta$, so entsteht ein Pfaff'scher Ausdruck $\varDelta'$ mit $n-s$ Variabeln. Verschwinden alle Koeffizienten von $\varDelta'$ identisch, so ist (21) ein Integraläquivalent, und man erhält weitere Integraläquivalente durch Hinzufügung beliebiger, mit den vorigen verträglicher Relationen in den x_ι. Andernfalls suche man das allgemeinste Relationensystem, das $\varDelta' = 0$ befriedigt, und füge es zu den Gleichungen (21) hinzu. Es ist dabei zu bemerken, dafs die Gleichung $\varDelta' = 0$ selbst wiederum singuläre Integrale besitzen kann.

Eine gegebene Pfaff'sche Gleichung braucht nicht notwendig singuläre Integraläquivalente zu besitzen, d. h. es braucht nicht notwendig ein Gleichungensystem (21) von der Beschaffenheit zu geben, dafs das Gleichungensystem selbst und alle a_i an einer gewissen Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$ regulär sind, und dafs vermöge (21) alle $\varkappa$-reihigen Determinanten von (A) oder alle a_ι verschwinden. Wählt man beispielsweise unter der Annahme eines geraden n die Funktionen $a_2 a_3 \ldots a_n$ ganz beliebig, so läfst sich, wie man leicht erkennt, durch Integration einer nicht homogenen, linearen partiellen Differentialgleichung mit den Independenten $x_1 \ldots x_n$ und der unbekannten Funktion a_1 diese letztere so bestimmen, dafs das Pfaff'sche Aggregat

$$(1, 2, \ldots n)$$

den Wert 1 erhält. Hat man noch etwa $a_2 \equiv 1$ gewählt, so besitzt die Pfaff'sche Gleichung $\varDelta = 0$ keine singulären Integrale.

Ist die Klasse $\varkappa$ eines Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$ gleich 2λ oder gleich $2\lambda - 1$, d. h. *ist 2λ der Rang der Pfaff'schen Gleichung* (1), *so ist jedes Integraläquivalent, das weniger als λ Gleichungen enthält, notwendig singulär.*

Es kann vorkommen, dafs ein bedingungsloser Ausdruck $\varDelta$ in n Variabeln durch eine *einzige* Relation zwischen den x_i annullirt wird; diese Relation ist dann notwendig ein singuläres Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung $\varDelta = 0$. So wird die Gleichung (1) z. B. durch die Relation $x_1 = 0$ befriedigt, wenn die Koeffizienten $a_2, a_3, \ldots a_n$ die folgende Form haben

$$x_1 b_2(x_1 x_2 \ldots x_n), \ \ldots \ x_1 b_n(x_1 \ldots x_n)$$

und wenn die Funktionen $a_1, b_2, \ldots b_n$ an einer gewissen Stelle $0, x_2^0 \ldots x_n^0$ alle regulär sind.

192. Im Falle $\varkappa = 2\lambda$ haben wir noch diejenigen Gleichungensysteme zu betrachten, die sämtliche Relationen der Form

$$F_1 = 0, \ F_2 = 0, \ \ldots \ F_\lambda = 0 \tag{22}$$

enthalten. Es ist aber leicht zu sehen, daſs diese Relationen im allgemeinen kein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung $\varDelta = 0$ liefern. Zunächst nämlich braucht es überhaupt kein Wertsystem $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ zu geben, für welches alle F_ι verschwinden; man denke z. B. an die Annahme $F_1 \equiv e^{x_1}$. Nehmen wir aber an, es gebe ein solches Wertsystem, und es lasse sich das Gleichungensystem (22) auf eine Form bringen, in der es an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ im Sinne von Art. 40 regulär ist, dann giebt es notwendig $\infty^{n-\lambda}$ Wertsysteme von derselben Beschaffenheit. Wären nun alle Funktionen $a_1, a_2, \,.\,.\, a_n, f_1 \,.\,.\, f_\lambda$ an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ regulär, so würde aus den Identitäten

$$(23) \qquad a_i \equiv F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_\iota} + \cdots + F_\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \qquad (i = 1 \,.\,.\, n)$$

folgen, daſs alle Funktionen a_i an den $\infty^{n-\lambda}$ Nullstellen der Funktionen $F_1 \,.\,.\, F_\lambda$ gleichfalls verschwinden, und die Gleichungen (22) bilden sonach ein singuläres Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung (1), das andrerseits auch ohne jede Integration in der Form $a_1 = 0 \,.\,.\, a_n = 0$ erhalten wird. Es ist aber klar, daſs n Funktionen a_ι nur unter besondern Voraussetzungen $\infty^{n-\lambda}$ gemeinsame Nullstellen haben können, daſs also im allgemeinen entweder die Relationen (22) kein λ-gliedriges Gleichungensystem im Sinne von Art. 40 darstellen, oder aber, falls dies dennoch der Fall sein sollte, daſs dann an einer Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$, an der das Gleichungensystem (22) und alle a_i regulär sind, nicht auch sämtliche Funktionen $f_1 \,.\,.\, f_\lambda$ der Normalform regulär sein werden; dann aber läſst sich aus den Identitäten (23) nicht mehr schlieſsen, daſs die Relationen (22) die Pfaff'sche Gleichung $\varDelta = 0$ befriedigen.

Ist $\varkappa = 2$, so führt diese Erörterung zu der aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannten Thatsache, daſs eine Differentialgleichung

$$M(xy)\,dx + N(xy)\,dy = 0,$$

deren linke Seite mittels der allgemeinen Integralgleichung $\omega = c$ in der Form

$$Mdx + Ndy \equiv \varrho(xy)\,d\omega(xy)$$

dargestellt wird, durch die Relation $\varrho = 0$ im Allgemeinen nicht erfüllt wird.

Analoge Bemerkungen gelten übrigens auch für alle diejenigen Integraläquivalente (13), (14) bezw. (17), (18), an denen eine oder mehrere Relationen der Form $F_i = 0$ beteiligt sind.

Kapitel VIII.

Berührungstransformationen und äquivalente Normalformen.

§ 1. Berührungstransformationen.[1])

193. Die Pfaff'sche Gleichung

$$(1) \qquad dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \cdots - p_m dx_m = 0$$

mit den $2m + 1$ unabhängigen Veränderlichen

$$(2) \qquad z, x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m$$

liegt bereits in reduzirter Form vor; ihr Rang ist gleich $2m + 2$. Nach Kap. IV besitzt die Gleichung (1) unbegrenzt viele andere reduzirte Formen mit $m + 1$ Differentialelementen. Es sei

$$(3) \qquad dZ - P_1 dX_1 - P_2 dX_2 - \cdots - P_m dX_m = 0$$

eine solche Form. Dann wissen wir aus Art. 118, dafs die Funktionen Z, X_i, P_i hinsichtlich der $2m + 1$ Variabeln (2) von einander unabhängig sind, dafs sich also die Formeln

$$(4) \qquad \begin{cases} z' = Z(z, x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m) \\ x_i' = X_i(z, x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m) & (i = 1 \ldots m) \\ p_i' = P_i(z, x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m) & (i = 1 \ldots m) \end{cases}$$

folgendermafsen auflösen lassen:

$$(5) \qquad \begin{cases} z = \overline{Z}(z', x_1' \ldots x_m', p_1' \ldots p_m') \\ x_i = \overline{X}_i(z', x_1' \ldots x_m', p_1' \ldots p_m') & (i = 1 \cdot m) \\ p_i = \overline{P}_i(z', x_1' \ldots x_m', p_1' \ldots p_m') & (i = 1 \ldots m). \end{cases}$$

Die Gleichungen (4) definiren sonach eine Transformation der $2m + 1$ Variabeln (2), vermöge deren sich die Pfaff'sche Gleichung (1) in eine Gleichung derselben Form

$$dz' - p_1' dx_1' - \cdots - p_m' dx_m' = 0$$

verwandelt, d. h. es existirt eine nicht identisch verschwindende Funktion

$$\sigma(z, x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m)$$

von der Eigenschaft, dafs vermöge (4) folgende Identität besteht

$$(6) \quad dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m \equiv \sigma(dz' - p_1' dx_1' - \cdots - p_m' dx_m')$$

---

1) Lie II, 1. Abteilung.

dafs also die Koeffizienten der Differentiale dz, dx_i, dp_i beiderseits gleich werden, wenn man die $z' x_i' p_i'$ durch ihre Ausdrücke (4) ersetzt.

Wir wollen nun zeigen, dafs sich die allgemeinste Transformation (4) dieser Eigenschaft ohne Integration bestimmen läfst, m. a. W. dafs man die allgemeinste reduzirte Form (3) der Pfaff'schen Gleichung (1) durch blofse Differentiationen und Eliminationen ermitteln kann.

Zu diesem Zwecke schreiben wir $-q_i'$ statt $\sigma p_i'$ und $-Q_i$ statt σP_i, und betrachten die Pfaff'sche Gleichung

$$(7)\quad dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m - \sigma dz' - q_1' dx_1' - \cdots - q_m' dx_m' = 0$$

worin die $4m+3$ Gröfsen

$$(8)\qquad z, x_1 \,.\,.\, x_m,\; z', x_1' \,.\,.\, x_m',\; \sigma, p_1 \,.\,.\, p_m,\; q_1' \,.\,.\, q_m'$$

für den Augenblick als ebensoviele unabhängige Veränderliche betrachtet werden sollen. Damit nun vermöge der Transformation (4) die Identität (6) bestehe, mufs das Relationensystem

$$(9)\qquad \begin{cases} z' = Z(z, x_1 \,.\,.\, p_m);\; x_i' = X_i(z, x_1 \,.\,.\, p_m) \quad (i = 1 \,.\,.\, m) \\ \sigma = \sigma(z, x_1 \,.\,.\, p_m);\; q_i' = Q_i(z, x_1 \,.\,.\, p_m) \quad (i = 1 \,.\,.\, m) \end{cases}$$

ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung (7) bilden. Umgekehrt, ist letzteres der Fall, und kann man das System (9) nach $z, x_1 \,.\,.\, p_m, \sigma$ auflösen, verschwindet ferner die Funktion $\sigma(z, x_1 \,.\,.\, p_m)$ nicht identisch, so liefern die Relationen (4), wenn darin $-P_i \equiv \frac{1}{\sigma} Q_i$ gesetzt wird, eine Transformation der gewünschten Beschaffenheit.

Es entsteht demnach die Aufgabe, das allgemeinste Relationnesystem zwischen den $4m+3$ Variabeln (8) zu bestimmen, welches

1) aus $2m+2$ Gleichungen besteht und die Pfaff'sche Gleichung (7) erfüllt;

2) ebensowohl nach den Gröfsen

$$z', x_1' \,.\,.\, x_m',\; q_1' \,.\,.\, q_m',\; \sigma$$

als auch nach den Gröfsen

$$z, x_1 \,.\,.\, x_m,\; p_1 \,.\,.\, p_m,\; \sigma$$

auflösbar ist;

3) die Relation $\sigma = 0$ nicht zur Folge hat.

194. Das allgemeinste $2m+2$-gliedrige Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung (7) entsteht nach Art. 174, indem man zu $q+1$ Relationen der Form

$$(10)\qquad \Omega_i(z, x_1 \,.\,.\, x_m;\; z', x_1' \,.\,.\, x_m') = 0 \quad (i = 1, 2, \,.\,.\, q+1)$$

diejenigen $2m+1-q$ Gleichungen hinzufügt, die sich durch Elimination der λ_λ aus den Relationen

$$(11) \qquad 1 = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \cdots + \lambda_{q+1} \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial z}$$

$$(12) \qquad -\sigma = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z'} + \cdots + \lambda_{q+1} \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial z'}$$

$$(13) \qquad -p_h = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_h} + \cdot + \lambda_{q+1} \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_h} \qquad (h = 1 \, .. \, m)$$

$$(14) \qquad -q_h' = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_h'} + \cdots + \lambda_{q+1} \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_h'} \qquad (h = 1 \, .. \, m)$$

ergeben; die Ω_i sind dabei vorläufig nur der einen Bedingung unterworfen, dafs sich die Gleichungen (10) nach z und nach q von den Variabeln $x_1 \, .. \, x_m, z', x_1' \, .. \, x_m'$ auflösen lassen.

Die obige Bedingung 2) läfst sich jetzt so aussprechen:

Die $2m + q + 3$ Relationen (10) bis (14) sollen ebensowohl nach den Variabeln

$$(15) \qquad z', x_1' \, .. \, x_m', \sigma, q_1' \, .. \, q_m', \lambda_1, \lambda_2, .. \, \lambda_{q+1}$$

als auch nach den Variabeln

$$(16) \qquad z, x_1 \, .. \, x_m, \sigma, p_1 \, .. \, p_m, \lambda_1, \lambda_2, .. \, \lambda_{q+1}$$

auflösbar sein. Setzen wir zur Abkürzung:

$$W \equiv \lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2 + \cdots + \lambda_{q+1} \Omega_{q+1},$$

also z. B.:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} \equiv \sum \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial x_i}; \; \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_k'} \equiv \sum \lambda_s \frac{\partial^2 \Omega_s}{\partial x_i \partial x_k'} \text{ etc.}$$

so schreibt sich das Gleichungensystem (10) bis (14) so:

$$(10) \qquad \Omega_1 = 0, \, .. \, \Omega_{q+1} = 0$$

$$(17) \qquad \frac{\partial W}{\partial z} - 1 = 0, \; \frac{\partial W}{\partial x_h} + p_h = 0 \qquad (h = 1 \, .. \, m)$$

$$(18) \qquad \frac{\partial W}{\partial z'} + \sigma = 0$$

$$(19) \qquad \frac{\partial W}{\partial x_h'} + q_h' = 0$$

und der erste Teil obiger Bedingung kommt darauf hinaus, dafs die Gleichungen (10) (17) für sich genommen nach den Variabeln

$$z', x_1' \, .. \, x_m', \quad \lambda_1 \, .. \, \lambda_{q+1}$$

auflösbar seien, dafs also die nach diesen Gröfsen genommene Funktionaldeterminante ihrer linken Seiten nicht vermöge (10) (17) verschwinde. Die genannte Funktionaldeterminante hat nun die Form:

$$
(20)\qquad
\begin{vmatrix}
\frac{\partial \Omega_1}{\partial z'} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_m'} & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial z'} & \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_m'} & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial z'} & \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x_m'} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial z} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial^2 W}{\partial x_m \partial z'} & \frac{\partial^2 W}{\partial x_m \partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial x_m \partial x_m'} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_m}
\end{vmatrix};
$$

sie ist demnach eine ganzrationale homogene Funktion $\Phi(\lambda_1 \ldots \lambda_{q+1})$ vom Grade $m - q$ in den Variabeln $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{q+1}$; die Koeffizienten von Φ sind gewisse Funktionen der Veränderlichen $z' x_1' \ldots x_m' z x_1 \ldots x_m$.

Die Gleichungen (10) bis (14) sind also dann und nur dann hinsichtlich der $2m + q + 3$ Variabeln (15) auflösbar, wenn der Ausdruck $\Phi(\lambda_1 \ldots \lambda_{q+1})$ vermöge des genannten Gleichungensystems nicht null ist. Da nun Φ die Variabeln p_i, q_i', σ gar nicht enthält, so ist die eben genannte Bedingung damit äquivalent, daſs Φ vermöge der Gleichungen (10) (11) nicht verschwinde.

Dazu ist nun nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, daſs vermöge der Gleichungen (10) *nicht alle Koeffizienten von den in Φ auftretenden Potenzen und Potenzprodukten der λ_i null sind.*

Um dies zu zeigen, haben wir offenbar nur nachzuweisen, daſs die ganzrationale Funktion Φ, falls sie infolge der Gleichungen (10) (11) verschwindet, schon auf Grund der Gleichungen (10) allein identisch null ist, d. h. lauter vermöge (10) verschwindende Koeffizienten besitzt.

Es sei $\bar{z}\bar{x}_i$, $\bar{z}'\bar{x}_i'$ ein Wertsystem, das die Gleichungen (10) erfüllt, und für welches die Ableitungen $\frac{\partial \Omega_i}{\partial z}$ bezw. in die nicht sämtlich verschwindenden Konstanten α_i, ferner die Funktion $\Phi(\lambda_1 \ldots \lambda_{q+1})$ in $\overline{\Phi}(\lambda_1 \ldots \lambda_{q+1})$ übergehen möge; $\overline{\Phi}$ ist also eine ganzrationale homogene Funktion der λ_i vom Grade $m - q$ und mit konstanten Koeffizienten. Der Voraussetzung nach verschwindet $\overline{\Phi}$ für jedes Wertsystem $\lambda_1 \ldots \lambda_{q+1}$, das die Relation

$$(21)\qquad \alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_{q+1} \lambda_{q+1} = 1$$

erfüllt. Ist dann $\lambda_1^0 \ldots \lambda_{q+1}^0$ ein Wertsystem, das die Relation

$$(22)\qquad \alpha_1 \lambda_1^0 + \cdots + \alpha_{q+1} \lambda_{q+1}^0 = 0$$

nicht befriedigt, so kann man eine nicht verschwindende Konstante μ

derart bestimmen, dafs die $q+1$ Gröfsen $\lambda_i = \mu\lambda_i^0$ der Gleichung (21) genügen; dann ist aber der Voraussetzung nach

$$\overline{\Phi}(\lambda_1 \,.\,.\, \lambda_{q+1}) \equiv 0 \equiv \mu^{m-q}\,\overline{\Phi}(\lambda_1^0 \,.\,.\, \lambda_{q+1}^0)$$

d. h. es ist $\overline{\Phi}(\lambda_1^0 \,.\,.) = 0$, mit andern Worten: die Funktion $\overline{\Phi}$ verschwindet auch für jedes Wertsystem $\lambda_1^0 \,.\,.\, \lambda_{q+1}^0$, das die Gleichung (22) nicht befriedigt, ist also überhaupt identisch null, was zu zeigen war.

Aus der Thatsache, dafs die Determinante Φ hinsichtlich der beiden Variabelngruppen $z x_1 \,.\,.\, x_m$ und $z' \,.\,.\, x_m'$ vollkommen symmetrisch ist, oder auch durch direkte Überlegung folgt nunmehr sofort, dafs das Gleichungensystem (10) bis (14) auch nach den Gröfsen (16) aufgelöst werden kann, falls für Φ obige Bedingung erfüllt ist. Den Ausdruck für σ erhält man aus (12), wenn auf der rechten Seite dieser Gleichung die Gröfsen λ_i, z, x_k durch ihre aus (10) (11) (14) folgenden Ausdrücke in $z' x_i' q_i'$ ersetzt werden, und es ist klar, dafs die so erhaltene Funktion σ nicht identisch verschwinden kann.

Andernfalls hätte man nämlich wegen (7) eine Identität der Form:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m \equiv q_1' dx_1' + \cdots + q_m' dx_m'$$

worin die $q_i' x_i'$ die durch das System (10)—(14) definirten Funktionen der Variabeln $z x_1 \,.\,.\, p_m$ bedeuten; eine solche Identität aber ist unmöglich, da nach Art. 119 ein bedingungsloser Pfaff'scher Ausdruck in $2m+1$ Variabeln nicht auf eine Form mit weniger als $m+1$ Differentialelementen gebracht werden kann.

Die Bedingung, die wir oben der Funktion $\Phi(\lambda_1 \,.\,.\, \lambda_{q+1})$ auferlegten, hat u. a. zur Folge, dafs in keiner der beiden Funktionalmatrices

$$(23)\qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial z} & \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_m} \end{matrix} \right\| ; \quad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial z'} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1'} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_m'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial z'} & \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_1'} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_m'} \end{matrix} \right\|$$

alle $q+1$-reihigen Determinanten vermöge (10) verschwinden können; andernfalls wäre nämlich die Determinante (20) offenbar vermöge (10) identisch null. Ferner können in keiner der beiden Matrices (23) alle Elemente derselben Spalte vermöge (10) null sein; dies folgt unmittelbar aus dem System (11)—(14), wenn man bedenkt, dafs keine der Relationen $\sigma = 0$, $p_i = 0$, $q_i' = 0$ eine Folge dieses Systems sein kann. Man schliefst hieraus leicht, dafs die Relationen (10) einerseits nach z und nach q von den Variabeln x_i, andererseits auch nach z' und nach q von den Variabeln x_i' auflösbar sein müssen. Ferner erkennt man, dafs diese Gleichungen auch nach x_k und nach q von den Variabeln $z, x_1 \ldots x_m$, und ebenso nach x_k' und nach q von den Variabeln $z', x_1' \ldots x_m'$ auflösbar sind, wo k einen beliebig gewählten Index der Reihe $1 \ldots m$ bedeutet.

Dies sind indes nur notwendige, nicht aber hinreichende Bedingungen dafür, dafs Φ vermöge (10) nicht identisch null sei; sie können z. B. alle erfüllt sein, wenn die Ω_i ganze, lineare Funktionen der $2m+2$ Variabeln $z, x_1 \ldots x_m, z', x_1' \ldots x_m'$ bedeuten, während in diesem Fall die Funktion Φ für $q < m$ stets verschwindet.

195. Indem wir alle bisherigen Resultate zusammenfassen, und die Bezeichnungsweise modifiziren, erhalten wir das folgende fundamentale Theorem:

„*Die allgemeinste Transformation*

$$(4)\qquad \begin{aligned} z' &= Z(z, x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m) \\ x_i' &= X_i(z, x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m) \qquad (i = 1 \ldots m) \\ p_i' &= P_i(z, x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m) \qquad (i = 1 \ldots m), \end{aligned}$$

vermöge deren für jedes beliebige Wertsystem der Variabeln $z, x_1 \ldots p_m$ und ihrer Differentiale eine Identität der Form

$$(24)\quad dz' - p_1'dx_1' - \cdots - p_m'dx_m' \equiv \varrho(z, x_1 \ldots p_m)(dz - p_1dx_1 - \ldots - p_mdx_m)$$

stattfindet, wird folgendermafsen erhalten:

Man wähle eine Zahl q der Reihe $0, 1 \ldots m$ und $q+1$ beliebige Gleichungen der Form

$$(10)\qquad \Omega_i(z, x_1 \ldots x_m, z', x_1' \ldots x_m') = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots q+1),$$

füge diejenigen $2m - q$ Relationen hinzu, welche aus den Gleichungen

$$(25)\qquad -p_h = \frac{\sum_1^{q+1} {}_s \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial x_h}}{\sum_1^{q+1} {}_s \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial z}}; \quad -p_h' = \frac{\sum_1^{q+1} {}_s \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial x_h'}}{\sum_1^{q+1} {}_s \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial z'}} \qquad (h = 1 \ldots m)$$

hervorgehen, indem man daraus die Verhältnisse der λ_i eliminirt, und löse das so gewonnene $2m+1$-gliedrige Gleichungensystem nach den Variabeln $z', x_1' \ldots p_m'$ in der Form (4) *auf. Damit diese Auflösung möglich sei, haben die Ω_i nur der einen Bedingung zu genügen, dafs nicht sämtliche Koeffizienten einer gewissen ganz-rationalen homogenen Funktion $\Phi(\lambda_1 \ldots \lambda_{q+1})$ vom Grade $m-q$ in den Variabeln λ_i vermöge der Gleichungen $\Omega_i = 0$ null sind, und das Formelnsystem* (4) *ist dann auch nach $z, x_1 \ldots p_m$ auflösbar, stellt also wirklich eine Transformation dieser $2m+1$ Variabeln dar.*

Sind die Funktionen Z, X_i, P_i bestimmt, so ergiebt sich die in der Identität (24) auftretende Funktion ϱ aus der Gleichung

$$\varrho \equiv \frac{\partial Z}{\partial z} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial z} - \cdot\cdot - P_m \frac{\partial X_m}{\partial z}.$$

Eine Transformation der Form (4), vermöge deren eine Identität (24) besteht, heifst eine „*Berührungstransformation*“ der $2m + 1$ Variabeln

$$z, x_1 \,.\,.\, x_m, p_1 \,.\,.\, p_m,$$

oder auch „eine Berührungstransformation des Raums $R_{m+1}(z, x_1 \,.\,.\, x_m)$“. Aus Art. 118 folgt ohne weiteres:

„*Besteht vermöge der Formeln* (4) *eine Identität der Form* (24), *in der die Funktion* ϱ *nicht identisch verschwindet*, *so sind die Funktionen* Z, X_i, P_i *von einander unabhängig, also definiren die Gleichungen* (4) *eine Berührungstransformation der* $2m + 1$ *Variabeln* $z \,.\,.\, p_m$.“

196. Aus der Definition der Berührungstransformationen folgt sofort:

Ist die Variabelntransformation (4) *eine Berührungstransformation, so ist auch die dazu inverse Transformation* (5) *eine Berührungstransformation.*

Es mögen ferner die Gleichungen

$$(26)\quad z'' = Z'(z', x_1' \,.\,.\, p_m');\ x_i'' = X_i'(z' \,.\,.\, p_m');\ p_i'' = P_i'(z' \,.\,.\, p_m')$$

eine beliebige Berührungstransformation der $2m + 1$ Variabeln $z' \,.\,.\, p_m'$ definiren.

Durch Elimination dieser Gröfsen aus (4) und (26) erhalte man die Formeln

$$(27)\qquad z'' = \zeta(z, x_1 \,.\,.\, p_m);\ x_i'' = \xi_i(z, \,.\,.\, p_m);\ p_i'' = \pi_i(z, \,.\,.\, p_m).$$

Vermöge der Formeln (26) besteht nun der Voraussetzung nach eine Identität der Form

$$(28)\ dz'' - p_1'' dx_1'' - \cdot\cdot - p_m'' dx_m'' \equiv \varrho'(z' \cdot\cdot p_m')(dz' - p_1' dx_1' - \cdot\cdot - p_m' dx_m').$$

Indem man die Variabeln $z' x_i' p_i'$ durch ihre Ausdrücke (4) ersetzt, verwandle sich das Produkt $\varrho\varrho'$ in die Funktion $\sigma(z, \,.\,.\, p_m)$; aus der Vergleichung der Identitäten (24) (28) folgt jetzt sofort, dafs vermöge der Formeln (27) die Identität:

$$dz'' - p_1'' dx_1'' - \cdot\cdot - p_m'' dx_m'' \equiv \sigma(z, x_1 \cdot\cdot p_m)(dz - p_1 dx_1 - \cdot\cdot - p_m dx_m)$$

besteht, dafs also die Formeln (27) ebenfalls eine Berührungstransformation definiren. Dieser Thatsache geben wir dadurch Ausdruck, dafs wir sagen:

„Zwei Berührungstransformationen des $R_{m+1}(z_1 \,..\, x_m)$ liefern, hintereinander ausgeübt, wieder eine Berührungstransformation des R_{m+1}."

197. Deuten wir die $2m+1$ Variabeln $zx_1 \,..\, p_m$ wie in Art. 176 als Elementkoordinaten des R_{m+1}, so können wir das Wertsystem $z'x_1' \,..\, p_m'$, welches die Berührungstransformation (4) dem Flächenelement

$$z, x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m$$

zuordnet, entweder gleichfalls als Koordinaten eines Flächenelements des R_{m+1}, oder aber als Elementkoordinaten in einem andern Raum $R_{m+1}'(z'x_1' \,..\, x_m')$ deuten. Indem wir der letzteren Auffassungsweise den Vorzug geben, erkennen wir aus der Identität (24) unmittelbar, dafs jede Berührungstransformation (4) irgend zwei benachbarte, vereinigt liegende Flächenelemente des R_{m+1} wiederum in zwei benachbarte, vereinigt liegende Flächenelemente des R_{m+1}' überführt, und dafs auch umgekehrt diese Eigenschaft für die Berührungstransformationen charakteristisch ist.

Ferner ergiebt sich ohne weiteres, dafs jedes s-gliedrige Gleichungensystem

$$\Phi_i(z, x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \,..\, s)$$

welches die Pfaff'sche Gleichung

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m = 0$$

befriedigt, vermöge (4) in ein s-gliedriges Gleichungensystem

$$\Phi_i'(z', x_1' \,..\, x_m', p_1' \,..\, p_m') = 0 \qquad (i = 1 \,..\, s)$$

übergeführt wird, welches die Pfaff'sche Gleichung

$$dz' - p_1' dx_1' - \cdots - p_m' dx_m' = 0$$

erfüllt, m. a. W.: dafs jede Element-M_ν des R_{m+1} vermöge (4) in eine Element-M_ν des R_{m+1}', insbesondere also jede Element-M_m des R_{m+1} in eine Element-M_m des R_{m+1}' übergeführt wird.

Anm. Man zeigt auch umgekehrt leicht[1]), dafs eine Transformation (4), die jede Element-M_m wieder in eine solche verwandelt, eine Berührungstransformation ist, dafs also die eben genannte Eigenschaft für die Berührungstransformationen charakteristisch ist.

Insbesondere folgt aus der Betrachtung der Gleichungen (10) (25) leicht die folgende Thatsache:

Vermöge der Berührungstransformation (4), die durch Elimination der λ_i aus (10) (25) erhalten wird, verwandelt sich die Element-M_m, deren Flächenelemente alle denselben Punkt $zx_1 \,..\, x_m$ enthalten, in eine

1) Lie II p. 58.

Element-M_m des Raums R'_{m+1}, die sich an eine gewisse $m-q$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit μ'_{m-q} anschliefst; diese μ'_{m-q} wird definirt durch die Gleichungen (10), wenn darin $zx_1 \,..\, x_m$ als Konstante betrachtet werden. Ebenso geht vermöge (4) jede Element-M_m des R'_{m+1}, deren Flächenelemente alle denselben Raumpunkt $z'x' \,..\, x'_m$ enthalten, in eine Element-M_m des R_{m+1} über, deren zugehörige Punktmannigfaltigkeit $m-q$-fach ausgedehnt ist und durch (10) dargestellt wird, wenn $z' \,..\, x'_m$ als Konstante gelten. Wir wollen diesen Sachverhalt kurz so ausdrücken:

Die Berührungstransformation (4) verwandelt den Punkt $zx_1 \,..\, x_m$ in die durch (10) definirte Punkt-μ_{m-q} des R'_{m+1}, und umgekehrt den Raumpunkt $z'x_1' \,..\, x'_m$ des R'_{m+1} in die durch (10) dargestellte μ_{m-q} des Raums R_{m+1}.

Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich für die Bedingung, die wir in Art. 194 der Funktion $\Phi(\lambda_1 \,..\, \lambda_{q+1})$ auferlegten, eine einfache begriffliche Deutung.[1] Offenbar liefern nämlich die Relationen (10) (25) nur dann, aber auch stets dann eine Transformation (4), wenn sich aus ihnen die Variabeln $z'x_1' \,..\, p_m'$, $\lambda_1 \,..\, \lambda_{q+1}$ nicht eliminiren lassen, d. h. wenn aus ihnen keine Relation der Form

$$\Psi(z, x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m) = 0 \tag{29}$$

folgt. Damit also die Gleichungen (10) wirklich zu einer Berührungstransformation (4) Anlafs geben, ist notwendig und hinreichend, dafs die $m+1$-fach unendlich vielen Element-M_m des R_{m+1}, die sich bez. an die $m+1$-fach unendlich vielen, durch (10) dargestellten Punktmannigfaltigkeiten μ_{m-q} des R_{m+1} anschliefsen, nicht alle einer und derselben Relation (29) genügen, m. a. W. *dafs die genannten ∞^{m+1} Elementvereine zusammengenommen sämtliche ∞^{2m+1} Flächenelemente des Raums R_{m+1} umfassen.*

Ist diese Bedingung erfüllt, so genügen auch alle diejenigen Element-M_m des R'_{m+1}, die sich bez. an die durch (10) definirten Punkt-μ_{m-q} des R'_{m+1} anschliefsen, nicht einer und derselben Gleichung

$$\Psi'(z'x_1' \,..\, p'_m) = 0,$$

d. h. die Variabeln $z, x_1 \,..\, x_m, p_1 \,..\, p_m, \lambda_1 \,..\, \lambda_{q+1}$ lassen sich aus (10) (25) nicht eliminiren.

198. Die Berührungstransformationen des R_{m+1} zerfallen nach dem Vorigen in $m+1$ verschiedene Kategorien, je nachdem die Zahl $q+1$ gleich $1, 2, \,..\, m, m+1$ gewählt wird. Eine Transformation der ersten Kategorie verwandelt darnach jeden Punkt $zx_1 \,..\, x_m$ des R_{m+1} in eine im R'_{m+1} gelegene Fläche

$$\Omega(z, x_1 \,..\, x_m, z', x_1' \,..\, x_m) = 0, \tag{30}$$

1) Lie II p. 166f.

präziser ausgedrückt: jedes Flächenelement des R_{m+1}, zu dem der Punkt $z \ldots x_m$ gehört, in ein Flächenelement $z' \ldots p_m'$, das sich an die Fläche (30) anschliefst, und umgekehrt, jeden Punkt $z' \ldots x_m'$ des R_{m+1}' in eine Fläche (30) des Raums R_{m+1}. Die Transformationen (4) der $m+1^{\text{ten}}$ Kategorie entstehen aus einem $m+1$-gliedrigen Gleichungensysteme

$$(31) \qquad \Omega_i(z x_1 \ldots x_m z' x_1' \ldots x_m') = 0 \qquad (i = 1 \ldots m+1).$$

Die Determinante (20) ist jetzt identisch mit dem Produkt der beiden Funktionaldeterminanten

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \, \Omega_2 \ldots \Omega_{m+1} \\ z, \; x_1 \ldots x_m \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \Omega_1 \, \Omega_2 \ldots \Omega_{m+1} \\ z' \; x_1' \ldots x_m' \end{pmatrix}.$$

Also lassen sich die Gleichungen (31) sowohl nach $z x_1 \ldots x_m$ als auch nach $z' \ldots x_m'$ auflösen und definiren also für sich genommen eine Punkttransformation

$$(32) \qquad z' = Z(z x_1 \ldots x_m); \; x_i' = X_i(z, x_1 \ldots x_m) \qquad (i = 1 \ldots m).$$

Die übrigen Gleichungen

$$(33) \qquad p_i' = P_i(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) \qquad (i = 1 \ldots m)$$

unserer Berührungstransformation ergeben sich jetzt, indem man aus den m Relationen

$$-p_i = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_{m+1} \frac{\partial \Omega_{m+1}}{\partial x_i}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \cdots + \lambda_{m+1} \frac{\partial \Omega_{m+1}}{\partial z}} \qquad (i = 1 \ldots m)$$

die m Verhältnisse der λ_i berechnet und die erhaltenen Werte in die Formeln

$$-p_i' = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i'} + \cdots + \lambda_{m+1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i'}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z'} + \cdots + \lambda_{m+1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial z'}} \qquad (i = 1 \ldots m)$$

substituirt, oder auch, indem man aus den linearen Gleichungen:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial z} - \cdots - P_m \frac{\partial X_m}{\partial z} = \varrho$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_i} - \cdots - P_m \frac{\partial X_m}{\partial x_i} = -\varrho p_i \quad (i = 1 \ldots m)$$

die Funktionen ϱ, $P_1 \ldots P_m$ berechnet.

Eine Berührungstransformation der Form (32) (33) heifst eine

„uneigentliche“ Berührungstransformation, oder eine „*erweiterte Punkttransformation*“. Wir sagen dementsprechend: Die Berührungstransformation (32) (33) entsteht aus der Punkttransformation (32) durch „Erweiterung“.

Im Gegensatz hierzu bezeichnet man die Berührungstransformationen aller übrigen m Kategorien als „*eigentliche* Berührungstransformationen“.

199. Im Raume $R_2(x, y)$, d. h. in der Ebene mit den cartesischen Koordinaten x, y giebt es demnach zwei verschiedene Arten von Transformationen

$$y_1 = Y(x, y, y'); \; x_1 = X(x, y, y'); \; y_1' = Y'(x, y, y'),$$

vermöge deren eine Identität der Form

$$dy_1 - y_1' dx_1 \equiv \varrho(x, y, y')\,(dy - y'\,dx)$$

stattfindet. Jede Transformation der ersten Kategorie entsteht, indem man ein Gleichungensystem der Form

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0, \quad -y_1' = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}}{\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}}; \quad -y' = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x}}{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}$$

nach x_1, y_1, y_1' auflöst, verwandelt also jeden Punkt xy der Ebene R_2 in eine gewisse Kurve $\Omega = 0$ der Ebene mit den cartesischen Koordinaten x_1, y_1. Jede Transformation der zweiten Kategorie ist eine erweiterte Punkttransformation der Ebene R_2:

$$y_1 = Y(x, y); \quad x_1 = X(x, y); \quad y_1' = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} + y' \frac{\partial Y}{\partial y}}{\frac{\partial X}{\partial x} + y' \frac{\partial X}{\partial y}}.$$

Im Raume $R_3(xyz)$ existiren drei Kategorien von Berührungstransformationen

$$z' = Z(xyzpq); x' = X(x \,.\,.\, q); y' = Y(x \,.\,.); p' = P(x \,.\,.); q' = Q(x \,.\,.)$$

d. h. von Transformationen, vermöge deren eine Identität der Form

$$dz' - p'dx' - q'dy' \equiv \varrho(xyzpq)\,(dz - p\,dx - q\,dy)$$

besteht. Die Transformationen der zwei ersten Kategorien sind bez. durch Gleichungensysteme der folgenden Form definirt

$$(1) \quad \begin{cases} \Omega(xyz, x'y'z') = 0 \\ -p = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x}}{\frac{\partial \Omega}{\partial z}}; \quad -q = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}{\frac{\partial \Omega}{\partial z}} \quad -p' = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x'}}{\frac{\partial \Omega}{\partial z'}}; \quad -q' = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y'}}{\frac{\partial \Omega}{\partial z'}}, \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} \Omega_1(xyz, x'y'z') = 0 \qquad \Omega_2(xyz, x'y'z') = 0 \\ -p = \dfrac{\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial x}}{\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial z}}; \quad -q = \dfrac{\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial y}}{\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial z}}, \\ -p' = \dfrac{\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x'} + \lambda \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial x'}}{\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z'} + \lambda \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial z'}}; \quad -q' = \dfrac{\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial y'} + \lambda \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial y'}}{\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z'} + \lambda \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial z'}}. \end{cases}$$

Die Transformationen der 2[ten] Kategorie verwandeln also jeden Punkt xyz in eine gewisse, durch $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ definirte Raumkurve des $R_3'(x'y'z')$, und umgekehrt jeden Punkt $x'y'z'$ in eine gewisse Raumkurve des R_3.

200. Aus dem Bisherigen folgt, daſs vermöge einer Berührungstransformation des R_{m+1} zwar jede Element-M_m wiederum in eine Element-M_m, aber nicht notwendig jede Element-M_m^r (vgl. Art. 177) wiederum in eine Element-M_m^r übergehen muſs. Man kann vielmehr sogar jede beliebige Element-M_m^r $(r < m)$ des Raums R_{m+1} durch eine geeignete Berührungstransformation in eine Element-M_m^m des Raums R'_{m+1} verwandeln, wie wir jetzt zeigen wollen.

Wir setzen zu diesem Zwecke $q = m - r$, und verstehen unter $\alpha_1 \,..\, \alpha_m$ irgend eine Permutation der Indices $1, 2, \,..\, m$. Nach Art. 175 können dann die Definitionsgleichungen einer M_m^r immer in der Form

$$(34)\quad \begin{aligned} z - x_{\alpha_1} p_{\alpha_1} - \cdot\cdot - x_{\alpha_q} p_{\alpha_q} &= W(p_{\alpha_1} \cdot\cdot p_{\alpha_q} x_{\alpha_{q+1}} \cdot\cdot x_{\alpha_m}) \\ x_{\alpha_1} = -\frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_1}};\ \cdot\cdot\ & x_{\alpha_q} = -\frac{\partial W}{\partial p_{\alpha_q}} \\ p_{\alpha_{q+1}} = \frac{\partial W}{\partial x_{\alpha_{q+1}}};\ \cdot\cdot\ & p_{\alpha_m} = \frac{\partial W}{\partial x_{\alpha_m}} \end{aligned}$$

vorausgesetzt werden. Wir betrachten nun diejenige Berührungstransformation (4) der $m - q + 1$[ten] Kategorie, welche aus den folgenden Relationen in $zx_1 \,..\, x_m z' \,..\, x'_m$:

$$z' - z + x_{\alpha_1} x'_{\alpha_1} + \cdot\cdot x_{\alpha_q} x'_{\alpha_q} = 0$$

$$x'_{\alpha_s} - x_{\alpha_s} = 0 \qquad (s = q + 1, q + 2, \,..\, m)$$

nach den Regeln des Art. 195 erhalten wird. Diese Berührungstransformation hat sonach die Form:

$$\begin{aligned} & z' = z - x_{\alpha_1} p_{\alpha_1} - \cdot\cdot - x_{\alpha_q} p_{\alpha_q} \\ & x'_{\alpha_1} = p_{\alpha_1};\ \cdot\cdot\ x'_{\alpha_q} = p_{\alpha_q};\ x'_{\alpha_{q+1}} = x_{\alpha_{q+1}};\ \cdot\cdot\ x'_{\alpha_m} = x_{\alpha_m} \\ & p'_{\alpha_1} = -x_{\alpha_1};\ \cdot\cdot\ p'_{\alpha_q} = -x_{\alpha_q};\ p'_{\alpha_{q+1}} = p_{\alpha_{q+1}};\ \cdot\cdot\ p'_{\alpha_m} = p_{\alpha_m}, \end{aligned}$$

verwandelt also die Gleichungen (34) in die nachstehenden:

$$z' = W(x'_{\alpha_1} \dots x'_{\alpha_m}); \; p'_{\alpha_i} = \frac{\partial W}{\partial x'_{\alpha_i}} \qquad (i = 1 \dots m)$$

die in der That ein Element-M_m^m des Raums $R'_{m+1}(z' \dots x'_m)$ darstellen.

Wir fügen noch ohne Beweis folgende Bemerkungen hinzu:

Jedes Gleichungensystem der Form

$$z = F(x_1 \dots x_m); \; p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1 \dots m)$$

verwandelt sich vermöge der Berührungstransformation (4) im Allgemeinen wieder in ein Gleichungensystem der analogen Form

$$z' = F'(x_1' \dots x_m'); \; p_i' = \frac{\partial F'}{\partial x_i'} \qquad (i = 1 \dots m)$$

d. h. also: jede Element-M_m^m wird durch (4) im allgemeinen wieder in eine Element-M_m^m verwandelt. Dies ist nur dann nicht der Fall, wenn die Funktion F einer gewissen partiellen Differentialgleichung [1]) genügt, die im allg. von der zweiten Ordnung ist und nicht von jedem beliebigen F erfüllt werden kann.

Jede Berührungstransformation (4) hat demnach die Eigenschaft, eine beliebige Fläche $z = F$ des R_{m+1} wieder in eine Fläche $z' = F'$ des Raums R'_{m+1}, und zwei Flächen des R_{m+1}, die sich in einem Punkt berühren, d. h. ein Flächenelement gemeinsam haben, wieder in zwei sich berührende Flächen des R'_{m+1} überzuführen. Diese Eigenschaft, die überdies für die betrachteten Transformationen charakteristisch ist, rechtfertigt die Bezeichnung „*Berührungstransformation*“.

201. Die bisherigen Entwickelungen dieses § setzen uns in den Stand, für die in reduzirter Form vorliegende Pfaff'sche Gleichung

$$\nabla \equiv dz - p_1 dx_1 - \dots - p_m dx_m = 0$$

die allgemeinste reduzirte Form mit $m + 1$ Differentialelementen:

$$dZ(z, x_1 \dots p_m) - \sum_1^m {}_s P_s(z, x_1 \dots p_m) dX_s(z, x_1 \dots p_m) = 0$$

durch bloße Differentiationen und Eliminationen zu ermitteln. Der Pfaff'sche Ausdruck ∇ ist nun ein bedingungsloser Ausdruck in $2m+1$ Variabeln, und liegt bereits in der Normalform vor; es erhebt sich naturgemäß die Frage: welches ist die allgemeinste Normalform von ∇, m. a. W. wie erhält man das allgemeinste System von Funktionen:

1) Lie II p. 161.

(35) $Z(z, x_1 \,.\,. x_m p_1 \,.\,. p_m), \; X_i(z, x_1 \,.\,. p_m), \; P_i(z, x_1 \,.\,. p_m) \quad (i = 1 \,.\,. m)$

von der Beschaffenheit, dafs vermöge der Gleichungen

(36) $z' = Z; \; x_1' = X_1 \,.\,. x_m' = X_m; \; p_1' = P_1 \,.\,. p_m' = P_m$

für jedes beliebige Wertsystem der Variabeln $z x_i p_i$ und ihrer Differentiale die Identität

$$dz - p_1 dx_1 - \cdot\cdot - p_m dx_m \equiv dz' - p_1' dx_1' - \cdot\cdot - p_m' dx_m'$$

stattfindet? Die Funktionen (35) müssen natürlich unabhängig sein, d. h. die Gleichungen (36) müssen eine Berührungstransformation des R_{m+1} definiren. Unser Problem kommt sonach auf die Beantwortung folgender Frage hinaus:

Welches ist die allgemeinste Berührungstransformation (36) *von der Eigenschaft, dafs die in der Identität* (24) *auftretende Funktion* ϱ *mit* 1 *identisch wird?*

Anstatt diese letztere Bedingung in die Rechnung des Art. 194 einzuführen, können wir auch folgendermafsen vorgehen. Es sei (36) eine Berührungstransformation der verlangten Art, und

(37) $\Psi_i(z, x_1 \,.\,. x_m, p_1 \,.\,. p_m, z', x_1' \,.\,. x_m', p_1' \,.\,. p_m') = 0 \quad (i = 1, 2, \,.\,. 2m+1)$

ein mit (36) äquivalentes Gleichungensystem, das also sowohl nach den Variabeln $z x_i p_i$ als auch nach den Variabeln $z' x_i' p_i'$ auflösbar ist. Dann bilden diese Gleichungen ein $2m+1$-gliedriges Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung:

(38) $0 = d\zeta + p_1 dx_1 + \cdot\cdot + p_m dx_m - p_1' dx_1' - \cdot\cdot - p_m' dx_m' = 0$

worin $\zeta, p_i, x_i, p_i', x_i'$ die $4m+1$ unabhängigen Variabeln bedeuten, und ζ statt $z' - z$ geschrieben wurde. Ersetzen wir daher in (37) die Variabele z' durch $\zeta + z$, so mufs nach Art. 188 die Gröfse z aus diesen Gleichungen von selbst herausfallen, d. h. die Relationen (37) können auf die Form

$$\Phi_i(\zeta, x_1 \,.\,. x_m, p_1 \,.\,. p_m, x_1' \,.\,. x_m' p_1' \,.\,. p_m') = 0 \quad (i = 1 \,.\,. 2m+1)$$

gebracht werden, und müssen nach den Variabeln

$$\zeta, x_1 \,.\,. x_m, p_1 \,.\,. p_m$$

und ebenso nach den Variabeln

$$\zeta, x_1' \,.\,. x_m' p_1' \,.\,. p_m'$$

auflösbar sein. Das allgemeinste $2m+1$-gliedrige Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung (38) wird nun durch Elimination der λ_i aus einem Gleichungensystem der Form

$$\Omega_i(\zeta, x_1 \,..\, x_m,\ x_1' \,..\, x_m') = 0 \qquad (i = 1, 2, \,..\, q + 1)$$

$$p_i = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_{q+1} \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_i}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial \zeta} + \cdots + \lambda_{q+1} \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial \zeta}} \qquad (i = 1 \,..\, m)$$

$$-p_i' = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_i'} + \cdots + \lambda_{q+1} \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_i'}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial \zeta} + \cdots + \lambda_{q+1} \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial \zeta}} \qquad (i = 1 \,..\, m)$$

erhalten. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daſs die so entstehenden $2m + 1$ Gleichungen in der verlangten Weise auflösbar seien, folgen unmittelbar aus Art. 194, wenn man bedenkt, daſs gegenwärtig z und z' nur in der Verbindung $\zeta = z' - z$ in den Ω_i vorkommen, und wir erhalten folgendes Theorem:

Genügt eine Berührungstransformation der Variabeln $z, x_i p_i$:

$$z' = Z,\ x_i' = X_i,\ p_i' = P_i \qquad (i = 1 \,..\, m)$$

der Identität

$$dz' - p_1' dx_1' - \cdots - p_m' dx_m' \equiv dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m,$$

so hat sie die Form

$$(39) \quad z' = z + U(x_1 \,..\, x_m,\ p_1 \,..\, p_m)$$
$$x_i' = X_i(x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m);\ p_i' = P_i(x_1 \,..\, x_m,\ p_1 \,..\, p_m)\ (i = 1 \,..\, m),$$

und umgekehrt.

Die allgemeinste Berührungstransformation der Form (39) *wird erhalten, wenn man zu irgend $q + 1$ ($\leq m + 1$) Relationen der Form*

$$\Omega_i(\zeta, x_1 \,..\, x_m,\ p_1 \,..\, p_m) \qquad (i = 1, 2, \,..\, q + 1)$$

diejenigen $2m - q$ Gleichungen hinzufügt, die aus den Relationen

$$p_i = \sum_1^{q+1} {}^s \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial x_i};\ -p_i' = \sum_1^{q+1} {}^s \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial x_i'};\ 1 = \sum_1^{q+1} {}^s \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial \zeta} \quad (i = 1 \,..\, m)$$

durch Elimination der λ entstehen, das so gewonnene $2m + 1$-gliedrige Gleichungensystem nach ζ, $x_1' \,..\, x_m' p_1' \,..\, p_m'$ auflöst, und ζ durch $z' - z$ ersetzt.

Die genannte Auflösung ist dann und nur dann möglich, wenn in der $m + q + 2$-reihigen Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1'} & \cdot\cdot & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_m'} & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial \zeta} & \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_1'} & \cdot\cdot & \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_m'} & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta \partial x_1'} & \cdot\cdot & \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta \partial x_m'} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial \zeta} & \cdot\cdot & \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial \zeta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x_m \partial \zeta} & \frac{\partial^2 W}{\partial x_m \partial x_1'} & \cdot\cdot & \frac{\partial^2 W}{\partial x_m \partial x_m'} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_m} & \cdot\cdot & \frac{\partial \Omega_{q+1}}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

$$(W \equiv \lambda_1 \Omega_1 + \cdot\cdot + \lambda_{q+1} \Omega_{q+1})$$

welche eine rationale, ganze, homogene Funktion der Gröfsen λ_i *vom Grade* $m - q$ *ist, nicht alle Koeffizienten der Potenzen und Potenzprodukte der* λ *vermöge des Relationensystems* $\Omega_\iota = 0$ *null sind. Die Gleichungen* (39) *sind dann auch nach* $z, x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m$ *auflösbar.*

Wie in Art. 196 zeigt man, dafs die zu (39) inverse Transformation ebenfalls der hier betrachteten, besondern Kategorie von Berührungstransformationen angehört, und dafs zwei verschiedene Berührungstransformationen vom Typus (39), hinter einander ausgeübt, stets wieder eine Berührungstransformation vom Typus (39) liefern.

Zu den Transformationen vom Typus (39) gehört u. a. die in Art. 200 benutzte. Es gibt, entsprechend den $m + 1$ Werten der Zahl q, $m + 1$ verschiedene Kategorien von Berührungstransformationen (39).

Die Transformationen vom Typus (39) besitzen die Eigenschaft, dafs die Funktionen X_i, P_i von z unabhängig sind, m. a. W. dafs sie die Variabeln $x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m$ *für sich* transformiren. In Art 290 werden wir zeigen, dafs die allgemeinste Berührungstransformation dieser Art die Form

$$z' = Az + U(x_1 \,..\, p_m);\; x_i' = X_i(x_1 \,..\, p_m);\; p_i' = P_i(x_1 \,..\, p_m)$$

besitzt, worin A eine nicht verschwindende Konstante bedeutet. Die allgemeinste derartige Transformation wird wie vorhin erhalten, wenn man unter ζ die Gröfse $z' - Az$ versteht.

Durch die Entwickelungen dieser Nr. ist gleichzeitig die Aufgabe gelöst, das allgemeinste System von Funktionen U, X_i, P_i der $2m$ Variabeln $x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m$ zu bestimmen, welches einer Identität der Form

$$p_1 dx_1 + \cdot\cdot + p_m dx_m \equiv - dU + P_1 dX_1 + \cdot\cdot + P_m dx_m$$

genügt.

202. Wir wollen jetzt diejenigen Berührungstransformationen vom

Typus (39), für die die Funktion U identisch null ist, ins Auge fassen. In dem Gleichungensystem $\Omega_\iota = 0$ ist jetzt die Relation $\zeta = 0$ enthalten, d. h. eine der Funktionen Ω_i, etwa Ω_{q+1} ist mit ζ identisch, und die andern sind von ζ unabhängig. Indem wir diese Annahmen in die Formeln der vorigen Nr. einführen, erhalten wir folgenden Satz:

Die allgemeinste Transformation der $2m$ *Variabeln* x_i, p_ι:

$$x_i' \equiv X_\iota(x_1 x_2 \ldots x_m p_1 \ldots p_m);\; p_i' = P_i(x_1 \ldots p_m) \quad (i = 1 \ldots m), \tag{40}$$

vermöge deren eine Identität

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m \equiv P_1 dX_1 + \cdots + P_m dX_m \tag{41}$$

besteht, wird erhalten, indem man irgend eine Zahl q *der Reihe* $1 \ldots m$ *und* q *beliebige Relationen der Form*

$$\Omega_\iota(x_1 \ldots x_m,\; x_1' \ldots x_m') = 0 \qquad (i = 1 \ldots q)$$

auswählt, sodann diejenigen $2m - q$ *Relationen hinzufügt, die durch Elimination der* λ_ι *aus den Gleichungen*

$$p_i = \sum_1^q{}_s \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial x_\iota};\quad -p_i' = \sum_1^q{}_s \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial x_i'} \qquad (i = 1 \ldots m) \tag{42}$$

hervorgehen, und die so gewonnenen $2m$ *Gleichungen nach* $x_1' \ldots x_m'$ $p_1' \ldots p_m'$ *auflöst. Damit diese Auflösung möglich sei, ist notwendig und hinreichend, dafs in der ganzrationalen homogenen Funktion* $m - q^{\text{ten}}$ *Grades mit den Variabeln* λ_ι, *die durch die Determinante*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_1'} & \cdot\cdot & \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_m'} & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_1'} & \cdot\cdot & \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_m'} & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_1' \partial x_1} & \cdot\cdot & \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_m' \partial x_1} & \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_1' \partial x_m} & \cdot\cdot & \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_m' \partial x_m} & \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_m} & \cdot\cdot & \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_m} \end{vmatrix}, \quad \left(W \equiv \sum_1^q{}_s \lambda_s \Omega_s\right)$$

dargestellt wird, nicht alle Koeffizienten vermöge des Systems $\Omega_i = 0$ *verschwinden, und die Gleichungen* (40) *sind dann von selbst auch nach* $x_1 \ldots p_m$ *auflösbar.*

Erfüllen die Gleichungen $\Omega_i = 0$ die im Satze genannte Bedingung, so können sie nach q von den Variabeln x_i und ebenso nach q von den Variabeln x_ι' aufgelöst werden.

Unser Satz hätte sich auch ohne Bezugnahme auf die Resultate des Art. 201 durch Aufsuchung aller $2m$-gliedrigen Integraläquivalente der Pfaff'schen Gleichung

$$p_1 dx_1 + \cdot\cdot + p_m dx_m - p_1' dx_1' - \cdot\cdot - p_m' dx_m' = 0$$

beweisen lassen.

Eine Transformation (40), die der Identität (41) genügt, heifst eine „*homogene Berührungstransformation*" der Variabeln $x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m$ oder des Raums $R_m(x_1 x_2 \,..\, x_m)$. Deutet man die $x_i p_i$ als homogene Element-Koordinaten dieses Raums (Art. 182) und die Gröfsen $x_1' \,..\, x_m'$ $p_1' \,..\, p_m'$ als homogene Elementkoordinaten eines Raums $R_m'(x_1' \,..\, x_m')$, so zeigt die Identität

$$\Sigma p_i dx_i \equiv \Sigma p_i' dx_i'$$

unmittelbar, dafs jede homogene Berührungstransformation des R_m irgend zwei benachbarte vereinigt liegende Flächenelemente des R_m in zwei ebensolche Elemente des R_m', also auch jede Element-M_q des R_m in eine Element-M_q des R_m' überführt.

Es giebt, den Annahmen $q = 1, 2, \,..\, m$ entsprechend, m verschiedene Kategorien von homogenen Berührungstransformationen des R_m. Die zu einer homogenen Berührungstransformation inverse ist wieder eine homogene Berührungstransformation; zwei homogene Berührungstransformationen liefern, hintereinander ausgeübt, stets wieder eine homogene Berührungstransformation.

Aus den Gleichungen (42) ergeben sich für die λ_i Ausdrücke, die in den p_i ganz, linear, und homogen 1. Ordnung sind. Man schliefst daraus leicht, dafs die Funktionen X_i nur von den Verhältnissen der Variabeln $p_1 \,..\, p_n$ abhängen, während die P_i in $p_1 \,..\, p_m$ homogen erster Ordnung werden. Also folgt:

Erfüllen $2m$ *Funktionen* X_i, P_i *der Variabeln* $x_1 \,..\, x_m$, $p_1 \,..\, p_m$ *die Identität*

$$p_1 dx_1 + \cdot\cdot + p_m dx_m \equiv P_1 dX_1 + \cdot\cdot + P_m dX_m,$$

so sind sie von einander unabhängig, und die X_i *sind in den* p_i *homogen nullter, die* P_i *homogen erster Ordnung, d. h. man hat identisch*

$$\sum p_s \frac{\partial X_i}{\partial p_s} \equiv 0; \quad \sum p_s \frac{\partial P_i}{\partial p_s} \equiv P_i \qquad (i = 1 \,..\, m).$$

203. Es sei

$$(43) \qquad z' = Z(z, x_1 \,..\, p_m); \; x_i' = X_i(z \,..\, p_m); \; p_i' = P_i(z \,..\, p_m)$$

eine Berührungstransformation der $2m + 1$ Variabeln $z, x_i p_i$, d. h. man habe eine Identität

$$(44)\quad dZ - \sum_1^m P_\iota dX_\iota \equiv \varrho(z, x_1 \,.\,.\, x_m, p_1 \,.\,.\, p_m)\,(dz - \sum_1^m p_\iota dx_\iota);$$

schreiben wir dann

$$(45)\qquad \begin{cases} z \equiv x_{m+1}; \; -p_\iota \equiv \dfrac{q_\iota}{q_{m+1}}, \\ z' \equiv x'_{m+1}; \; -p'_\iota \equiv \dfrac{q'_i}{q'_{m+1}}, \end{cases} \qquad (i = 1 \,.\,.\, m)$$

so besteht vermöge der Formeln:

$$(46)\qquad \begin{cases} x'_{m+1} = Z\left(x_{m+1}, x_1 \cdots x_m, \dfrac{-q_1}{q_{m+1}}, \cdots \dfrac{-q_m}{q_{m+1}}\right), \\ x'_i = X_i\left(x_{m+1}, x_1 \cdots x_m, \dfrac{-q_1}{q_{m+1}}, \cdots \dfrac{-q_m}{q_{m+1}}\right) \\ q'_{m+1} = \dfrac{q_{m+1}}{\varrho\left(x_{m+1}, x_1 \,.\,.\, x_m, \dfrac{-q_1}{q_{m+1}} \,.\,.\, \dfrac{-q_m}{q_{m+1}}\right)} \\ -q'_i = \dfrac{q_{m+1} \cdot P_i\left(x_{m+1}, x_1 \,.\,.\, x_m, \dfrac{-q_1}{q_{m+1}} \,.\,.\, \dfrac{-q_m}{q_{m+1}}\right)}{\varrho\left(x_{m+1}, x_1 \,.\,.\, x_m, \dfrac{-q_1}{q_{m+1}} \,.\,.\, \dfrac{-q_m}{q_{m+1}}\right)} \end{cases}$$

$$(i = 1 \,.\,.\, m)$$

die Identität

$$(47)\quad q_1' dx_1' + \cdots + q'_{m+1} dx'_{m+1} = q_1 dx_1 + \cdots + q_{m+1} dx_{m+1},$$

worin die $x'_\iota q'_i$ durch ihre Ausdrücke (46) zu ersetzen und die Differentiale dx'_ι auf sämtliche $2m+2$ Variable

$$(48)\qquad x_1 \,.\,.\, x_{m+1} q_1 \,.\,.\, q_{m+1}$$

zu beziehen sind. In der That verifizirt man leicht, daſs die Gleichungen

$$\sum_1^{m+1} {}_s\, q'_s \frac{\partial x'_s}{\partial x_i} \equiv q_i; \quad \sum_1^{m+1} {}_s\, q'_s \frac{\partial x'_s}{\partial q_i} \equiv 0 \quad (i = 1 \,.\,.\, m+1)$$

vermöge der Formeln (46) und mit Rücksicht auf die aus (44) folgenden Beziehungen

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum P_s \frac{\partial X_s}{\partial z} \equiv \varrho; \quad \frac{\partial Z}{\partial x_i} - \sum P_s \frac{\partial X_s}{\partial x_i} \equiv -\varrho p_i$$

$$\frac{\partial Z}{\partial p_i} - \sum P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_\iota} \equiv 0$$

identisch stattfinden. Die Gleichungen (46) definiren sonach eine homogene Berührungstransformation der $2m+2$ Variabeln (48), welch' letztere als homogene Elementkoordinaten des Raums $R_{m+1}(x_{m+1}, x_1 \ldots x_m)$ zu betrachten sind. Auf diese Weise läſst sich also jede beliebige Berührungstransformation (43) in eine homogene umsetzen.

Es werde nun umgekehrt durch die Formeln

$$(49)\quad x_i' = Y_i(x_1 \ldots x_{m+1}, q_1 \ldots q_{m+1});\; q_i' = Q_i(x_1 \ldots q_{m+1}) \quad (i = 1 \ldots m+1)$$

eine homogene Berührungstransformation der $2m+2$ Variabeln (48) definirt; dann besteht vermöge (49) die Identität (47). Wir dividiren diese Identität durch q'_{m+1} und beachten, daſs nach dem Schluſssatz des vorigen Artikels die Funktionen

$$\frac{1}{q_{m+1}} Q_{m+1}, \; \frac{Q_i}{Q_{m+1}}, \; Y_i \qquad (i = 1 \ldots m)$$

die q_i nur in den Verbindungen $\frac{q_1}{q_{m+1}} \cdots \frac{q_m}{q_{m+1}}$ enthalten können. Indem wir also die in den Gleichungen (45) rechts stehenden Gröſsen durch die links stehenden ersetzen, können wir schreiben

$$\frac{q_{m+1}}{Q_{m+1}} \equiv \varrho(z, x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m)$$

$$\frac{Q_i}{Q_{m+1}} \equiv - P_i(z, \ldots x_m, p_1 \ldots p_m)$$

$$Y_i \equiv X_i(z, \ldots x_m, p_1 \ldots p_m)$$

wodurch sich die Identität (47) in (44) verwandelt. Solcherweise läſst sich also auch umgekehrt jede homogene Berühungstransformation des R_{m+1} in eine Berührungstransformation der Gestalt (43) umsetzen.

§ 2. Äquivalente Normalformen.

204. Die Entwickelungen des vorigen § enthalten die vollständige Lösung der folgenden 3 Aufgaben:

1) Für eine in reduzirter Form vorliegende Pfaff'sche Gleichung mit $2m+1$ Veränderlichen

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m = 0$$

vom Range $2m+2$ die allgemeinste reduzirte Form

$$dz' - p_1' dx_1' - \cdots - p_m' dx_m' = 0$$

abzuleiten;

2) für einen bedingungslosen *Ausdruck* in $2m+1$ Veränderlichen

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m$$

die allgemeinste Normalform

$$dz' - p_1' dx_1' - \cdots - p_m' dx_m'$$

anzugeben;

3) für einen bedingungslosen *Ausdruck* in $2m$ Veränderlichen

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m$$

die allgemeinste Normalform

$$p_1' dx_1' + \cdots + p_m' dx_m'$$

zu ermitteln.

Mit Hülfe des Grassmann'schen Theorems (Art. 118, 168) und des Fundamentaltheorems (Art. 167) gelingt es nunmehr leicht, die analogen Aufgaben für eine beliebige Pfaff'sche Gleichung:

$$(1) \qquad \Delta \equiv \sum_1^n{}^i a_i(x_1 x_2 \ldots x_n)\, dx_i = 0$$

bezw. für einen beliebigen Pfaff'schen Ausdruck Δ zu erledigen.

205. Es sei $\varkappa_1 = 2\lambda$ der Rang der Gleichung (1) und:

$$d\zeta - \pi_1 d\xi_1 - \cdots - \pi_{\lambda-1} d\xi_{\lambda-1} = 0$$

irgend eine bestimmte reduzirte Form dieser Gleichung. Dann können wir nach Art. 168, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, dafs die Funktionen

$$(2) \qquad \zeta, \xi_1, \ldots \xi_{\lambda-1}, \pi_1 \ldots \pi_{\lambda-1}$$

hinsichtlich $x_1, x_2 \ldots x_{2\lambda-1}$ unabhängig seien. Ist jetzt:

$$(3) \qquad d\zeta' - \pi_1' d\xi_1' - \cdots - \pi_{\lambda-1}' d\xi_{\lambda-1}' = 0$$

eine beliebige andere reduzirte Form derselben Gleichung (1), so besteht eine Identität der Form

$$(4) \quad \omega(d\zeta' - \pi_1' d\xi_1' - \cdots - \pi_{\lambda-1}' d\xi_{\lambda-1}') \equiv d\zeta - \pi_1 d\xi_1 - \cdots - \pi_{\lambda-1} d\xi_{\lambda-1},$$

worin ω eine gewisse Funktion von $x_1 \ldots x_n$ bedeutet. Die Funktionen $\omega, \zeta', \pi_i', \xi_i'$ lassen sich nun zufolge der Unabhängigkeit der Funktionen (2) folgendermafsen darstellen:

$$(5) \qquad \begin{cases} \omega = \Omega\,(\zeta, \xi_1 \ldots \xi_{\lambda-1}, \pi_1 \ldots \pi_{\lambda-1}, x_{2\lambda}, \ldots x_n) \\ \zeta' = Z\,(\zeta, \xi_1 \ldots \xi_{\lambda-1}, \pi_1 \ldots \pi_{\lambda-1}, x_{2\lambda}, \ldots x_n) \\ \xi_i' = \Xi_i(\zeta, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n) \\ \pi_i' = \Pi_i(\zeta, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n). \end{cases}$$

Schreiben wir nun $\varkappa_i'$ statt $-\omega\pi_i'$, so erkennen wir aus (4) unmittelbar, dafs die Relationen

(6) $\omega = \Omega,\ \zeta' = Z;\ \xi_i' = \Xi_i;\ \varkappa_i' = -\Omega\Pi_i\quad (i = 1, .. \lambda - 1)$

ein 2λ-gliedriges Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung

$$d\zeta - \pi_1 d\xi_1 - \cdots - \pi_{\lambda-1} d\xi_{\lambda-1} - \omega d\zeta' - \varkappa_1' d\xi_1' - \cdots - \varkappa_{\lambda-1}' d\xi_{\lambda-1}' = 0$$

darstellen müssen, wenn darin alle $4\lambda - 1$ Gröſsen $\zeta, \pi_i, \xi_i, \omega, \zeta', \xi_i, \varkappa_i'$ sowie $x_{2\lambda}, x_{2\lambda+1} .. x_n$ als unabhängige Variable betrachtet werden. Aus Art. 188 schlieſsen wir jetzt sofort, daſs die rechten Seiten der Gleichungen (6) und (5) die Variabeln $x_{2\lambda} .. x_n$ nicht explicite enthalten können. Diese Thatsache folgt auch unmittelbar daraus, daſs nach Art. 132 die Funktionen (2) ein System von unabhängigen Integralen eines gewissen zu $\varDelta$ gehörigen vollständigen Systems darstellen, und daſs auch sämtliche Funktionen ω, ζ', π_i', ξ_i' diesem System genügen müssen, also durch die Funktionen (2) in der Form

$$(6)\quad \begin{cases} \zeta' = Z(\zeta, \xi_1 .. \xi_{\lambda-1}, \pi_1 .. \pi_{\lambda-1}) \\ \xi_i' = \Xi_i(\zeta, \xi_1 .. \xi_{\lambda-1}, \pi_1 .. \pi_{\lambda-1}) \qquad (i = 1 .. \lambda - 1) \\ \pi_i' = \Pi_i(\zeta, \xi_1 .. \xi_{\lambda-1}, \pi_1 .. \pi_{\lambda-1}) \end{cases}$$

ausdrückbar sind. Diese Gleichungen definiren somit eine Berührungstransformation der $2\lambda - 1$ Variabeln (2). Umgekehrt, ist letzteres der Fall, so besitzt die Pfaff'sche Gleichung $\varDelta = 0$ die reduzirte Form (3). Damit ist bewiesen:

Ist eine Pfaff'sche Gleichung $\varDelta = 0$ vom Range 2λ auf eine reduzirte Form

$$d\zeta - \pi_1 d\xi_1 - \cdots - \pi_{\lambda-1} d\xi_{\lambda-1} = 0$$

gebracht, so erhält man die allgemeinste reduzirte Form

$$d\zeta' - \pi_1' d\xi_1' - \cdots - \pi_{\lambda-1}' d\xi_{\lambda-1}' = 0$$

dadurch, daſs man auf die $2\lambda - 1$ Variabeln ζ, π_i, ξ_i eine beliebige Berührungstransformation (6) ausübt.

Als Korollar folgt hieraus:

Stellen die Gleichungen

$$\zeta = \text{const.},\ \xi_1 = \text{const.},\ .. \ \xi_{\lambda-1} = \text{const.}$$

irgend ein vollständiges Integraläquivalent einer Gleichung $\varDelta = 0$ vom Range 2λ dar (Art. 189), so hat das allgemeinste vollständige Integraläquivalent die Form

$$Z(\zeta, \xi_1 .. \xi_{\lambda-1}, \pi_1 .. \pi_{\lambda-1}) = \text{const.}\quad \Xi_i(\zeta, .. \pi_{\lambda-1}) = \text{const.}\quad (i = 1, .. \lambda - 1).$$

Dabei sind die Funktionen π_i aus der Identität

$$\varDelta \equiv \varrho(d\zeta - \pi_1 d\xi_1 - \cdots - \pi_{\lambda-1} d\xi_{\lambda-1})$$

durch Auflösung eines linearen Gleichungensystems zu bestimmen, und die Funktionen Z, Ξ_i sind so zu wählen, dafs sie mit gewissen $\lambda - 1$ andern Funktionen Π_i zusammen die rechten Seiten einer Berührungstransformation (6) bilden.

206. Durch ganz analoge Betrachtungen ergeben sich noch die folgenden beiden Sätze:

Hat man einen Pfaff'schen Ausdruck Δ mit der Klasse $\varkappa = 2\lambda - 1$ auf eine Normalform

$$d\zeta - \pi_1 d\xi_1 - \cdots - \pi_{\lambda-1} d\xi_{\lambda-1}$$

gebracht, so erhält man jede andere Normalform

$$d\zeta' - \pi_1' d\xi_1' - \cdots - \pi_{\lambda-1}' d\xi_{\lambda-1}'$$

desselben, indem man die $2\lambda - 1$ Variabeln ζ, π_ι, ξ_ι einer Berührungstransformation von der besondern Form

$$\begin{aligned} \zeta' &= \zeta + \Omega(\xi_1 \,.\,.\, \xi_{\lambda-1},\ \pi_1 \,.\,.\, \pi_{\lambda-1}) \\ \xi_i' &= \Xi_i(\xi_1 \,.\,.\, \xi_{\lambda-1},\ \pi_1 \,.\,.\, \pi_{\lambda-1});\ \pi_i' = \Pi_i(\xi_1 \,.\,.\, \pi_{\lambda-1}) \end{aligned}$$

unterwirft.

Ebenso wird aus einer speziellen Normalform

$$\pi_1 d\xi_1 + \cdots + \pi_\lambda d\xi_\lambda \tag{7}$$

eines Pfaff'schen Ausdrucks Δ mit der Klasse 2λ die allgemeinste

$$\pi_1' d\xi_1' + \cdots + \pi_\lambda' d\xi_\lambda' \tag{8}$$

dadurch erhalten, dafs man auf die 2λ Variabeln $\pi_i \xi_i$ eine beliebige homogene Berührungstransformation

$$\xi_\iota' = \Xi_\iota(\xi_1 \,.\,.\, \xi_\lambda,\ \pi_1 \,.\,.\, \pi_\lambda);\ \pi_i' = \Pi_\iota(\xi_1 \,.\,.\, \xi_\lambda,\ \pi_1 \,.\,.\, \pi_\lambda) \tag{9}$$

ausübt.

207. Um noch mit ein paar Worten auf die funktionentheoretische Beschaffenheit der verschiedenen Normalformen von Δ einzugehen, nehmen wir im Falle $\varkappa = 2\lambda$ an, dafs die Normalform (7) den Bedingungen des Art. 167 genügt, d. h. dafs an einer gewissen Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ alle π_i, ξ_i regulär sind, und ihre nach $x_1 \,.\,.\, x_{2\lambda}$ genommene Funktionaldeterminante daselbst nicht verschwindet. Es seien $\bar{\pi}_i$, $\bar{\xi}_i$ die konstanten Werte, welche die Funktionen π_i, ξ_i an jener Stelle annehmen. Wählt man dann die homogene Berührungstransformation (9) so, dafs ihre rechten Seiten an der Stelle $\bar{\xi}_i$, $\bar{\pi}_i$ regulär sind und ihre nach $\xi_1 \,.\,.\, \xi_\lambda$, $\pi_1 \,.\,.\, \pi_\lambda$ genommene Funktionaldeterminante daselbst nicht null ist, so werden die Funktionen ξ_i', π_i' nach Art. 38, 6) an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ ebenfalls regulär sein, und ihre nach $x_1 \,.\,.\, x_{2\lambda}$ genommene Funktionaldeterminante wird daselbst nicht verschwinden.

Dafs man die Berührungstransformation (9) wirklich in der angegebenen Weise wählen kann, sieht man so ein. Es seien $\bar{\pi}_\iota'$, $\bar{\xi}_\iota'$, $\bar{\varrho}_1 \ldots \bar{\varrho}_q$ irgend welche Konstante. Man wähle nun $q(\leqq \lambda)$ Relationen

$$(10) \qquad \Omega_\iota(\xi_1 \ldots \xi_\lambda, \xi_1' \ldots \xi_\lambda') = 0 \qquad (i = 1 \ldots q)$$

derart, dafs die Ω_i an der Stelle $\bar{\xi}_1 \ldots \bar{\xi}_\lambda$, $\bar{\xi}_1' \ldots \bar{\xi}_\lambda'$ regulär sind und verschwinden, dafs ferner die Relationen

$$\pi_i = \sum_1^q{}_s \varrho_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial \xi_i}; \quad -\pi_i' = \sum_1^q{}_s \varrho_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial \xi_i'} \qquad (i = 1, 2, \ldots \lambda)$$

durch das Wertsystem

$$(11) \quad \pi_i = \bar{\pi}_\iota;\ \xi_\iota = \bar{\xi}_\iota;\ \pi_i' = \bar{\pi}_i';\ \xi_i' = \bar{\xi}_\iota';\ \varrho_s = \bar{\varrho}_s \quad (i = 1 \ldots \lambda;\ s = 1 \ldots q)$$

erfüllt werden, und dafs endlich die Determinante

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi_1'} & \cdots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi_\lambda'} & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial \Omega_q}{\partial \xi_1'} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial \xi_\lambda'} & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1' \partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_\lambda' \partial \xi_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial \xi_1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1' \partial \xi_\lambda} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_\lambda' \partial \xi_\lambda} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi_\lambda} & \cdots & \frac{\partial \Omega_q}{\partial \xi_\lambda}
\end{vmatrix}$$

für das Wertsystem (11) nicht null ist. Sind die Ω_i so gewählt, dann (und nur dann) besitzt die homogene Berührungstransformation (9), die aus den Relationen (10) nach der Regel des Art. 202 abgeleitet wird, die geforderten Eigenschaften.

Besitzt ein Δ, das den Bedingungen des Falles $\varkappa = 2\lambda$ (Art. 97) genügt, zwei Normalformen (7) (8) derart, dafs eine Stelle existirt, an der sämtliche 4λ Funktionen $\pi_i \xi_i \pi_i' \xi_i'$ regulär sind, so giebt es nach Art. 38, 3) auch immer eine Stelle $x_1^0 \ldots x_n^0$, an der diese Funktionen ebenfalls regulär sind und die beiden Funktionaldeterminanten

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \ldots \pi_\lambda \xi_1 \ldots \xi_\lambda \\ x_1 \ldots \qquad \ldots x_{2\lambda} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi_1' \ldots \pi_\lambda' \xi_1' \ldots \xi_\lambda' \\ x_1 \ldots \qquad \ldots x_{2\lambda} \end{pmatrix}$$

nicht verschwinden, und man kann dann von der einen Normalform zur andern durch eine homogene Berührungstransformation (9) übergehen.

Der zweite Satz des Art. 206 gilt streng genommen nur dann, wenn man sich auf die Betrachtung solcher Normalformen (7) (8) beschränkt, welche der soeben formulirten Bedingung genügen.

Ganz ähnliche Überlegungen, wie wir sie in dieser Nr. für den Fall $\varkappa = 2\lambda$ angestellt haben, greifen natürlich auch bei ungeradem $\varkappa$ Platz, und dementsprechend unterliegt auch der erste Satz des vorigen Art. sowie das Theorem des Art. 205 analogen Einschränkungen.

208. Wenn zwei Pfaff'sche Gleichungen in je n Veränderlichen

$$\Delta \equiv \sum_1^n {}^i\, a_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) dx_i = 0$$

$$\Delta' \equiv \sum_1^n {}^i\, b_i(x_1' x_2' \,.\,.\, x_n')\, dx_i' = 0$$

denselben Rang $\varkappa_1 = 2\lambda$ besitzen, so sind sie nach Art. 120 äquivalent, d. h. es giebt stets eine Variabelntransformation

$$x_i' = \varphi_i(x_1 \,.\,.\, x_n) \quad (i = 1 \,.\,.\, n) \tag{12}$$

vermöge deren eine Identität der Form

$$\Delta' \equiv \varrho(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n) \,.\, \Delta \tag{13}$$

stattfindet.

Die Frage nach der *allgemeinsten* Transformation (12) dieser Art erledigt sich nunmehr ohne weiteres.

Aus unseren Voraussetzungen folgt, dafs die beiden Pfaff'schen Gleichungen $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$ auf die folgenden reduzirten Formen gebracht werden können:

$$(14) \quad d\zeta - \sum_1^{\lambda-1} {}^s\, \pi_s d\xi_s = 0; \qquad (15) \quad d\zeta' - \sum_1^{\lambda-1} {}^s\, \pi_s' d\xi_s' = 0,$$

und zwar dürfen wir annehmen, dafs die Funktionen $\zeta \pi_i \xi_i$ hinsichtlich $x_1 x_2 \,.\,.\, x_{2\lambda-1}$ und die Funktionen $\zeta' \pi_i' \xi_i'$ hinsichtlich $x_1' x_2' \,.\,.\, x_{2\lambda-1}'$ unabhängig seien. Dann läfst sich jede beliebige Variabelntransformation (12) in der Form schreiben:

$$(16) \begin{cases} \zeta' = Z(\zeta, \xi_1 \,.\,.\, \xi_{\lambda-1}, \pi_1 \,.\,.\, \pi_{\lambda-1}, x_{2\lambda} \,.\,.\, x_n) \\ \xi_i' = \Xi_i(\zeta, \xi_1 \,.\,.\, x_n); \ \pi_i' = \Pi_i(\zeta, \xi_1 \,.\,.\, x_n) \qquad (i = 1 \,.\,.\, \lambda - 1) \\ x_s' = X_s(\zeta, \xi_1 \,.\,.\, \pi_{\lambda-1}, x_{2\lambda} \,.\,.\, x_n) \qquad (s = 2\lambda, 2\lambda + 1 \,.\,.\, n) \end{cases}$$

wobei die rechten Seiten hinsichtlich der n in ihnen enthaltenen Gröfsen unabhängig sind. Umgekehrt liefert jedes Gleichungensystem dieser Art, indem man darin die $\zeta \xi_i \pi_i$ $\zeta' \xi_i' \pi_i'$ durch ihre Ausdrücke in den x und x' ersetzt, durch Auflösung nach $x_1' \,.\,.\, x_n'$ eine Variabelntransformation (12).

Soll nun vermöge (16) die Identität (13) bestehen, so hat man auch eine Identität der Form

(17) $d\zeta' - \pi_1' d\xi_1' - \cdots - \pi_{\lambda-1}' d\xi_{\lambda-1}' \equiv \sigma(d\zeta - \pi_1 d\xi_1 - \cdots - \pi_{\lambda-1} d\xi_{\lambda-1})$.

Nach Art. 205 müssen also die $2\lambda - 1$ Funktionen Z, Ξ_i, Π_i von den Variabeln $x_{2\lambda} \ldots x_n$ explicite unabhängig sein, und die rechten Seiten einer Berührungstransformation in den $2\lambda - 1$ Veränderlichen $\zeta \xi_i \pi_i$ darstellen.

Umgekehrt, sind diese Bedingungen erfüllt, so besteht vermöge (16) eine Identität der Form (17), also genügt auch die aus (16) hervorgehende Variabelntransformation (12) einer Identität (13), und es folgt das Theorem:

Sind zwei Pfaff'sche Gleichungen

$$\Delta \equiv \Sigma a_i dx_i = 0; \quad \Delta' \equiv \Sigma a_i' dx_i' = 0$$

äquivalent, so wird die allgemeinste Variabelntransformation

$$x_i' = \varphi_i(x_1 x_2 \ldots x_n) \qquad (i = 1 \ldots n),$$

welche die eine der beiden Gleichungen in die andere überführt, vermöge deren also eine Identität der Form $\Delta' = \varrho \Delta$ stattfindet, in folgender Weise erhalten.

Man bringe die beiden Pfaff'schen Gleichungen auf je eine reduzirte Form

$$d\zeta - \pi_1 d\xi_1 - \cdots - \pi_{\lambda-1} d\xi_{\lambda-1} = 0; \quad d\zeta' - \pi_1' d\xi_1' - \cdots - \pi_{\lambda-1}' d\xi_{\lambda-1}' = 0$$

und nehme, um die Ideen zu fixiren, an, dafs die Funktionen $\zeta \pi_i \xi_i$ hinsichtlich $x_1 \ldots x_{2\lambda-1}$, und die Funktionen $\zeta' \pi_i' \xi_i'$ hinsichtlich $x_1' \ldots x_{2\lambda-1}'$ unabhängig seien. Wählt man dann eine beliebige Berührungstransformation der Variabeln $\zeta, \pi_i \xi_i$, deren rechte Seiten mit Z, Π_i, Ξ_i bezeichnet seien, ferner $n - 2\lambda + 1$ willkürliche Funktionen

$$X_s(\zeta, \xi_1 \ldots \xi_{\lambda-1}, \pi_1 \ldots \pi_{\lambda-1}, x_{2\lambda} \ldots x_n) \qquad (s = 2\lambda, \ldots n)$$

die hinsichtlich der Variabeln $x_{2\lambda} \ldots x_n$ von einander unabhängig sind, so entsteht eine Transformation (12) *der geforderten Eigenschaft, wenn man in den Relationen*

$$\zeta' = Z; \; \xi_i' = \Xi_i, \; \pi_i' = \Pi_i, \; x_s' = X_s \qquad (i = 1 \ldots \lambda - 1; \; s = 2\lambda, \ldots n)$$

die Funktionen ζ, ζ' .. durch ihre Ausdrücke in $x_1' \ldots x_n'$ bezw. $x_1 \ldots x_n$ ersetzt, und die so erhaltenen Gleichungen nach $x_1' \ldots x_n'$ auflöst; jede Transformation (12) *der genannten Art kann in dieser Weise erhalten werden.*

Nach dem Theorem der Nr. 205 läfst sich dieses Resultat kürzer so aussprechen:

Sind die beiden Pfaff'schen Gleichungen $\varDelta = 0$, $\varDelta' = 0$ äquivalent, so erhält man die allgemeinste Transformation, die die eine Gleichung in die andere überführt, indem man unter (15) *eine bestimmte reduzirte Form von $\varDelta' = 0$, unter* (14) *dagegen eine* **beliebige** *reduzirte Form von $\varDelta = 0$ versteht, und zu den Gleichungen*

$$(18) \qquad \zeta' = \zeta;\ \xi_i' = \xi_i;\ \pi_i' = \pi_i \qquad (i = 1\,..\,\lambda - 1)$$

noch $n - 2\lambda + 1$ beliebige weitere Gleichungen von der Beschaffenheit hinzufügt, dafs das entstehende n-gliedrige Gleichungensystem sowohl nach $x_1\,..\,x_n$ als auch nach $x_1'\,..\,x_n'$ auflösbar ist.

Im Falle $n = 2\lambda - 1$ liefern die Gleichungen (18) für sich schon die allgemeinste Transformation der verlangten Eigenschaft.

209. Aus den Sätzen der Nr. 206 ergeben sich durch ganz ähnliche Betrachtungen noch die folgenden Sätze:

Sind zwei Pfaff'sche Ausdrücke

$$\varDelta \equiv \Sigma a_i dx_i;\quad \varDelta' \equiv \Sigma a_i' dx_i'$$

äquivalent, d. h. besitzen sie dieselbe Klasse $\varkappa$, so wird die allgemeinste Variabelntransformation

$$x_i' = \varphi_i(x_1\,..\,x_n) \qquad (i = 1\,..\,n)$$

welche $\varDelta$ in $\varDelta'$ überführt, d. h. also der Identität $\varDelta \equiv \varDelta'$ genügt, in folgender Weise erhalten:

Ist $\varkappa = 2\lambda$, so bestimme man eine Normalform

$$\pi_1' d\xi_1' + \cdots + \pi_\lambda' d\xi_\lambda'$$

des Ausdrucks $\varDelta'$; ist dann

$$\pi_1 d\xi_1 + \cdots + \pi_\lambda d\xi_\lambda$$

eine **beliebige** *Normalform von $\varDelta$, so füge man zu den Gleichungen*

$$\pi_i' = \pi_i;\ \xi_i' = \xi_i \quad (i = 1\,..\,\lambda)$$

noch $n - \varkappa$ weitere Gleichungen in $x_1\,..\,x_n x_1'\,..\,x_n'$ hinzu, derart, dafs die so entstehenden n Gleichungen sowohl nach $x_1\,..\,x_n$ als auch nach $x_1'\,..\,x_n'$ auflösbar sind.

Im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ reduzire man $\varDelta'$ auf eine Normalform

$$d\zeta' - \pi_1' d\xi_1' - \cdots - \pi_{\lambda-1}' d\xi_{\lambda-1}',$$

verstehe unter

$$d\zeta - \pi_1 d\xi_1 - \cdots - \pi_{\lambda-1} d\xi_{\lambda-1}$$

eine beliebige Normalform von $\varDelta$, und ergänze das Gleichungensystem

$$\zeta' = \zeta,\ \pi_i' = \pi_i,\ \xi_i' = \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots \lambda - 1)$$

durch $n - \varkappa$ *beliebige Gleichungen in* $x_1 \,.\,.\, x_n x_1' \,.\,.\, x_n'$, *derart, dafs das gewonnene* n*-gliedrige Gleichungensystem die Auflösung sowohl nach* $x_1 \,.\,.\, x_n$ *als auch nach* $x_1' \,.\,.\, x_n'$ *gestattet.*

Es versteht sich von selbst, dafs diese Sätze auch richtig bleiben, wenn man die gestrichenen Gröfsen mit den ungestrichenen vertauscht.

210. Ein Spezialfall der Äquivalenz ergiebt sich, wenn der Ausdruck $\varDelta'$ dadurch entsteht, dafs man in $\varDelta$ die Variabeln x_i durch x_i' ersetzt, wenn also $\varDelta'$ die Form hat

$$\varDelta' \equiv \sum_1^n a_i(x_1' x_2' \,.\,.\, x_n') \, dx_i'.$$

Unter dieser Voraussetzung sind natürlich sowohl die Gleichungen $\varDelta = 0$, $\varDelta' = 0$ als auch die Ausdrücke $\varDelta$, $\varDelta'$ äquivalent. Besteht dann vermöge der Variabelntransformation (12) eine Identität der Form

$$\sum a_i(x_1' x_2' \,.\,.\, x_n') \, dx_i' \equiv \varrho(x_1 \,.\,.\, x_n) \cdot \sum a_\iota(x_1 \,.\,.\, x_n) \, dx_\iota,$$

so sagen wir: Die Transformation (12) „führt die Gleichung $\varDelta = 0$ *in sich über*“, oder: „sie läfst die Gleichung $\varDelta = 0$ *ungeändert*“ („invariant“), oder endlich, „die Gleichung $\varDelta = 0$ *gestattet* die Transformation (12)“. Ebenso sagen wir, falls vermöge (12) die Identität

$$\sum a_i(x_1' \,.\,.\, x_n') \, dx_i' \equiv \sum a_i(x_1 \,.\,.\, x_n) \, dx_i$$

stattfindet, die Transformation (12) „führt den Ausdruck $\varDelta$ *in sich über*“ etc.

Aus den Resultaten der Art. 208 und 209 fliefsen jetzt unmittelbar folgende Sätze:

Besitzt eine Pfaff'sche Gleichung $\varDelta = 0$ den Rang $\varkappa_1 = 2\lambda$ und infolgedessen eine reduzirte Form

$$d\zeta(x_1 \,.\,.\, x_n) - \sum_1^{\lambda-1} {}^{\iota}\, \pi_\iota(x_1 \,.\,.\, x_n) \, d\xi_\iota(x_1 \,.\,.\, x_n) = 0$$

und sind Z, Ξ_i, Π_ι die rechten Seiten irgend einer Berührungstransformation in den $2\lambda - 1$ Variabeln ζ, $\xi_1 \,.\,.\, \xi_{\lambda-1}$, $\pi_1 \,.\,.\, \pi_{\lambda-1}$, so ergiebt sich die allgemeinste Variabelntransformation, welche die Pfaff'sche Gleichung $\varDelta = 0$ invariant läfst, indem man die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\zeta(x_1' \,.\,.\, x_n') = Z(\zeta, \xi_1 \,.\,.\, \xi_{\lambda-1}, \pi_1 \,.\,.\, \pi_{\lambda-1}) \\
&\left.\begin{aligned}
\pi_i(x_1' \,.\,.\, x_n') &= \Pi_i(\zeta, \quad .\,. \quad \pi_{\lambda-1}) \\
\xi_\iota(x_1' \,.\,.\, x_n') &= \Xi_i(\zeta, \quad .\,. \quad \pi_{\lambda-1})
\end{aligned}\right\} \; (i = 1 \,.\,.\, \lambda - 1) \\
&\Omega_s(x_1 \,.\,.\, x_n, x_1' \,.\,.\, x_n') = 0 \qquad (s = 1, 2, \,.\,.\, n - 2\lambda + 1)
\end{aligned}$$

nach $x_1' \ldots x_\iota'$ oder nach $x_1 \ldots x_n$ auflöst. Die Ω_ι sind dabei beliebig, und nur so zu wählen, dafs die genannte Auflösung möglich ist.

Jede Variabelntransformation, die einen Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ der Klasse $\varkappa = 2\lambda$ in sich überführt, entsteht aus einem Gleichungensystem der Form

$$(19) \qquad \begin{cases} \left.\begin{aligned} \xi_i(x_1' \ldots x_n') &= \Xi_i(\xi_1 \ldots \xi_\lambda, \pi_1 \ldots \pi_\lambda) \\ \pi_i(x_1' \ldots x_\lambda') &= \Pi_i(\xi_1 \ldots \xi_\lambda, \pi_1 \ldots \pi_\lambda) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1 \ldots \lambda) \\ \Omega_s(x_1 \ldots x_n, x_1' \ldots x_n') = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots n - 2\lambda). \end{cases}$$

Dabei bedeutet $\pi_1 d\xi_1 + \cdots + \pi_\lambda d\xi_\lambda$ eine bestimmte Normalform von $\varDelta$; die Ξ_i, Π_i sind die rechten Seiten einer homogenen Berührungstransformation in den 2λ Variabeln ξ_i, π_i; die Ω_i sind so zu wählen, dafs die Gleichungen (19) nach $x_1 \ldots x_n$ und auch nach $x_1' \ldots x_n'$ auflösbar werden.

Endlich erhält man jede Variabelntransformation, die einen Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ der Klasse $\varkappa = 2\lambda - 1$ in sich überführt, aus einem, sowohl nach $x_1 \ldots x_n$ als auch nach den x_ι' auflösbaren Gleichungensystem der Form:

$$\begin{aligned} &\zeta(x_1' \ldots x_n') = \zeta(x_1 \ldots x_n) + U(\xi_1 \ldots \xi_{\lambda-1}, \pi_1 \ldots \pi_{\lambda-1}) \\ &\left.\begin{aligned} \xi_i(x_1' \ldots x_n') &= \Xi_i(\xi_1 \ldots \xi_{\lambda-1}, \pi_1 \ldots \pi_{\lambda-1}) \\ \pi_i(x_1' \ldots x_n') &= \Pi_i(\xi_1 \ldots \xi_{\lambda-1}, \pi_1 \ldots \pi_{\lambda-1}) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots \lambda - 1) \\ &\Omega_s(x_1 \ldots x_n, x_1' \ldots x_n') = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots n - 2\lambda + 1) \end{aligned}$$

wenn unter

$$d\zeta - \pi_1 d\xi_1 - \cdots - \pi_{\lambda-1} d\xi_{\lambda-1}$$

eine bestimmte Normalform von $\varDelta$ verstanden wird, und wenn die Formeln

$$\zeta' = \zeta + U(\xi, \pi); \ \xi_i' = \Xi_i, \ \pi_i' = \Pi_i \qquad (i = 1 \ldots \lambda - 1)$$

eine Berührungstransformation der $2\lambda - 1$ Variabeln $\zeta, \xi_i \pi_i$ definiren (Art. 201).

Kapitel IX.

Die explicite Reduktionsmethode.

§ 1. Methode von Frobenius.

211. Das wesentlichste Ergebnis der Grassmann'schen Theorie (Art. 118, 119) läfst sich in folgende beide Sätze zusammenfassen:

1) Kann ein Pfaff'scher Ausdruck $\varDelta$ auf eine Form mit l Differentialelementen

$$(1) \qquad \varDelta \equiv F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_l df_l$$

gebracht werden, worin $f_1 f_2 \,.\,.\, f_l$ unabhängige Funktionen von $x_1 \,.\,.\, x_n$ bedeuten, so ist die Invariante $\varkappa_1$, d. h. der Rang der zu $\varDelta$ gehörigen Matrix (B) (Art. 96) höchstens gleich $2l$.

2) Ist die Invariante $\varkappa_1 = 2\lambda$, so kann $\varDelta$ auf eine Form (1) mit $l = \lambda$ Differentialelementen gebracht werden.

Die Entwickelungen der Art. 71—80 setzen uns nun in den Stand, diese Sätze in einfachster Weise direkt zu begründen.

In der That, soll eine Identität der Form (1) bestehen, worin die f_ι unabhängig sind, so müssen die Gleichungen

$$(2) \qquad \varDelta = 0, \; \sum_1^n {}_s \frac{\partial f_i}{\partial x_s} dx_s = 0 \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, l-1)$$

ein l-gliedriges, unbeschränkt integrables System totaler Differentialgleichungen darstellen. Umgekehrt, ist dies der Fall, so besitzen die Gleichungen (2) aufser den integrabeln Kombinationen $df_1 \,.\,.\, df_{l-1}$ noch eine weitere, die mit df_l bezeichnet sei, und es existirt für $\varDelta$ wirklich eine Darstellung (1) (Art. 74).

Darnach erhebt sich die Frage: Wie müssen die Funktionen $f_1 f_2 \,.\,.\, f_{l-1}$ bestimmt werden, damit die Pfaff'schen Gleichungen (2) unbeschränkt integrabel seien?

Um diese Frage zu beantworten, haben wir nach Art. 80 nur auszudrücken, dafs gewisse l Matrices den Rang $2l$ besitzen. Setzen wir $\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = f_{ik}$, so ist die erste dieser Matrices, die wir mit (B_{l-1}) bezeichnen, die folgende:

$$
(B_{l-1})\quad \begin{vmatrix}
0 & a_{12} & \cdot\cdot & a_{1n} & a_1 & f_{11} & \cdot\cdot & f_{l-1,1} \\
a_{21} & 0 & \cdot\cdot & a_{2n} & a_2 & f_{12} & \cdot\cdot & f_{l-1,2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdot\cdot & 0 & a_n & f_{1n} & \cdot\cdot & f_{l-1,n} \\
-a_1 & -a_2 & \cdot\cdot & -a_n & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 \\
-f_{11} & -f_{12} & \cdot\cdot & -f_{1n} & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-f_{l-1,1} & -f_{l-1,2} & \cdot\cdot & -f_{l-1,n} & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0
\end{vmatrix};
$$

die übrigen $l-1$ Matrices sind wegen $\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_s} \equiv \frac{\partial f_{is}}{\partial x_k}$ alle identisch, und entstehen aus (B_{l-1}), indem man darin die a_{ik} durch Null ersetzt, besitzen also an sich schon den Rang $2l$, wenn wir annehmen, dafs in der Matrix

$$
(3)\qquad \begin{Vmatrix}
a_1 & a_2 & \cdot\cdot & a_n \\
f_{11} & f_{12} & \cdot\cdot & f_{1n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
f_{l-1,1} & f_{l-1,2} & \cdot\cdot & f_{l-1,n}
\end{Vmatrix}
$$

nicht alle l-reihigen Determinanten verschwinden, dafs also die Gleichungen (2) wirklich ein l-gliedriges Gleichungensystem bilden. Dann folgt auch, dafs der Rang der Matrix (B_{l-1}) nicht kleiner als $2l$ sein kann.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs der Pfaff'sche Ausdruck Δ als lineare Kombination der Differentiale von l unabhängigen Funktionen $f_1 \ldots f_l$ darstellbar sei, ist das Verschwinden aller $2l+2$-reihigen Hauptunterdeterminanten in der schiefsymmetrischen Matrix (B_{l-1}).

Da die Matrix (B) aus (B_{l-1}) durch Streichung der letzten $l-1$ Zeilen und Spalten entsteht, so ist klar, dafs der Rang von (B_{l-1}) nicht kleiner sein kann als die Invariante $\varkappa_1$, womit der erste der an die Spitze gestellten Sätze bereits bewiesen ist.

212. Wir bezeichnen jetzt mit (B_ν) die Matrix, die aus (B_{l-1}) entsteht, indem man darin den Index $l-1$ durch ν ersetzt; wir schreiben (B_ν) in der leicht verständlichen, abgekürzten Form:

$$
(B_\nu) \equiv \begin{Vmatrix}
a_{ik} & a_i & f_{hi} \\
-a_k & 0 & 0 \\
-f_{hk} & 0 & 0
\end{Vmatrix} \qquad (i, k = 1 \ldots n;\ h = 1, 2, \ldots \nu).
$$

Die Matrix (B_ν) ist darnach $n+\nu+1$-zeilig, und $(B_{\nu-1})$ entsteht aus (B_ν) durch Streichung der letzten Zeile und Spalte; (B_0) ist mit (B) identisch.

Dann gilt die folgende Thatsache:

Ist $\varkappa_1 = 2\lambda$ der Rang der Matrix (B_0), ferner ν ein Index der Reihe $1, 2 \,..\, \lambda$, und hat man $\nu - 1$ unabhängige Funktionen $f_1 f_2 \,..\, f_{\nu-1}$ bereits derartig bestimmt, dafs 2λ der Rang der Matrix $(B_{\nu-1})$ ist, so existirt eine von $f_1 \,..\, f_{\nu-1}$ unabhängige Funktion f_ν von der Beschaffenheit, dafs auch die Matrix (B_ν) den Rang 2λ besitzt.

Wir nehmen die Voraussetzung dieses Satzes als erfüllt an. Damit dann auch (B_ν) den Rang 2λ besitze, mufs dasselbe für diejenige Matrix der Fall sein, die aus (B_ν) durch Weglassung der letzten Spalte entsteht und mit (B_ν') bezeichnet werden möge. Umgekehrt, besitzt (B_ν') den Rang 2λ, so gilt dasselbe für (B_ν) (Art. 10, 25). Nunmehr betrachten wir die folgenden $n + \nu$ linearen homogenen Gleichungen mit den Unbekannten $\xi_0 \xi_1 \,..\, \xi_{n+\nu-1}$:

$$(4) \qquad \sum_1^n {}^k\, \xi_k a_{ik} + \xi_0 a_i + \sum_1^{\nu-1} {}^h\, \xi_{n+h} f_{hi} = 0 \qquad (i = 1 \,..\, n)$$

$$(5) \qquad \sum_1^n {}^k\, \xi_k a_k \qquad\qquad\qquad = 0$$

$$(6) \qquad \sum_1^n {}^k\, \xi_k f_{jk} \qquad\qquad\qquad = 0 \qquad (j = 1, \,..\, \nu - 1).$$

Die Matrix dieses Gleichungensystems ist $(B_{\nu-1})$, ihr Rang also 2λ; unsere Gleichungen besitzen mithin genau $n + \nu - 2\lambda$ linear unabhängige Lösungensysteme

$$(7) \quad \xi_1^{(s)} \,..\, \xi_n^{(s)},\ \xi_0^{(s)},\ \xi_{n+1}^{(s)} \,..\, \xi_{n+\nu-1}^{(s)} \qquad (s = 1, 2, \,..\, n + \nu - 2\lambda)$$

wo die $\xi_\iota^{(s)}$ gewisse Funktionen von $x_1 \,..\, x_n$ bezeichnen. Damit nun 2λ der Rang von (B_ν') sei, ist notwendig und hinreicheud, dafs die lineare Gleichung

$$f_{\nu 1} \xi_1 + \cdot\cdot + f_{\nu n} \xi_n = 0$$

eine Folge des Systems (4) (5) (6) sei (Art. 10), also von allen Lösungensystemen (7) ebenfalls erfüllt werde, m. a. W.: dafs die Funktion f_ν den nachstehenden linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen

$$(8) \quad X_s f \equiv \xi_1^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_s} + \cdot\cdot + \xi_n^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (s = 1, \,..\, n + \nu - 2\lambda)$$

genüge.

213. Wir behaupten nun, dafs die Gleichungen (8) ein $n + \nu - 2\lambda$-gliedriges vollständiges System darstellen. Zum Zwecke des Beweises fügen wir zu den schon vorhandenen Variabeln $x_1 \,..\, x_n$ die weiteren Independenten

(9) $$x_0,\ x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots\ x_{n+\nu-1}$$

hinzu, und betrachten das nachstehende System Pfaff'scher Gleichungen in den $n+\nu$ Variabeln $x_0 x_1 \ldots x_{n+\nu-1}$:

$$(10)\quad x_0 \sum_1^n{}^k a_{ik} dx_k + a_i dx_0 + \sum_1^{\nu-1}{}^h f_{hi} dx_{n+h} = 0 \quad (i = 1 \ldots n)$$

$$(11)\quad \sum_1^n{}^k a_k dx_k = 0$$

$$(12)\quad \sum_1^n{}^k f_{jk} dx_k = 0 \quad (j = 1, \ldots \nu - 1).$$

Setzen wir nun

$$A_0 \equiv 0; \quad A_i \equiv x_0 a_i \qquad (i = 1 \ldots n)$$
$$A_{n+h} \equiv -f_h \qquad (h = 1, 2, \ldots \nu - 1),$$

ferner

$$A_{rs} \equiv \frac{\partial A_r}{\partial x_s} - \frac{\partial A_s}{\partial x_r} \qquad (r, s = 0, 1 \ldots n + \nu - 1),$$

so hat man identisch:

$$\begin{aligned}
A_{i0} &\equiv -A_{0i} \equiv a_i && (i = 1 \ldots n)\\
A_{ik} &\equiv -A_{ki} \equiv a_0 a_{ik} && (i, k = 1 \ldots n)\\
A_{i,\,n+h} &\equiv -A_{n+h,\,i} \equiv f_{hi} && (h = 1, 2, \ldots \nu - 1;\ i = 1 \ldots n)\\
A_{n+h,\,n+l} &\equiv 0 && (h, l = 1, 2, \ldots \nu - 1)
\end{aligned}$$

und die Gleichungen (10) (11) (12) erhalten die Form

$$\sum_0^{n+\nu-1}{}^s A_{rs} dx_s = 0 \qquad (r = 0, 1, \ldots n + \nu - 1).$$

Aus Art. 79 folgt jetzt unmittelbar, daſs die linear unabhängigen unter den Gleichungen (10) (11) (12) ein unbeschränkt integrables System in den Variabeln x_0, $x_1 \ldots x_{n+\nu-1}$ vorstellen. Da der Rang der Matrix $(B_{\nu-1})$ gleich 2λ ist, und ungeändert bleibt, wenn man alle Elemente der ersten n Zeilen mit x_0 multiplizirt, und hinterher die Elemente der letzten ν Spalten durch x_0 dividirt (Art. 12), so reduziren sich die Gleichungen (10) (11) (12) auf genau 2λ linear unabhängige. Da ferner mindestens *eine* 2λ-reihige Determinante von (B_0) nicht identisch verschwindet, so lassen sich die 2λ linear unabhängigen unter den Gleichungen (10)—(12) insbesondere aus dem System (10) auswählen.

Da endlich $f_1, f_2, \ldots f_{\nu-1}$ der Voraussetzung nach von einander unabhängig sind, so können wir, um die Ideen zu fixiren, annehmen, daſs sie insbesondere hinsichtlich $x_1 x_2 \ldots x_{\nu-1}$ unabhängig seien. Es muſs dann in der Matrix

$$(E_{\nu-1}) \qquad \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{\nu-1,1} & f_{\nu-1,2} & \ldots & f_{\nu-1,n} \end{Vmatrix}$$

eine ν-reihige Determinante geben, welche die ersten $\nu - 1$ Spalten enthält und nicht identisch verschwindet. Im entgegengesetzten Fall verschwänden nämlich alle ν-reihigen Determinanten der Matrix $(E_{\nu-1})$ (Art. 7), also wäre Δ in der Form $\varrho_1 df_1 + \cdots + \varrho_{\nu-1} df_{\nu-1}$ darstellbar, könnte also nicht die Klasse 2λ oder $2\lambda - 1$ besitzen, da $\nu - 1 < \lambda$. Wir dürfen mithin ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daſs die aus den ν ersten Spalten von $(E_{\nu-1})$ bestehende Determinante nicht null ist, daſs sonach die ersten ν Gleichungen (10) linear unabhängig seien. Aus dem System (10) lassen sich dann noch $2\lambda - \nu$ weitere Gleichungen auswählen, die mit den vorigen zusammen ein System von 2λ linear unabhängigen Gleichungen bilden. Wir wollen, um die Ideen zu fixiren, die 2λ ersten Gleichungen als linear unabhängig voraussetzen und mit:

$$(13) \qquad \nabla_1 = 0, \; \nabla_2 = 0, \ldots \nabla_{2\lambda} = 0$$

bezeichnen.

Dies vorausgeschickt, fragen wir nach der Maximalzahl von linear unabhängigen Kombinationen der Gleichungen (10) (11) (12), welche die Differentiale

$$(14) \qquad dx_0, \; dx_{n+1} \ldots dx_{n+\nu-1}$$

nicht enthalten: es genügt offenbar, das System (13) daraufhin zu untersuchen, da alle andern Gleichungen (10) (11) (12) eine Folge von (13) sind. Soll nun die lineare Kombination

$$(15) \qquad 0 = \varrho_1 \nabla_1 + \cdots + \varrho_{2\lambda} \nabla_{2\lambda}$$

von den Differentialen (14) frei sein, so müssen die ϱ_i den Relationen

$$\sum_1^{2\lambda} {}^i \varrho_i a_i = 0; \quad \sum_1^{2\lambda} {}^i \varrho_i f_{hi} = 0 \quad (h = 1, \ldots \nu - 1)$$

genügen. Diese Gleichungen besitzen nun $2\lambda - \nu$ und nicht mehr linear unabhängige Lösungensysteme, also giebt es genau $2\lambda - \nu$ linear unabhängige Gleichungen der Form (15), welche von den Differentialen (14) frei sind, und die wir so schreiben wollen:

$$(16) \qquad \nabla_s' = 0 \qquad (s = 1, 2, .. 2\lambda - \nu).$$

Aus den linken Seiten dieser Gleichungen läfst sich aber der Faktor x_0 wegheben und sie enthalten dann die Variabeln x_0, $x_{n+1} .. x_{n+\nu-1}$ auch in den Koeffizienten nicht mehr, bilden also nach Art. 75 für sich genommen ein $2\lambda - \nu$-gliedriges, unbeschränkt integrables System Pfaff'scher Gleichungen. Das zu (10) (11) (12) adjungirte vollständige System hat nun offenbar die Form:

$$\frac{1}{x_0}\sum_1^n {}^k \xi_k^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \xi_0^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_0} + \sum_1^{\nu-1} {}^h \xi_{n+h}^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_{n+h}} = 0 \quad (s=1,2,..n+\nu-2\lambda).$$

Nach Art. 75 hat also das zu (16) adjungirte System die Form (8), und ist vollständig, was zu zeigen war.

Es sei hervorgehoben, dafs diese ganze Betrachtung selbstverständlich auch unter der Annahme $\nu = 1$ gilt; das vollständige System (8) ist dann im Falle $\varkappa = \varkappa_1 = 2\lambda$ augenscheinlich mit dem zu $\varDelta$ gehörigen System V, im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ dagegen mit W identisch, und der soeben durchgeführte Vollständigkeitsbeweis stimmt genau mit demjenigen überein, den wir früher (Art. 140) für die Systeme V und W in den genannten Fällen geliefert haben.

214. Aus dem bisherigen folgt, dafs die Matrix (B_ν) unter den Voraussetzungen des Art. 212 dann und nur dann den Rang 2λ besitzt, wenn die Funktion f_ν dem vollständigen System (8) genügt. Dieses vollständige System besitzt nun $2\lambda - \nu$ unabhängige Integrale. Unter diesen befinden sich die Funktionen $f_1, f_2, .. f_{\nu-1}$; denn ist f_ν mit einer dieser Funktionen identisch, so besitzt (B_ν) offenbar den Rang 2λ. Ein System unabhängiger Integrale von (8) kann daher in der Form

$$f_1 f_2 .. f_{\nu-1} f_\nu' f_{\nu+1}' .. f_{2\lambda-\nu}'$$

dargestellt werden. Wählt man dann für f_ν eine arbiträre Funktion der Form:

$$\varphi(f_1 .. f_{\nu-1}, f_\nu' .. f_{2\lambda-\nu}')$$

die mindestens eine der Funktionen f_s' wirklich enthält, so ist f_ν von den Funktionen $f_1 .. f_{\nu-1}$ unabhängig.

Die Bestimmung einer Funktion f_ν von der in Art. 212 geforderten Eigenschaft ist sonach stets möglich, falls $\nu \leqq \lambda$; sie erfordert nach Art. 88 eine Integrationsoperation der Ordnung $2\lambda - 2\nu + 1$, denn es handelt sich dabei darum, von einem $n + \nu - 2\lambda$-gliedrigen vollständigen System, von dem $\nu - 1$ Lösungen bereits bekannt sind, ein neues Integral zu ermitteln, und man hat:

$$n - (n - 2\lambda + \nu) - (\nu - 1) = 2\lambda - 2\nu + 1.$$

Hat man solcherweise durch je eine Operation

$$2\lambda - 1,\ 2\lambda - 3,\ ..\ 5,\ 3$$

die $\lambda - 1$ unabhängigen Funktionen $f_1 .. f_{\lambda-1}$ ermittelt, so ist das System Pfaff'scher Gleichungen

$$(17) \qquad \varDelta = 0,\ df_1 = 0,\ ..\ df_{\lambda-1} = 0$$

unbeschränkt integrabel, und die noch fehlende integrable Kombination df_λ läſst sich durch eine Operation 1 bestimmen (Art. 88). Derselbe Sachverhalt kann auch so ausgedrückt werden: Bestimmt man eine Funktion f_λ so, daſs auch (B_λ) den Rang 2λ besitzt, was nach dem Vorigen durch eine Operation 1 geschieht, so gestattet $\varDelta$ eine Darstellung der Form

$$(18) \qquad \varDelta \equiv F_1 df_1 + \cdots + F_\lambda df_\lambda;$$

in der That, verschwinden in (B_λ) alle $2\lambda + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten, so verschwinden auch die Quadrate aller $\lambda + 1$-reihigen Determinanten des Schemas

$$(E_\lambda) \qquad \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & .. & a_n \\ f_{11} & f_{12} & .. & f_{1n} \\ . & . & . & . \\ f_{\lambda 1} & f_{\lambda 2} & .. & f_{\lambda n} \end{matrix} \right\|,$$

und da nach Voraussetzung nicht alle λ-reihigen Determinanten der nach $x_1 .. x_n$ genommenen Funktionalmatrix von $f_1 .. f_\lambda$ null sind, so kann man die linearen Gleichungen

$$a_i = F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \cdots + F_\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \qquad (i = 1 .. n)$$

hinsichtlich der Unbekannten $F_1 .. F_\lambda$ auflösen. Damit ist auch der zweite der Sätze, die wir an die Spitze dieses Kapitels gestellt haben, auf's neue nachgewiesen.

Beiläufig bemerken wir noch, daſs das $n - \lambda$-gliedrige vollständige System, das zur Bestimmung von f_λ dient, d. h. also das zu (17) adjungirte vollständige System einfach dadurch erhalten wird, daſs man in (E_λ) statt $f_{\lambda 1} .. f_{\lambda n}$ bezw. $\frac{\partial f}{\partial x_1} .. \frac{\partial f}{\partial x_n}$ schreibt, und sodann alle $\lambda + 1$-reihigen Determinanten dieses Systems null setzt.

215. Ist $\varkappa = \varkappa_1 = 2\lambda$, so gewinnen wir durch die vorstehende

Methode eine Normalform von $\varDelta$, und zwar stimmen die dazu nötigen Integrationsoperationen nach Zahl und Ordnung mit denjenigen überein, die nach dem Verfahren des Art. 156 erforderlich sind. Im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ dagegen erhalten wir auf dem angegebenen Wege lediglich eine reduzirte Form mit λ Differentialelementen, und die Methode erfordert jetzt ebenso wie die in Art. 161 skizzirte, je eine Operation

$$\varkappa, \varkappa - 2 \,.\,.\, 3, 1$$

und zwar kommt unter der Annahme $\varkappa = n$, also im Falle eines bedingungslosen $\varDelta$ mit ungerader Variabelnzahl die erste dieser Operationen in Wegfall, da f_1 jetzt eine willkürliche Funktion der Variabeln $x_1 \,.\,.\, x_n$ bedeutet. In der That ist ja der Rang der $2\lambda + 1$-reihigen schiefsymmetrischen Matrix (B_1) unter den gegenwärtigen Voraussetzungen stets gleich 2λ, wie auch die Funktion f_1 gewählt werden mag (vgl. den Schlufs von Art. 111).

216. Um auch bei ungeradem $\varkappa$ eine Normalform zu erhalten, liegt es am nächsten, diesen Fall auf denjenigen eines geraden $\varkappa$ dadurch zurückzuführen, dafs man den Ausdruck $\varDelta$ durch Subtraktion eines totalen Differentials df_λ zunächst in einen Pfaff'schen Ausdruck

$$\varDelta' = \varDelta - df_\lambda$$

der Klasse $\varkappa - 1 = 2\lambda - 2$ verwandelt. Nach Art. 147 erfordert die Ermittelung einer derartigen Funktion f_λ eine Operation $\varkappa$. Versteht man dann unter $(\overline{B}_\nu)$ diejenige Matrix, die aus (B_ν) dadurch entsteht, dafs man darin für die in der $n + 1^{\text{ten}}$ Zeile und Spalte stehenden Elemente a_i bezw. die Ausdrücke $a_i - \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}$ substituirt, so lassen sich auf den Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta'$ unmittelbar die Überlegungen der Art. 211—14 übertragen, wenn man darin überall (B_ν) durch $(\overline{B}_\nu)$ und die Zahl λ durch $\lambda - 1$ ersetzt. Hat man so für $\varDelta'$ eine Normalform erhalten, so ergiebt sich für $\varDelta$ die Darstellung

$$\varDelta \equiv df_\lambda + F_1 df_1 + \cdots + F_{\lambda-1} df_{\lambda-1}; \tag{19}$$

doch erfordert diese Methode je eine Operation

$$\varkappa, \varkappa - 2, \,.\,.\, 3, 1.$$

Diese Operationen sind höher als die des Art. 159, und es liegt daher die Vermutung nahe, dafs unser Verfahren noch eine Vereinfachung zuläfst.

217. Zu diesem Zwecke führen wir neben den Variabeln $x_1 \,.\,.\, x_n$ noch eine $n + 1^{\text{te}}$ Independente x ein; ist dann $\varDelta$ in der Form (19) darstellbar, so bilden die totalen Differentialgleichungen

$$(20)\qquad dx + \varDelta = 0,\ df_1 = 0,\ ..\ df_{\lambda-1} = 0$$

offenbar ein λ-gliedriges unbeschränkt integrables System, da sie λ unabhängige integrable Kombinationen $d(x + f_\lambda)$, $df_1 \,..\, df_{\lambda-1}$ besitzen. Umgekehrt, ist das System (20) unbeschränkt integrabel, so gilt für alle Werte der Variabeln

$$(21)\qquad x, x_1 \,..\, x_n$$

und ihrer Differentiale eine Identität der Form:

$$(22)\qquad dx + \sum_1^n{}^i a_i dx_i \equiv \varrho\, d\varphi + \sum_1^{\lambda-1}{}^i \varrho_i df_i,$$

worin ϱ, ϱ_i, φ gewisse Funktionen der Variabeln (21) bedeuten.

Wir können, um die Ideen zu fixiren, annehmen, daſs die Funktionen

$$f_1, f_2, \,..\, f_{\lambda-1}$$

hinsichtlich der Variabeln x_1, x_2, .. $x_{\lambda-1}$ unabhängig sind. Führt man dann mittels der Transformationsformeln

$$y_1 = f_1 \,..\, y_{\lambda-1} = f_{\lambda-1}$$

statt $x_1 \,..\, x_{\lambda-1}$ die y_i als neue Veränderliche ein, so erhält die Identität (22) die Form

$$(23)\qquad dx + \sum_\lambda^n{}^k b_k dx_k + \sum_1^{\lambda-1}{}^i b_i dy_i = \sigma\, d\psi + \sum_1^{\lambda-1}{}^i \sigma_i dy_i,$$

worin die b_i, b_k gewisse Funktionen von $y_1 \,..\, y_{\lambda-1} x_\lambda \,..\, x_n$ bedeuten, während die σ, σ_i, ψ auſserdem noch x enthalten. Aus der Identität (23) folgen jetzt u. a. die Beziehungen

$$(24)\qquad 1 \equiv \sigma \frac{\partial \psi}{\partial x};$$

$$(25)\qquad b_k \equiv \sigma \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \quad (k = \lambda,\ \lambda + 1 \,..\, n).$$

Aus (25) erhält man

$$(26)\qquad \frac{\partial b_k}{\partial x_l} - \frac{\partial b_l}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial x_l}\frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma}{\partial x_k}\frac{\partial \psi}{\partial x_l} \quad (k, l = \lambda, \lambda + 1, \,..\, n).$$

Differentiirt man andererseits die Identität (25) nach x, und (24) nach x_k, so folgt, da b_k von x nicht abhängt, durch Subtraktion:

$$(27)\qquad 0 = \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial x_k} \quad (k = \lambda,\ \lambda + 1 \,..\, n).$$

Da wegen (24) die Ableitung $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ nicht identisch verschwinden kann, so lassen sich aus (27) die Ableitungen $\frac{\partial \sigma}{\partial x_k}$ berechnen. Setzt man die so erhaltenen Ausdrücke in (26) ein, so folgt das identische Verschwinden der rechten Seiten, d. h. der Pfaff'sche Ausdruck

$$\sum_{\lambda}^{n} {}^{k}\, b_k dx_k$$

ist ein exaktes Differential $d\omega(y_1 \ldots y_{\lambda-1} x_\lambda \ldots x_n)$, wenn bei der Ausrechnung dieses Differentials die y_i als Konstante behandelt werden. Die Funktion ω wird durch eine Operation null ermittelt, und ist bis auf eine additive arbiträre Funktion von $y_1 \ldots y_{\lambda-1}$ bestimmt. Für $\varDelta$ folgt jetzt die Darstellung:

$$\varDelta \equiv d\omega + \sum_{1}^{\lambda-1} {}^{i} \left(b_i - \frac{\partial \omega}{\partial y_i}\right) dy_i$$

wenn $d\omega$ auf alle n Variabeln $y_1 \ldots y_{\lambda-1} x_\lambda \ldots x_n$ bezogen wird, und hieraus die Normalform (19), wenn man die y_i wieder durch die f_i ersetzt, und die aus ω dadurch entstehende Funktion mit f_λ bezeichnet.

Aus der vorstehenden Überlegung folgt:

Zum Bestehen der Identität (19) ist notwendig und hinreichend, daſs die Gleichungen (20) ein λ-gliedriges unbeschränkt integrabeles System Pfaff'scher Gleichungen mit den $n+1$ Variabeln $x, x_1 \ldots x_n$ darstellen. Sind die Funktionen $f_1 \ldots f_{\lambda-1}$ so gewählt, daſs dies zutrifft, so erhält man f_λ durch gewisse Eliminationen und eine Quadratur, worauf sich die Koeffizienten F_i aus (19) durch Auflösung linearer Gleichungen ergeben.

218. Um auszudrücken, daſs die Gleichungen (20) unbeschränkt integrabel sind, hat man nach Art. 80 nur die Bedingungen dafür aufzuschreiben, daſs gewisse λ Matrices den Rang 2λ besitzen, und zwar erfüllen $\lambda - 1$ von diesen Matrices die genannte Bedingung von selbst, während die λ^{te} Matrix so lautet:

$$(28)\quad \left\| \begin{matrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 & a_1 & f_{11} & f_{21} & \ldots & f_{\lambda-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 & 0 & a_n & f_{1n} & f_{2n} & \ldots & f_{\lambda-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_n & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -f_{11} & -f_{12} & \ldots & -f_{1n} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -f_{\lambda-1,1} & -f_{\lambda-1,2} & \ldots & -f_{\lambda-1,n} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\| .$$

Es sei (C_ν) die Matrix, die hieraus entsteht, indem man die $n+1^{\text{te}}$ und $n+2^{\text{te}}$ Zeile und Spalte streicht, und $\lambda-1$ durch ν ersetzt; dann lautet (C_ν) in abgekürzter Schreibweise so:

$$(C_\nu) \qquad \begin{Vmatrix} a_{ik} & f_{hi} \\ f_{hk} & 0 \end{Vmatrix} \qquad (i, k = 1\,..\,n;\ h = 1,..\,\nu).$$

Ist nun 2λ der Rang von (28), so ist, wie man sofort erkennt, $2\lambda-2$ der Rang von $(C_{\lambda-1})$ und umgekehrt.

Damit also die $\lambda-1$ *unabhängigen Funktionen* $f_1\,..\,f_{\lambda-1}$ *eine Identität der Form* (19) *erfüllen, ist notwendig und hinreichend, daſs der Rang der Matrix* $(C_{\lambda-1})$ *gleich* $2\lambda-2$ *sei.*

Wir denken uns nun die $\nu-1$ unabhängigen Funktionen $f_1 f_2\,..\,f_{\nu-1}$ bereits so bestimmt, daſs die Matrix $(C_{\nu-1})$ den Rang $2\lambda-2$ besitzt; es läſst sich dann, behaupten wir, stets eine von $f_1\,..\,f_{\nu-1}$ unabhängige Funktion f_ν derart bestimmen, daſs auch (C_ν) den Rang $2\lambda-2$ besitzt, vorausgesetzt, daſs $\nu \leqq \lambda-1$ sei.

In der That, unter den gemachten Annahmen reduziren sich die $n+\nu-1$ linearen Gleichungen mit den Unbekannten $\xi_1\,..\,\xi_{n+\nu-1}$:

$$\sum_1^n{}^k a_{ik}\xi_k + \sum_1^{\nu-1}{}^h f_{hi}\xi_{n+h} = 0 \qquad (i = 1\,..\,n)$$

$$\sum_1^n{}^k f_{jk}\xi_k \qquad\qquad = 0 \qquad (j = 1,..\,\nu-1)$$

auf nur $2\lambda-2$ linear unabhängige, besitzen also $n+\nu-2\lambda+1$ linear unabhängige Lösungensysteme:

$$\xi_1^{(s)}\xi_2^{(s)}\,..\,\xi_{n+\nu-1}^{(s)} \quad (s = 1, 2,..\,n+\nu-2\lambda+1)$$

und man erkennt, daſs der Rang von (C_ν) dann und nur dann $2\lambda-2$ ist, wenn die Funktion f_ν den partiellen Differentialgleichungen

$$(29) \qquad \sum_1^n{}^i \xi_i^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (s = 1, 2,..\,n+\nu-2\lambda+1)$$

genügt. Nun stellen aber die Gleichungen

$$(30) \qquad \sum_1^n{}^k a_{ik}dx_k + \sum_1^{\nu-1}{}^h f_{hi}dx_{n+h} = 0 \qquad (i = 1\,..\,n)$$

$$\sum_1^n{}^k f_{jk}dx_k \qquad\qquad = 0 \qquad (j = 1\,..\,\nu-1)$$

ein $2\lambda-2$-gliedriges unbeschränkt integrables System in den Variabeln

$x_1 \,.\,. x_n,\ x_{n+1} \,.\,. x_{n+\nu-1}$ dar. In der That, setzen wir

$$a_{n+h} \equiv f_h;\ a_{rs} \equiv \frac{\partial a_r}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s}{\partial x_r} \quad (r,s=1,..n+\nu-1;\, h=1,..\nu-1)$$

so können obige Pfaff'sche Gleichungen so geschrieben werden:

$$\sum_1^{n+\nu-1}{}^s\, a_{rs} dx_s = 0 \qquad (r = 1 \,.\,. n+\nu-1).$$

Da der Rang der Matrix

$$(C_0) \qquad \| a_{ik} \| \quad . \ (i, k = 1 \,.\,. n)$$

unter den gegenwärtigen Annahmen $2\lambda - 2$ ist, so kann man $2\lambda - 2$ unabhängige Gleichungen insbesondere aus den Relationen (30) auswählen. Aus der Unabhängigkeit der Funktionen $f_1 \,.\,. f_{\nu-1}$ folgt jetzt ähnlich wie in Art. 213, dafs sich aus (30) genau $2\lambda - \nu - 1$ linear unabhängige Gleichungen ableiten lassen, die von den Differentialen $dx_{n+1},\ dx_{n+2}$ .. frei sind; da diese Gleichungen die Variabeln x_{n+1}, x_{n+2} .. auch in den Koeffizienten nicht enthalten, so bilden sie, für sich genommen, nach Art. 75 ein $2\lambda - \nu - 1$-gliedriges unbeschränkt integrables System; die dazu adjungirten Gleichungen (29) stellen also *ein $n + \nu - 2\lambda + 1$-gliedriges vollständiges System dar.*

Dieses System besitzt offenbar die Integrale $f_1 \,.\,. f_{\nu-1}$, aufserdem wegen $\nu \leqq \lambda - 1$ noch $2\lambda - 2\nu$ von den vorigen und von einander unabhängige Lösungen

$$f'_\nu f'_{\nu+1} \,.\,. f'_{2\lambda-\nu-1}.$$

Setzt man nun

$$f_\nu \equiv \varphi(f_1 \,.\,. f_{\nu-1} f'_\nu f'_{\nu+1} \,.\,. f'_{2\lambda-\nu-1}),$$

wo φ eine arbiträre Funktion bedeutet, die wenigstens eine der Funtionen f'_i wirklich enthält, so ist f_ν eine von $f_1 \,.\,. f_{\nu-1}$ unabhängige Funktion der verlangten Beschaffenheit.

Die Ermittelung von f_ν geschieht sonach mittels einer Operation $2\lambda - 2\nu$. Nach dieser Methode verlangt also die Herstellung einer Normalform im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ je eine Integrationsoperation

$$\varkappa - 1,\ \varkappa - 3,\ \ldots\ 4,\ 2$$

und aufserdem nach Art. 217 noch eine Operation 0. Es sind dies nach Zahl und Ordnung dieselben Operationen wie die des Art. 159; f_1 ist offenbar ein beliebiges Integral des zu $\varDelta$ gehörigen vollständigen Systems V.

Es sei zum Schlusse hervorgehoben, dafs die Entwickelungen dieses § zusammen mit den Sätzen in Art. 127 und 129 einen *vierten* Beweis des Fundamentaltheorems bilden (vgl. Art. 124; 147; 158); doch werden wir im nächsten § erkennen, daſs dieser Beweis von demjenigen des Art. 158 nicht wesentlich verschieden ist.

§ 2. Die vollständigen Systeme V_ν und W_ν.

219. Zur wirklichen Aufstellung der vollständigen Systeme, die bei den Reduktionsmethoden des vorigen § benutzt wurden, fassen wir zunächst den Fall $\varkappa = 2\lambda$ ins Auge, und setzen dabei, wie bisher immer, voraus, daſs das Pfaff'sche Aggregat:

$$P \equiv (1, 2, \ldots 2\lambda)$$

nicht identisch verschwinde. Um die Symbolik der Pfaff'schen Aggregate auch auf die schiefsymmetrischen Matrices (B_ν) des vorigen § anwenden zu können, setzen wir, wie bisher

$$(1) \qquad \begin{cases} (ik) \equiv -(ki) \equiv a_{ik} & (i, k = 1, 2, \ldots n) \\ (oi) \equiv -(io) \equiv a_i & (i = 1 \ldots n) \end{cases}$$

und auſserdem:

$$(2) \qquad \begin{cases} (n+h, i) \equiv -(i, n+h) \equiv f_{hi} \equiv \dfrac{\partial f_h}{\partial x_i} & (h = 1, \ldots \lambda;\ i = 1 \ldots n) \\ (n+h, n+l) \equiv 0 & (h, l = 1, 2, \ldots \lambda) \\ (n+h, 0) \equiv 0 & (h = 1, 2, \ldots \lambda). \end{cases}$$

Es seien jetzt wieder wie in Art. 212 die unabhängigen Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_{\nu-1}$ bereits so bestimmt, daſs die Matrix $(B_{\nu-1})$ den Rang 2λ besitze; dann verschwinden alle $2\lambda + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten in $(B_{\nu-1})$, also hat man identisch:

$$(1, 2, \ldots 2\lambda, \varrho, \sigma) = 0 \quad (\varrho, \sigma = 0, 2\lambda + 1, 2\lambda + 2, \ldots n + \nu - 1).$$

Umgekehrt, sind alle diese Bedingungen erfüllt, so verschwinden nach Art. 26 überhaupt alle $2\lambda + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten von $(B_{\nu-1})$, und der Rang dieses Schemas ist also 2λ. Damit nun auch (B_ν) den Rang 2λ besitze, ist notwendig und hinreichend, daſs man identisch habe

$$(3) \qquad (1, 2, \ldots 2\lambda, \varrho, n + \nu) = 0$$

$$(\varrho = 0,\ 2\lambda + 1,\ 2\lambda + 2,\ \ldots n,\ n + 1,\ \ldots n + \nu - 1).$$

Rechnet man die Pfaff'schen Aggregate (3) nach den Regeln des Art. 18 oder 20 und mit Rücksicht auf die Identitäten (2) aus, und ersetzt f_ν überall durch f, so erhält man $n + \nu - 2\lambda$ unabhängige lineare homogene partielle Differentialgleichungen mit der Unbekannten f, und diese Gleichungen müssen mit dem System (8) des vorigen § identisch sein. Bezeichnet man nun, wie früher, mit $\Pi_{k,\varrho}$ dasjenige Pfaff'sche Aggregat der Ordnung n, das aus P entsteht, wenn man darin die Ziffer k durch ϱ ersetzt, so folgt:

$$(4)\quad (n+\nu, \varrho, 1, 2, \ldots 2\lambda) \equiv (n+\nu, \varrho)\cdot P - \sum_1^{2\lambda}{}^k (n+\nu, k)\Pi_{k,\varrho}.$$

Mit Rücksicht auf (2), und nach Ersetzung von f_ν durch f liefern also die Relationen (3) für $\varrho = 0,\ 2\lambda+1, \ldots n$ die folgenden Gleichungen:

$$(5)\quad \sum_1^{2\lambda}{}^k \Pi_{k0}\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

$$(6)\quad -P\cdot\frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda+s}} + \sum_1^{2\lambda}{}^k \Pi_{k,2\lambda+s}\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots n-2\lambda).$$

Man hat ferner:

$$(7)\quad \Pi_{k,\varrho} \equiv (-1)^{k+1}(\varrho, 1, \ldots k-1, k+1\ldots 2\lambda) \equiv -\sum_1^{2\lambda}{}^l (\varrho l)P_{kl}$$

wobei das Symbol

$$(-1)^{k+l+1}\cdot P_{kl},$$

falls $k < l$, ähnlich wie in Art. 21, dasjenige Pfaff'sche Aggregat der Ordnung $2\lambda - 2$ bedeutet, das aus P durch Weglassung der Ziffern k und l entsteht, und allgemein $P_{kl} \equiv -P_{kl}$ gesetzt wird.

Berücksichtigt man die Identitäten (2) (4) (7), und ersetzt f_ν durch f, so liefern die Relationen (3) unter der Annahme $\varrho = n+1$, $n+2, \ldots n+\nu-1$ die folgenden Beziehungen:

$$(8)\quad \sum_1^{2\lambda}{}^k\sum_1^{2\lambda}{}^l P_{kl}\frac{\partial f_h}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots \nu-1).$$

220. Wir führen jetzt die nachstehenden Symbole ein:

$$(9)\quad \begin{cases} (f)_0 \equiv \dfrac{-1}{P}\displaystyle\sum_1^{2\lambda}{}^k \Pi_{k0}\frac{\partial f}{\partial x_k} \\ (f)_s \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_{2\lambda+s}} - \dfrac{1}{P}\displaystyle\sum_1^{2\lambda}{}^k \Pi_{k,2\lambda+s}\frac{\partial f}{\partial x_k} \\ (\varphi f) \equiv \dfrac{1}{P}\displaystyle\sum_1^{2\lambda}{}^k\sum_1^{2\lambda}{}^l P_{kl}\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_k}. \end{cases}$$

Dann können wir die Gleichungen (5) (6) (8), die zur Bestimmung von f_ν dienen, so schreiben:

$$(10)\qquad (f)_0 = 0 \quad (f)_s = 0 \qquad (s = 1, 2, .. n - \varkappa)$$

$$(11)\qquad (f_h f) = 0 \qquad (h = 1, 2, .. \nu - 1).$$

Wir wollen diese Gleichungen als das „vollständige System $V_{\nu-1}$" bezeichnen.

Darnach entsteht das vollständige System V_ν aus $V_{\nu-1}$ durch Hinzufügung der Gleichung $(f_\nu f) = 0$. Das vollständige System V_0 besteht aus den Gleichungen (10) und ist mit V identisch (Art. 129).

221. Ist jetzt $x_1^0 .. x_n^0$ eine Stelle, an der alle a_ι regulär und die Pfaff'schen Aggregate P, $\Pi_{2\lambda,0}$ nicht null sind, so ist das System V nach den Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}, \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+1}} .. \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

auflösbar, und die Koeffizienten dieser aufgelösten Form sind an der Stelle $x_1^0 .. x_n^0$ regulär (Art. 163).

Wir dürfen dann für jeden Index ν der Reihe $1, .. \lambda$ annehmen, dafs die Funktionen $f_1 .. f_{\nu-1}$ an der Stelle $x_1^0 .. x_n^0$ regulär sind und die Funktionaldeterminante

$$\begin{pmatrix} f_1 .. f_{\nu-1} \\ x_1 .. x_{\nu-1} \end{pmatrix}$$

daselbst nicht verschwindet, dafs ferner das vollständige System V_ν nach den Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-\nu}} \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-\nu+1}} .. \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

in der Form:

$$(V_\nu)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_s} = \sum_1^{\varkappa-\nu-1} {}_k\, \xi_{sk}^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial k} \qquad (s = \varkappa - \nu, \varkappa - \nu + 1, .. n)$$

auflösbar, und alle Funktionen $\xi_{sh}^{(\nu)}$ an der Stelle $x_1^0 .. x_n^0$ regulär sind.

Da unsere Behauptung für $\nu = 0$ zutrifft, so haben wir nur zu zeigen, dafs sie für den Index ν richtig ist, wenn sie für den Index $\nu - 1$ bereits bewiesen ist.

Es seien also die Funktionen $f_1 .. f_{\nu-1}$ bereits so bestimmt, dafs ihre nach $x_1 .. x_{\nu-1}$ genommene Funktionaldeterminante an der Stelle $x_1^0 .. x_n^0$ nicht null ist; ferner seien die totalen Differentialgleichungen:

$$(12)\quad \begin{cases} x_0 \sum\limits_1^n {}^k a_{ik}\, dx_k + a_i\, dx_0 + \sum\limits_1^{\nu-1} {}^h f_{hi}\, dx_{n+h} = 0 & (i = 1 \,..\, n) \\ \sum {}^k a_k\, dx_k = 0 & \\ \sum {}^k f_{jk}\, dx_k = 0 & (j = 1 \,..\, \nu - 1) \end{cases}$$

nach den Differentialen

$$dx_0,\ dx_{n+1} \,..\, dx_{n+\nu-1},\ dx_1,\ dx_2 \,..\, dx_{2\lambda-\nu}$$

auflösbar, d. h. das Pfaff'sche Aggregat der Ordnung 2λ:

$$(13)\qquad (1, 2, \,..\, 2\lambda - \nu, 0, n+1, n+2, \,..\, n+\nu-1)$$

sei nicht identisch null, und insbesondere an der Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ von null verschieden. Die aufgelöste Form des Systems (12) enthält dann u. a. Gleichungen der folgenden Gestalt:

$$-dx_k = \sum_{\varkappa-\nu+1}^{n} {}^s\, \xi_{sk}^{(\nu-1)}\, dx_s \qquad (k = 1, 2, \,..\, 2\lambda - \nu),$$

wo die Koeffizienten $\xi_{sk}^{(\nu-1)}$ nur von den $x_1 \,..\, x_n$ abhängen und an der Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ regulär sind; das System $V_{\nu-1}$, das zu unserm System Pfaff'scher Gleichungen adjungirt ist, hat dann die Form

$$(V_{\nu-1})\quad \frac{\partial f}{\partial x_s} = \sum_1^{\varkappa-\nu} {}^k\, \xi_{sk}^{(\nu-1)} \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (s = \varkappa - \nu + 1, \varkappa - \nu + 2, \,..\, n),$$

besitzt also unbegrenzt viele, an der Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ reguläre Integrale f, und zwar kann die Funktion $\varphi(x_1 \,..\, x_{2\lambda-\nu})$, auf die sich f vermöge der Substitution

$$x_s = x_s^0 \qquad (s = \varkappa - \nu + 1, \,..\, n)$$

reduzirt, beliebig gewählt werden (Art. 62), also sind insbesondere die Werte $f_{\nu k}^0$, welche die Ableitungen

$$(14)\qquad (n+\nu, k) \equiv f_{\nu k} \equiv \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \,..\, 2\lambda - \nu)$$

an der Stelle $x_1^0 \,..\, x_n^0$ annehmen, willkürlich wählbar. Daher läfst sich (wegen $\nu \leqq \lambda$) ein Integral f_ν des Systems $V_{\nu-1}$ so bestimmen, dafs die nach $x_1 \,..\, x_\nu$ genommene Funktionaldeterminante von $f_1 \,..\, f_\nu$ an der Stelle x_i^0 nicht null ist. Wir betrachten ferner alle Pfaff'schen Aggregate der Form

$$(15)\qquad (k_1, k_2, \,..\, k_{2\lambda-\nu-1}, 0, n+1, n+2, \,..\, n+\nu),$$

worin die k_i beliebige Indices der Reihe

$$1, 2, .. 2\lambda - \nu$$

bedeuten. Dann lassen sich, behaupten wir, die willkürlichen Konstanten $f^0_{\nu k}$ so wählen, daſs an der Stelle x_i^0 wenigstens *eines* der Aggregate (15) nicht null ist. Andernfalls verschwänden nämlich, wie man auf Grund der Formel (18) p. 25 und der Willkürlichkeit der $f^0_{\nu k}$ leicht erkennt, an dieser Stelle alle Aggregate $2\lambda - 2^{\text{ter}}$ Ordnung der Form:

$$(k_1, k_2, .. k_{2\lambda-\nu-2}, 0, n+1, n+2, .. n+\nu-1)$$

und daher auch das Aggregat (13), wie aus den Identitäten (2) ohne weiteres folgt.

Darnach können wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, daſs insbesondere das Aggregat

$$(1, 2, .. 2\lambda - \nu - 1, 0, n+1, .. n+\nu)$$

an der Stelle $x_1^0 .. x_n^0$ nicht null ist, woraus die Richtigkeit der zu beweisenden Behauptung auch für das System V_ν sofort folgt.

Für $\nu = 1$ kommen wir so zu den Resultaten des Art. 163 zurück.

Führt man mittels der Formeln

$$x_1' = f_1, \; x_2' = f_2 .. x_{\nu-1}' = f_{\nu-1}$$

statt $x_1 .. x_{\nu-1}$ die neuen Variabeln $x_1' .. x_{\nu-1}'$ ein, so verwandelt sich f_ν in eine Funktion

$$f_\nu^{(\nu-1)}(x_1' x_2' .. x_{\nu-1}' x_\nu .. x_n)$$

und gleichzeitig das vollständige System $V_{\nu-1}$ in ein $n - \varkappa + \nu$-gliedriges System mit den Independenten $x_\nu, x_{\nu+1} .. x_n$, in dessen Koeffizienten die x_i' als Parameter eingehen (Art. 88); dieses System ist augenscheinlich mit demjenigen identisch, das in Kap. VI mit $V^{(\nu-1)}$ bezeichnet wurde, vorausgesetzt, daſs die Funktionen

$$f_1, f_2^{(1)}, f_3^{(2)} .. f_{\nu-1}^{(\nu-2)}$$

mit den damals ebenso bezeichneten Funktionen übereinstimmen.

Unsere gegenwärtige „explicite“ Reduktionsmethode ist darnach — zunächst für den Fall $\varkappa = 2\lambda$ — von derjenigen des Kap. VI nicht wesentlich verschieden; in der That wird man ja, wenn es sich um die Bestimmung der Funktion f_ν handelt, von dem Umstand, daſs das System $V_{\nu-1}$ die bereits bekannten Integrale $f_1 .. f_{\nu-1}$ besitzt, in der Weise Nutzen ziehen, daſs man diese Lösungen als neue Independente $x_1' .. x_{\nu-1}'$ in das System $V_{\nu-1}$ einführt (Art. 88).

222. Es erübrigt noch, die analogen Überlegungen auch für den Fall $\varkappa = 2\lambda - 1$ durchzuführen. Es seien wiederum die Aggregate

$$P' = (1, 2, .. 2\lambda - 2); \; Q \equiv (0, 1, .. 2\lambda - 2, 2\lambda - 1)$$

nicht identisch null. Dann schreiben sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dafs die Matrix $(B_{\nu-1})$ des Art. 212 den Rang 2λ besitze, mit Rücksicht auf die Identitäten (2) und den Satz des Art. 26 folgendermafsen:

$$(0,\ 1,\ ..\ 2\lambda-1,\ \varrho,\ \sigma)=0$$
$$(\varrho,\ \sigma=2\lambda,\ 2\lambda+1,\ ..\ n,\ n+1,\ ..\ n+\nu-1).$$

Damit nun 2λ auch der Rang von (B_ν) sei, ist notwendig und hinreichend, dafs man identisch habe:

$$(0, 1, ..\ 2\lambda-1, \varrho, n+\nu)=0 \quad (\varrho=2\lambda, 2\lambda+1, ..\ n+\nu-1).$$

Durch eine ähnliche Rechnung wie oben erhält man hieraus für $\varrho=2\lambda, ..\ n$ nach Ersetzung von f_ν durch f die partiellen Differentialgleichungen:

$$-\frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda+s}}\cdot Q+\sum_1^{2\lambda-1}{}^k K_{k,\,2\lambda+s}\frac{\partial f}{\partial x_k}=0 \quad (s=0, 1, ..\ n-2\lambda)$$

und für $\varrho=n+1, ..\ n+\nu-1$ die folgenden

$$\sum_1^{2\lambda-1}{}^k\sum_1^{2\lambda-1}{}^l Q_{kl}\frac{\partial f_h}{\partial x_l}\,\frac{\partial f}{\partial x_k}=0 \qquad (h=1, 2, ..\ \nu-1).$$

Dabei hat das Symbol $K_{k,\,2\lambda+s}$ dieselbe Bedeutung wie in Art. 32, und es wird mit

$$(-1)^{k+l+1}\cdot Q_{kl}$$

im Falle $k<l$ dasjenige Pfaff'sche Aggregat der Ordnung $2\lambda-2$ bezeichnet, das aus Q durch Weglassung der Ziffern k, l entsteht, während in allen übrigen Fällen die Bedeutung dieses Symbols durch die Formeln

$$Q_{kl}\equiv-Q_{lk};\ Q_{kk}=0$$

gegeben ist.

Wir schreiben nun

$$(16)\qquad \begin{cases} [f]_{s+1}\equiv\dfrac{\partial f}{\partial x_{2\lambda+s}}-\dfrac{1}{Q}\displaystyle\sum_1^{2\lambda-1}{}^k K_{k,\,2\lambda+s}\,\frac{\partial f}{\partial x_k} \\[2ex] [\varphi f]\equiv-\dfrac{1}{Q}\displaystyle\sum_1^{2\lambda-1}{}^k\sum_1^{2\lambda-1}{}^l Q_{kl}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}\,\frac{\partial f}{\partial x_k} \end{cases}$$

und erhalten solcherweise zur Bestimmung von f_ν das nachstehende vollständige System

$$(17)\qquad [f]_{s+1} = 0 \qquad (s = 0, 1, .. n - 2\lambda)$$

$$(18)\qquad [f_h f] = 0 \qquad (h = 1, 2, .. \nu - 1)$$

welches kurz als „das vollständige System $W_{\nu-1}$" bezeichnet werde. Das System W_0, d. h. die Relationen (17), sind mit W identisch (Art. 131).

Sind an der Stelle $x_1^0 .. x_n^0$ alle a_i regulär und die Aggregate P', Q nicht null, so dürfen wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, daſs die Funktionen $f_1 f_2 .. f_\nu$ an der Stelle $x_1^0 .. x_n^0$ regulär seien, und ihre nach $x_1 .. x_\nu$ genommene Funktionaldeterminante daselbst nicht verschwinde, daſs ferner das System W_ν nach den Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-\nu+1}},\ \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-\nu+2}}\ ..\ \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

auflösbar, und die Koeffizienten dieser aufgelösten Form an der genannten Stelle alle regulär seien. Die Richtigkeit dieser Behauptungen folgt durch Betrachtungen, die denen des Art. 221 ganz analog sind. Auch erkennt man jetzt ohne Schwierigkeit, daſs die Reduktionsmethode des Art. 214 in dem vorliegenden Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ auf das Verfahren des Art. 161 dadurch zurückgeführt werden kann, daſs man mittels der Relationen

$$x_1' = f_1 .. x_\nu' = f_\nu$$

die Variabeln $x_1 .. x_\nu$ aus W_ν eliminirt.

223. Zur Aufstellung der vollständigen Systeme, die im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ bei der Methode des Art. 218 benutzt wurden, bedienen wir uns der Symbole $\Pi'_{k,\varrho}$ und $P'_{k,l}$, von denen das erstere in Art. 32 erklärt wurde, während das letztere, mit $(-1)^{k+l+1}$ multiplizirt, im Falle $k < l$ mit dem Pfaff'schen Aggregat $2\lambda - 4^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(1, .. k-1, k+1 .. l-1, l+1 .. 2\lambda - 2)$$

übereinstimmt, während es in den übrigen Fällen durch die Formeln

$$P'_{kl} \equiv - P'_{lk},\ P'_{kk} \equiv 0$$

definirt ist.

Mit Rücksicht auf (2) schreiben sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daſs die Matrix $(C_{\nu-1})$ des Art. 218 den Rang $2\lambda - 2$ besitze, folgendermaſsen:

$$(1, 2, .. 2\lambda - 2, \varrho, \sigma) = 0 \quad (\varrho = 2\lambda - 1, 2\lambda, .. n + \nu - 1).$$

Eine ähnliche Rechnung wie in Nr. 219 zeigt dann, daſs die partiellen Differentialgleichungen, denen nach der Methode des Art. 218 die Funktion f_ν genügen muſs, so lauten:

$$(19) \qquad \{f\}_s = 0 \qquad (s = 0, 1, .. n - \varkappa)$$

$$(20) \qquad \{f_h f\} = 0 \qquad (h = 1, 2, .. \nu - 1)$$

worin gesetzt wurde:

$$(21) \qquad \begin{cases} \{f\}_s \equiv \frac{1}{Q}\left(P' \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+s}} - \sum_1^{2\lambda-2}{}^k \Pi'_{k,\varkappa+s} \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \\ \{\varphi f\} \equiv -\frac{1}{P'} \sum_1^{2\lambda-2}{}^k \sum_1^{2\lambda-2}{}^l P'_{kl} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_k}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (19) (20) bezeichnen wir als das vollständige System $V_{\nu-1}$; das System V_0 ist mit den Relationen (19), d. h. mit V identisch. Sind an der Stelle $x_1^0 .. x_n^0$ alle a_i regulär und P', Q von null verschieden, so dürfen wir auch hier wieder für jedes ν der Reihe $1 .. \lambda - 1$ annehmen, dafs alle Funktionen $f_1 .. f_\nu$ an der Stelle x_i^0 regulär und ihre nach $x_1 .. x_\nu$ genommene Funktionaldeterminante daselbst nicht null sei, dafs ferner das System V_ν nach den Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-\nu}}, \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa-\nu+1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

auflösbar, und die Koeffizienten dieser aufgelösten Form an der genannten Stelle sämtlich regulär seien; ferner verwandelt sich V_ν in das System $V^{(\nu)}$ des Kap. VI, wenn man mittels der Gleichungen

$$f_1 = x_1' .. f_\nu = x_\nu'$$

die Variabeln $x_1 .. x_\nu$ eliminirt, vorausgesetzt, dafs die Funktionen $f_1 f_2^{(1)} .. f_\nu^{(\nu-1)}$ bez. mit den damals analog bezeichneten übereinstimmen; also ist die Reduktionsmethode des Art. 218 mit derjenigen des Art. 159 im Wesentlichen identisch.

224. Die in diesem § eingeführten Klammersymbole genügen den Identitäten:

$$(\varphi f) \equiv -(f\varphi); \ [\varphi f] \equiv -[f\varphi]; \ \{\varphi f\} \equiv -\{f\varphi\}.$$

Zwischen den Klammersymbolen, die in den letzten beiden Nummern eingeführt wurden, bestehen folgende Zusammenhänge:

$$(22) \quad [\varphi f] \equiv \{\varphi f\} + \{\varphi\}_0 \left(\sum_1^{2\lambda-2}{}^l \frac{\Pi'_{l0}}{P'} \frac{\partial f}{\partial x_l}\right) - \{f\}_0 \left(\sum_1^{2\lambda-2}{}^l \frac{\Pi'_{l0}}{P'} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l}\right)$$

$$(23) \quad P'[f]_{s+1} \equiv Q\{f\}_{s+1} - K_{2\lambda-1, 2\lambda+s}\{f\}_0 \quad (s = 0, 1, 2, .. n - 2\lambda).$$

Die erste dieser Identitäten wird dadurch verifizirt, dafs man in der Identität (28) des Art. 22 für P das Pfaff'sche Aggregat $(0, 1, .. 2\lambda - 1)$ substituirt, ferner $\alpha = 0$; $\beta = k$; $\gamma = l$; $\delta = 2\lambda - 1$ setzt, und so die Identität:

$$P'_{kl} \equiv \frac{P'}{Q} Q_{kl} + \frac{1}{Q} \Pi'_{k,2\lambda-1} \cdot \Pi'_{l0} - \frac{1}{Q} \Pi'_{l,2\lambda-1} \Pi'_{k0}$$

erhält. Setzt man diese Ausdrücke für die P'_{kl} in das Symbol $\{\varphi f\}$ ein, und berücksichtigt noch die Beziehungen:

$$Q_{k,2\lambda-1} \equiv -\Pi'_{k0},$$

so folgt nach leichter Rechnung in der That die Identität (22).

Die Identität (23), die aus den Bemerkungen des Art. 33 ohne weiteres hervorgeht, lehrt, daſs man in dem vorliegenden Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ das vollständige System V in jeder der beiden Formen

$$\{f\}_i = 0 \qquad (i = 0, 1, .. n - \varkappa)$$

$$\{f\}_0 = 0, \ [f]_s = 0 \qquad (s = 1, 2, .. n - \varkappa)$$

schreiben kann, während das System W durch die $n - \varkappa$ Gleichungen $[f]_s = 0$ dargestellt wird.

§ 3. Die bilineare Kovariante.

225. Es seien $dx_1 .. dx_n$ bezw. $\delta x_1 .. \delta x_n$ zwei verschiedene Systeme von Inkrementen der unabhängigen Variabeln $x_1 .. x_n$, und es bezeichne δf das totale Differential einer Funktion $f(x_1 .. x_n)$ unter der Voraussetzung, daſs für die Zuwachse der x_i die δx_i genommen werden. Setzen wir dann noch

$$d\delta x_k \equiv \delta dx_k \quad (k = 1, 2, .. n)$$

und bilden wir den Ausdruck

$$\delta \left(\sum_1^n {}^i a_i(x_1 .. x_n)\, dx_i \right) - d \left(\sum_1^n {}^k a_k(x_1 .. x_n)\, \delta x_k \right),$$

so liefert die Ausrechnung folgendes Resultat:

$$(1) \qquad \sum (\delta a_i\, dx_i - da_i\, \delta x_i) \equiv \sum_1^n {}^i \sum_1^n {}^k a_{ik} dx_i \delta x_k,$$

worin wie gewöhnlich

$$a_{ik} \equiv -a_{ki} \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$$

gesetzt wurde. Der Ausdruck (1) heiſst die *„bilineare Kovariante“* des Pfaff'schen Ausdrucks

$$\varDelta \equiv \Sigma a_\iota dx_\iota$$

und zwar aus folgendem Grunde:

Vermöge einer beliebigen Variabelntransformation

(2) $$x_i = \psi_\iota(x_1' \,..\, x_n'); \; x_\iota' = \varphi_\iota(x_1 \,..\, x_n) \quad (i = 1 \,..\, n)$$

verwandelt sich $\varDelta$ in den Ausdruck

$$\varDelta' \equiv \Sigma a_i'(x_1' \,..\, x_n') dx_i'.$$

Bedeuten jetzt dx_r', $\delta x_s'$ die Inkrementensysteme, die vermöge (2) den Systemen dx_ι bezw. δx_k entsprechen, so gelten die Beziehungen:

(3) $$dx_i = \sum_1^n {}^r \frac{\partial \psi_i}{\partial x_r'} dx_r'; \quad \delta x_k \equiv \sum_1^n {}^s \frac{\partial \psi_k}{\partial x_s'} \delta x_s'.$$

Ferner hat man nach Art. 98 vermöge (2) die Identitäten

(4) $$a_{rs}' \equiv \frac{\partial a_r'}{\partial x_s'} - \frac{\partial a_s'}{\partial x_r'} \equiv \sum_1^n {}^i \sum_1^n {}^k a_{\iota k} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_r'} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_s'}.$$

Aus den Relationen (3) (4) aber folgt unmittelbar:

$$\sum_1^n {}^i \sum_1^n {}^k a_{ik} dx_i \delta x_k \equiv \sum_1^n {}^r \sum_1^n {}^s a_{rs}' dx_r' \delta x_s',$$

m. a. W.: *Verwandelt sich vermöge einer beliebigen Variabelntransformation* (2) *der Pfaff'sche Ausdruck $\varDelta$ in $\varDelta'$, so geht gleichzeitig die bilineare Kovariante von $\varDelta$ in diejenige von $\varDelta'$ über, wenn die Inkrementensysteme dx_i bezw. δx_k der Transformation* (3) *unterworfen werden.*

Wir wollen nun auseinandersetzen, wie man, ausgehend von der soeben bewiesenen Kovarianz des bilinearen Ausdrucks (1), durch rein algebraische Überlegungen zu der in § 1 entwickelten „expliciten" Reduktionsmethode eines Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$ zurückgeführt wird.

Schreiben wir

$$u_i, \; v_k, \; u_r', \; v_s', \; c_{\iota r}$$

bezw. statt

$$dx_i, \; \delta x_k, \; dx_r', \; \delta x_s', \; \frac{\partial \psi_i}{\partial x_r'},$$

so verwandeln sich die Ausdrücke $\varDelta$, $\varDelta'$ und die zugehörigen bilinearen Kovarianten bezw. in die Formenpaare:

(5) $$\varDelta_u \equiv \Sigma a_\iota u_\iota; \quad \varPhi_{uv} \equiv \Sigma\Sigma a_{ik} u_i v_k$$

(6) $$\varDelta_{u'}' \equiv \Sigma a_r' u_r'; \quad \varPhi_{u'v'}' \equiv \Sigma\Sigma a_{rs}' u_r' v_s'$$

und es bestehen vermöge der kongruenten[1]) linearen Transformationen der Variabeln u, v:

$$(7)\qquad u_i = \sum_1^n {}^r c_{ir} u_r'; \quad v_k = \sum_1^n {}^s c_{ks} v_s' \quad (i, k = 1, .. n)$$

die Identitäten:

$$(8)\qquad \Delta'_{u'} \equiv \Delta_u; \quad \Phi'_{u'v'} \equiv \Phi_{uv}.$$

Umgekehrt, soll der Pfaff'sche Ausdruck Δ vermöge einer Variabelntransformation (2) in Δ' übergehen, so mufs es auch zwei kongruente lineare Transformationen (7) geben, vermöge deren die Identitäten (8) bestehen.

Um also die Äquivalenz zweier gegebener Pfaff'scher Ausdrücke Δ, Δ' zu entscheiden, müssen wir folgendes *rein algebraische Problem* miterledigen:

Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dafs ein gegebenes Formenpaar (5) *vermöge kongruenter linearer Substitutionen* (7) *in ein anderes gegebenes Formenpaar* (6) *übergeführt werden kann?*

Bei der Untersuchung dieser Frage können wir die Gröfsen a_i, $a_{ik} = - a_{ki}$ und c_{ir} vorläufig als Konstante behandeln.

226. Wir entwickeln in diesem und den nächsten Artikeln einige Hülfssätze über Bilinearformen.

Unter dem *Rang* der alternirenden (schiefsymmetrischen) Bilinearform

$$\Phi_{uv} \equiv \sum_1^n {}^i \sum_1^n {}^k a_{ik} u_i v_k \quad (a_{ik} = - a_{ki})$$

verstehen wir den Rang 2τ der schiefsymmetrischen Matrix:

$$(C)\qquad \| a_{ik} \| \quad (i, k = 1, 2, .. n).$$

Dieser Rang ist eine Invariante von Φ_{uv} gegenüber beliebigen kongruenten linearen Transformationen der Variabelngruppen u_i und v_k, m. a. W.: verwandelt sich Φ_{uv} vermöge der linearen Substitutionen (7) in $\Phi'_{u'v'}$, so ist der Rang dieser letztern Form wiederum 2τ. Es folgt dies mit Rücksicht auf die Identitäten:

1) Eine lineare Transformation der Variabeln $u_1 .. u_n$ heifst zu einer linearen Transformation der Variabeln $v_1 .. v_n$ „kongruent", wenn sie dieselben Koeffizienten c_{ir} besitzt; ebenso bezeichnet man zwei Linearformen $a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$ und $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ mit denselben Koeffizienten als „kongruent".

$$a'_{rs} \equiv \sum_1^n {}^i \sum_1^n {}^k a_{ik} c_{ir} c_{ks}$$

durch eine ganz ähnliche Überlegung wie in Art. 98.

227. Es seien nunmehr ν $(< n)$ Paare kongruenter Linearformen

$$U_i \equiv f_{i1} u_1 + f_{i2} u_2 + \cdots + f_{in} u_n; \quad V_i \equiv f_{i1} v_1 + \cdots + f_{in} v_n \quad (i = 1 \,..\, \nu)$$

vorgelegt, wobei die Koeffizienten f_{ik} Konstante bedeuten. Die Formen $U_1 \,..\, U_\nu$ seien linear unabhängig, etwa hinsichtlich $u_1 \,..\, u_\nu$, d. h. die Determinante

$$| f_{ik} | \quad (i, k = 1 \,..\, \nu)$$

sei von Null verschieden. Läſst sich nun Φ_{uv} in der Gestalt

$$\Phi_{uv} \equiv \sum_1^\nu {}^i (U_i V_{\nu+i} - V_i U_{\nu+i}) \tag{9}$$

darstellen, worin $U_{\nu+i}$ und $V_{\nu+i}$ kongruente Linearformen von den u bezw. v bezeichnen, so verschwindet Φ_{uv} identisch vermöge der ν kongruenten Relationenpaare

$$U_1 = 0, \,..\, U_\nu = 0; \; V_1 = 0, \,..\, V_\nu = 0 \tag{10}$$

und umgekehrt. Letzteres erkennt man so: die Formeln

$$u_i' = U_i; \; u'_{\nu+s} = u_{\nu+s}; \; v_i' = V_i; \; v'_{\nu+s} = v_{\nu+s}$$
$$(i = 1, \,..\, \nu; \; s = 1, \,..\, n - \nu)$$

stellen kongruente lineare Transformationen der beiden Variabelngruppen u und v dar; vermöge dieser Transformationen geht Φ_{uv} in eine Form $\Phi'_{u'v'}$ über, die unter der Annahme $u_1' = 0 \,..\, u_\nu' = 0$, $v_1' = 0 \,..\, v_\nu' = 0$ verschwindet, also mit Rücksicht auf ihre schiefe Symmetrie notwendig die Form hat:

$$\Phi'_{u'v'} \equiv \sum_1^\nu (u_i' V'_{\nu+i} - v_i' U'_{\nu+i}),$$

wobei die $V'_{\nu+i}$ bezw. $U'_{\nu+i}$ kongruente Linearformen in den v' bezw. u' bedeuten. Durch Rückübergang zu den alten Variabeln u und v folgt dann unsere Behauptung unmittelbar.

Hieraus und aus den Überlegungen des Art. 80 folgt:

Damit die alternirende Bilinearform Φ_{uv} sich in der Form (9) *darstellen lasse, ist notwendig und hinreichend, daſs der Rang der Matrix*

$$
(C_\nu)\quad \left\|\begin{matrix}
0 & a_{12} & a_{13} & \cdot\cdot & a_{1n} & f_{11} & f_{21} & \cdot\cdot & f_{\nu 1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot\cdot & 0 & f_{1n} & f_{2n} & \cdot\cdot & f_{\nu n} \\
-f_{11} & -f_{12} & -f_{13} & \cdot\cdot & -f_{1n} & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\
-f_{\nu 1} & -f_{\nu 2} & -f_{\nu 3} & \cdot\cdot & -f_{\nu n} & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0
\end{matrix}\right\|
$$

nicht gröfser als 2ν *sei.*

228. Nach dem Vorigen kann die Zahl ν, wenn die Darstellung (9) möglich sein soll, nicht kleiner als τ sein. *Es gilt nun der Satz: Besitzt die Bilinearform* Φ_{uv} *den Rang* 2τ, *so kann sie in der Form*

$$
(11)\qquad \Phi_{uv} \equiv \sum_1^\tau {}^i (U_i V_{\tau+i} - V_i U_{\tau+i})
$$

dargestellt werden.

Unter der gemachten Annahme lassen sich nämlich τ linear unabhängige Gröfsensysteme

$$
(12)\qquad f_{i1} f_{i2} \ldots f_{in} \qquad (i = 1, \ldots \tau)
$$

so bestimmen, dafs die Matrix (C_τ) ebenfalls den Rang 2τ besitzt.

In der That, hat man die $\nu - 1$ ersten Systeme (12) bereits so bestimmt, dafs sie linear unabhängig sind und alle $2\tau + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten von $(C_{\nu-1})$ zum Verschwinden bringen, und schreiben wir die Bedingungen dafür auf, dafs auch (C_ν) den Rang 2τ besitze, so erhalten wir, wie aus den Erwägungen des Art. 218 leicht folgt, zur Bestimmung der Unbekannten $f_{\nu 1}, f_{\nu 2} \ldots f_{\nu n}$ ein System von $n - 2\tau + \nu - 1$ linear unabhängigen, linearen homogenen Gleichungen, die aufser den $\nu - 1$ ersten Gröfsensystemen (12) noch $2\tau - 2\nu + 2$ weitere linear unabhängige Lösungensysteme zulassen. Die Richtigkeit unserer Behauptung folgt dann leicht.

Sind solcherweise die Linearformen $U_1 \ldots U_\tau$ bestimmt, so folgen die Koeffizienten der in (11) auftretenden Linearformen

$$
\begin{aligned}
U_{\tau+i} &= F_{i1} u_1 + \cdots + F_{in} u_n \\
V_{\tau+i} &= F_{i1} v_1 + \cdots + F_{in} v_n
\end{aligned}
\qquad (i = 1, \ldots \tau)
$$

durch Auflösung der (nunmehr verträglichen) linearen Gleichungen:

$$
a_{ik} = \sum_1^\tau {}^s (f_{si} F_{sk} - f_{sk} F_{si}) \qquad (i, k = 1 \ldots n),
$$

aus denen überdies mit Hülfe der Theorie der Determinantencomposition, ähnlich wie in Art. 127 geschlossen werden kann, dafs alle

2τ Formen $U_1 \ldots U_{2\tau}$ (und ebenso natürlich $V_1 \ldots V_{2\tau}$) von einander linear unabhängig werden.

229. Es sei jetzt r eine Zahl $< \nu$; denken wir uns dann die r linear unabhängigen Linearformen $U_1 U_2 \ldots U_r$ *beliebig vorgelegt*, so erhebt sich die Frage nach der kleinsten Zahl ν von der Beschaffenheit, dafs die Bilinearform Φ_{uv} sich in der Gestalt (9) darstellen lasse.

Wir behaupten, dafs diese Zahl ν mit der halben Rangzahl der Matrix (C_r) übereinstimmt. Die gesuchte Zahl kann nach Art. 227 nicht kleiner sein als der angegebene Wert. Es bleibt also nur noch folgendes zu zeigen: Sind r linear unabhängige Gröfsensysteme $f_{i1} \ldots f_{in}$ von der Beschaffenheit vorgelegt, dafs die Matrix

$$(C_r) \quad \begin{Vmatrix} a_{ik} & f_{hi} \\ f_{hk} & 0 \end{Vmatrix} \quad (i, k = 1 \ldots n;\ h = 1 \ldots r)$$

den Rang 2ν besitzt, so lassen sich weitere $\nu - r$ Gröfsensysteme $f_{i1} \ldots f_{in}$ so bestimmen, dafs auch in der Matrix (C_ν) alle $2\nu + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten verschwinden.

Dies ist aber unmittelbar evident, wenn wir in den bisherigen Überlegungen überall n durch $n + r$, ferner 2τ durch 2ν ersetzen, und wie früher von den Bezeichnungen

$$a_{k,\,n+h} = -a_{n+h,k} = f_{hk};\ a_{n+h,\,n+l} = 0 \quad (h, l = 1 \ldots r;\ k = 1 \ldots n)$$

Gebrauch machen. Gleichzeitig ergiebt sich folgendes: Ist $r' - 1$ eine Zahl der Reihe $1, 2, \ldots \nu - r - 1$, und hat man die $r' - 1$ Gröfsensysteme

$$(13) \qquad f_{r+h,1},\ f_{r+h,2} \ldots f_{r+h,n} \qquad (h = 1, 2, \ldots r' - 1)$$

bereits so bestimmt, dafs die Matrix $(C_{r+r'-1})$ den Rang 2ν besitzt, so erhält man durch Nullsetzen aller $2\nu + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten von $(C_{r+r'})$ für die n Unbekannten:

$$f_{r+r',1},\ f_{r+r',2} \ldots f_{r+r',n}$$

ein System von $n + r + r' - (2\nu + 1)$ linear unabhängigen, linearen homogenen Gleichungen, die also aufser den Gröfsensystemen

$$f_{i1} \ldots f_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots r + r' - 1)$$

noch $2\nu - 2(r + r') + 2$ weitere Lösungensysteme zulassen.

230. Mittels der linearen homogenen Gleichungen

$$(14) \qquad U_1 = 0, \ldots U_r = 0,\ V_1 = 0, \ldots V_r = 0$$

denken wir uns r von den Variabeln u_i als ganzlineare homogene Funktionen der $n - r$ übrigen u_i, und die bez. denselben Indices entsprechenden r Variabeln v_i ebenso durch die übrigen v_i ausgedrückt und in Φ_{uv} substituirt. Dadurch verwandelt sich diese Form in eine alternirende Bilinearform $\overline{\Phi}_{uv}$ mit nur $n-r$ Variabelnpaaren u, v. Besitzt nun $\overline{\Phi}_{uv}$ den Rang $2\tau_0$, so sagen wir: „*Die Bilinearform* Φ_{uv} *besitzt vermöge der Relationen* (14) *den Rang* $2\tau_0$".

Es gilt jetzt die wichtige Thatsache:

„*Ist* 2ν *der Rang der Matrix* (C_r), *so besitzt die Bilinearform* $\Sigma\Sigma a_{ik} u_i v_k$ *vermöge der linear unabhängigen Relationenpaare:*

$$\sum_1^n {}^i f_{hi} u_i = 0; \quad \sum_1^n {}^i f_{hi} v_i = 0 \quad (h = 1, \ldots r)$$

den Rang

$$2\tau_0 = 2\nu - 2r".$$

Die Bilinearform $\overline{\Phi}_{uv}$ kann nämlich durch τ_0 und nicht weniger kongruente Relationenpaare in u, v zum Verschwinden gebracht werden (Art. 226 u. 227). Die Minimalzahl kongruenter Relationenpaare, welche die Gleichungen (14) umfassen und Φ_{uv} zum Verschwinden bringen, ist also $r + \tau_0$, aber nach der vorigen Nr. auch gleich ν, was zu zeigen war.

Dieser Satz enthält den Schlufssatz des Art. 227 als Spezialfall.

Die Zahl $2\tau_0$ und mithin auch die Zahl 2ν ist offenbar eine simultane Invariante der Bilinearform Φ_{uv} und der r Linearformen $U_1 \ldots U_r$ gegenüber beliebigen kongruenten linearen Transformationen der beiden Variabelngruppen u und v; m. a. W.: verwandelt sich Φ_{uv} vermöge der Transformation (7) in $\Phi'_{u'v'}$ und U_i in U_i', so besitzt die Bilinearform $\Phi'_{u'v'}$ vermöge der Relationen

$$U_1' = 0, \ldots U_r' = 0, \; V_1' = 0, \ldots V_r' = 0$$

wiederum den Rang $2\tau_0$.

231. Sind $\varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2$ wie früher die Rangzahlen der 3 Matrices (A) (B) (C), die nach der Vorschrift des Art. 96 aus den Koeffizienten a_i, a_{ik} des Formenpaares

$$(5) \qquad \Delta_u \equiv \sum_1^n {}^i a_i u_i; \quad \Phi_{uv} \equiv \sum\sum a_{ik} u_i v_k$$

gebildet werden, so ist in der gegenwärtigen Bezeichnungsweise $\varkappa_2$ der Rang der Bilinearform Φ_{uv}, $\varkappa_1 - 2$ der Rang, den Φ_{uv} vermöge $\Delta_u = 0$, $\Delta_v = 0$ besitzt, endlich $\varkappa - 1$ das arithmetische Mittel aus beiden Zahlen. Darnach ist die Zahl $\varkappa$ eine simultane Invariante des Formenpaars Δ_u, Φ_{uv} gegenüber kongruenten linearen Substitutionen der beiden Variabelngruppen u, v. Wir wollen diese Zahl als die „*Klasse des Formenpaares* Δ_u, Φ_{uv}" bezeichnen.

Dieser Begriff gestattet folgende Verallgemeinerung. Ist 2ϱ der Rang von (C_r), 2σ derjenige der Matrix

$$(B_r)\begin{Vmatrix} a_{ik} & a_i & f_{hi} \\ -a_k & 0 & 0 \\ -f_{hk} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad (i, k = 1 \,..\, n;\ h = 1 \,..\, r)$$

so sagen wir, das Formenpaar $\varDelta_u$, Φ_{uv} besitzt *„vermöge der Relationen:*

$$U_1 = 0, \,..\, U_r = 0,\ V_1 = 0, \,..\, V_r = 0 \quad (U_h \equiv \Sigma f_{hi} u_i)$$

die Klasse $\bar{\varkappa} = \varrho + \sigma$". Da σ entweder $\varrho + 1$ oder ϱ ist (Art. 27), je nachdem $\bar{\varkappa}$ ungerade oder gerade ist, so sind durch Angabe von $\bar{\varkappa}$ die Zahlen 2ϱ und 2σ mitbestimmt.

232. Es sei jetzt 2λ der Rang von (B) (Art. 96), dann lassen sich nach Art. 229 $\lambda - 1$ Linearformen U_i so bestimmen, daſs die Formen $\varDelta_u$, $U_1 \,..\, U_{\lambda-1}$ linear unabhängig sind, und daſs die Bilinearform Φ_{uv} vermöge der Relationen

$$\varDelta_u = 0,\ U_1 = 0, \,..\, U_{\lambda-1} = 0;\ \varDelta_v = 0,\ V_1 = 0, \,..\, V_{\lambda-1} = 0$$

verschwindet. Der Ausdruck $\varDelta_u$ läſst sich nun offenbar in der Form

$$\varDelta_u \equiv \alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_{\lambda-1} U_{\lambda-1} + \alpha_\lambda U_\lambda$$

darstellen; diese Identität liefert nämlich die Bedingungen:

$$a_i = \alpha_1 f_{1i} + \cdots + \alpha_{\lambda-1} f_{\lambda-1,i} + \alpha_\lambda f_{\lambda i}$$

und man kann für die α_i beliebige, nicht verschwindende Konstante wählen, worauf die Unbekannten $f_{\lambda 1} \,..\, f_{\lambda n}$ sich berechnen lassen. Die Formen $U_1 \,..\, U_\lambda$ sind dann offenbar linear unabhängig, und Φ_{uv} verschwindet vermöge der Gleichungen

$$U_1 = 0, \,..\, U_\lambda = 0,\ V_1 = 0 \,..\, V_\lambda = 0.$$

Aus Art. 226 folgt jetzt:

„Ist 2λ der Rang der Matrix (B), so gestattet das Formenpaar $\varDelta_u$, Φ_{uv} folgende Darstellung:

$$(15) \qquad \varDelta_u \equiv \sum_1^\lambda{}^i \alpha_i U_i;\ \Phi_{uv} \equiv \sum_1^\lambda{}^i (U_i V_{\lambda+i} - V_i U_{\lambda+i})$$

worin die $U_1 \,..\, U_\lambda$ von einander unabhängig sind.

Die aus (15) folgenden Relationen

$$a_{ik} = \sum_1^\lambda{}^s F_{ks} f_{is} - F_{is} f_{ks} \quad (i, k = 1 \,..\, n),$$

welche die Koeffizienten F_{ks} der Linearformen $U_{\lambda+k}$, $V_{\lambda+k}$ zu berechnen erlauben, lassen überdies genau wie in Art. 127, 130 mit Hülfe der Theorie der Determinantenkomposition erkennen, daſs die 2λ Linearformen $U_1 \ldots U_{2\lambda}$ linear unabhängig oder aber durch eine einzige lineare homogene Relation mit konstanten Koeffizienten verknüpft sind, je nachdem die Matrix

$$\text{(C)} \qquad \| a_{ik} \| \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

den Rang 2λ oder $2\lambda - 2$ besitzt.

Im letzteren Fall kann man nach Art. 228 $\lambda - 1$ unabhängige Linearformen $U_1 \ldots U_{\lambda-1}$ so bestimmen, daſs die Matrix $(C_{\lambda-1})$ ebenfalls den Rang $2\lambda - 2$ besitzt, die Bilinearform Φ_{uv} sich also folgendermaſsen ausdrücken läſst:

$$(16) \qquad \Phi_{uv} \equiv \sum_1^{\lambda-1} {}^i (U_i V_{\lambda+i} - U_{\lambda+i} V_i),$$

während die Form Δ_u von $U_1 \ldots U_{\lambda-1}$ linear unabhängig wird, also auf die Gestalt

$$(17) \qquad \Delta_u \equiv U_\lambda + \alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_{\lambda-1} U_{\lambda-1}$$

gebracht werden kann; die Konstanten α_i können dabei willkürlich gewählt werden. Die aus (16) (17) folgenden Gleichungen

$$a_i = f_{\lambda i} + \sum_1^{\lambda-1} {}^s \alpha_s f_{si}; \quad a_{ik} = \sum_1^{\lambda-1} {}^s (f_{si} F_{sk} - f_{sk} F_{si})$$

dienen zur Bestimmung der Koeffizienten $f_{\lambda i}$ und F_{sk}, und lassen (wie in Art. 130) erkennen, erstens, daſs die Linearformen $U_1 \ldots U_{2\lambda-1}$ linear unabhängig sind, zweitens, daſs auch umgekehrt, wenn eine Darstellung (16) (17) unseres Formenpaars möglich sein soll, die Rangzahlen von (B) und (C) gleich 2λ bezw. $2\lambda - 2$ sein müssen. Wir können die bisherigen Resultate demnach folgendermaſsen resumiren:

Ist die Klasse $\varkappa$ des Formenpaars Δ_u, Φ_{uv} gleich 2λ, dann und nur dann existirt eine Darstellung

$$(18) \qquad \Delta_u \equiv \sum_1^{\lambda} {}^i \alpha_i U_i; \quad \Phi_{uv} \equiv \sum_1^{\lambda} {}^i (U_i V_{\lambda+i} - U_{\lambda+i} V_i),$$

worin die Linearformen $U_1 \ldots U_{2\lambda}$ von einander linear unabhängig sind, und V_i bezw. die zu U_i kongruente Linearform bedeutet.

Ist dagegen $\varkappa = 2\lambda - 1$, dann und nur dann gelten Formeln von folgender Gestalt:

$$(19) \quad \Delta_u \equiv U_\lambda + \alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_{\lambda-1} U_{\lambda-1}; \; \Phi_{uv} \equiv \sum_1^{\lambda-1} {}^i (U_i V_{\lambda+i} - U_{\lambda+i} V_i),$$

worin $U_1 \,..\, U_{2\lambda-1}$ linear unabhängige Linearformen, die V_i die dazu kongruenten Linearformen bedeuten.

233. Durch den vorstehenden Satz ist zugleich das in Art. 225 formulirte Äquivalenzproblem miterledigt. In der That, soll das Formenpaar

$$\Delta'_{u'} \equiv \Sigma a'_\iota u'_\iota; \quad \Phi'_{u'v'} \equiv \Sigma\Sigma\, a'_{ik} u'_\iota v'_k \tag{20}$$

durch kongruente lineare Substitutionen (7) in das Formenpaar Δ_u, Φ_{uv} übergeführt werden können, so mufs es nach Art. 231 dieselbe Klasse $\varkappa$ besitzen wie das letztere. Umgekehrt, ist dies der Fall, und ist etwa $\varkappa = 2\lambda$, so gestattet das Formenpaar (20) die Darstellung

$$\Delta'_{u'} \equiv \sum_1^\lambda{}^i \alpha_\iota U'_i; \quad \Phi'_{u'v'} \equiv \sum_1^\lambda{}^i (U'_i V'_{\lambda+i} - U'_{\lambda+i} V'_\iota),$$

worin die U'_i linear unabhängige Linearformen in $u'_1 \,..\, u'_n$, und die V'_i die dazu kongruenten Formen $v'_1 \,..\, v'_n$ bedeuten; die α_i haben dieselbe Bedeutung wie in (18). Dann lassen sich $n-\varkappa$ Linearformen $U_{\varkappa+1} \,..\, U_n$ und ebenso $n-\varkappa$ Linearformen $U'_{\varkappa+1} \,..\, U'_n$ so bestimmen, dafs die Gleichungen:

$$U'_\iota = U_\iota; \quad V'_i = V_i \qquad (i = 1, 2, \,..\, n)$$

sowohl nach $u_1 \,..\, u_n$, $v_1 \,..\, v_n$ als auch nach $u'_1 \,..\, v'_n$ auflösbar sind, also kongruente lineare Transformationen der u und v darstellen, vermöge deren offenbar die Identitäten (8) bestehen. Da analoges auch bei ungeradem $\varkappa$ gilt, so folgt der Satz:

Das Formenpaar Δ_u, Φ_{uv} kann nur dann, aber auch stets dann durch kongruente lineare Transformationen der beiden Variabelngruppen u_ι und v_ι in das Formenpaar $\Delta'_{u'}$, $\Phi'_{u'v'}$ übergeführt werden, wenn beide Formenpaare dieselbe Klasse $\varkappa$ besitzen. Diese Zahl ist darnach die einzige Invariante des Formenpaares Δ_u, Φ_{uv} gegenüber kongruenten linearen Transformationen der u und v.

234. Nachdem nun das in Art. 225 formulirte rein algebraische Problem vollständig erledigt ist, wollen wir unter den a_ι wieder die Koeffizienten eines Pfaff'schen Ausdruckes Δ mit den Variabeln $x_1 \,..\, x_n$, und unter den a_{ik} die Funktionen $\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$ verstehen. Es läfst sich nun zeigen: Man kann über die Gröfsen α_i, f_{ks}, F_{ks}, die in den Entwickelungen der letzten Artikel vorkommen, in der Weise verfügen, dafs identisch:

$$f_{ik} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial x_k}; \quad F_{ik} \equiv \frac{\partial \alpha_\iota}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial x_k}, \tag{21}$$

wenn $\alpha_i \equiv F_i$ gesetzt wird. Substituirt man nämlich für die f_{ik} ihre Werte (21), so verwandeln sich die linearen homogenen Gleichungen, welche in den letzten Artikeln zur Bestimmung der n Unbekannten $f_{\nu 1}, f_{\nu 2}, \ldots f_{\nu n}$ dienten, in ebenso viele lineare homogene partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung mit der Unbekannten f_ν und den Independenten $x_1 \ldots x_n$. Diese Differentialgleichungen bilden nach dem § 1 dieses Kapitels jedesmal ein vollständiges System, und wir kommen so auf die „explicite" Reduktionsmethode zurück, die in § 1 zur successiven Bestimmung der Funktionen $f_1 f_2 \ldots f_\lambda$ gegeben wurde.

Die Entwickelungen des § 1 gründeten sich auf den Satz des Art. 80, der seinerseits durch ganz ähnliche Betrachtungen bewiesen wurde, wie das Theorem des Art. 227. Man wird hieraus leicht erkennen, dafs die Überlegungen des gegenwärtigen § sich nur hinsichtlich der Anordnung von dem Gedankengang des § 1 unterscheiden.

235. Den Satz des Art. 228 und die Ergebnisse von Art. 104 wollen wir noch dazu benutzen, um einen homogenen Pfaff'schen Ausdruck ersten Grades, d. h. einen Ausdruck der Form

$$\varDelta \equiv \sum_1^n{}^i a_i dx_i,$$

worin:

$$a_i \equiv c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n$$

gesetzt ist, und die c_{ik} Konstante bedeuten, auf seine Normalform zu reduziren[1]).

Man hat hier

$$a_{ik} \equiv c_{ik} - c_{ki}.$$

Ist also allgemein $c_{ik} = c_{ki}$, so besitzt $\varDelta$ die Klasse 1; man hat dann in der That

$$\varDelta \equiv \frac{1}{2} d \left(\sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^k c_{ik} x_i x_k \right).$$

Wir schreiben ferner wie in Art. 104

$$a \equiv a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

Es sei zunächst

1) $a \equiv 0$, also $c_{ik} + c_{ki} = 0$. Dann ist die Klasse $\varkappa$ des Ausdrucks $\varDelta$ gerade, etwa $= 2\lambda$, (Art. 104, 2)) und gleich dem Rang der alternirenden Bilinearform

$$\varDelta_{xy} \equiv \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^k c_{ik} x_k y_i$$

1) Frobenius II.

oder der Matrix

$$\| c_{ik} \| \qquad (i, k = 1 \,..\, n).$$

Nach Art. 228 läſst sich daher $\varDelta_{xy}$ in folgender Form darstellen:

$$\varDelta_{xy} \equiv \sum_1^\lambda{}^s X_s Y_{\lambda+s} - Y_s X_{\lambda+s},$$

worin $X_1 \,..\, X_{2\lambda}$ unabhängige homogene lineare Funktionen von $x_1 \,..\, x_n$ mit konstanten Koeffizienten und die Y_i die dazu kongruenten Formen in $y_1 \,..\, y_n$ bedeuten. Indem man y_ι durch dx_i ersetzt, folgt:

$$\varDelta \equiv \sum_1^\lambda{}^s X_s\, dX_{\lambda+s} - X_{\lambda+s}\, dX_s \equiv \sum_1^\lambda{}^s X_s^2\, d\,\frac{X_{\lambda+s}}{X_s},$$

womit die verlangte Reduktion geleistet ist.

2) Es sei $\varkappa = 2\lambda - 1$; also $a \mathrel{\equiv\!|\!\equiv} 0$. Nach Art. 104, 5) besitzt dann der Pfaff'sche Ausdruck:

$$\varDelta' \equiv \sum a_\iota'\, dx_i \equiv \sum a_i dx_i - \frac{1}{2}\, da$$

die Klasse $\varkappa' = 2\lambda - 2$, und man hat

$$\sum a_i' x_i \equiv \sum x_i \left(a_\iota - \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial x_\iota}\right) \equiv a - a \equiv 0,$$

also erfüllt $\varDelta'$ die Bedingungen von Nr. 1) und $\varDelta$ läſst sich sonach in der Form

$$\varDelta \equiv \frac{1}{2}\, da + \sum_1^{\lambda-1}{}^s X_s^2\, d\,\frac{X_{\lambda+s-1}}{X_s}$$

darstellen.

3) Es sei $\varkappa = 2\lambda < n$; also 2λ der Rang der Matrix:

$$\| a_{\iota k} \| \qquad (i, k = 1, 2, \,..\, n).$$

Dann können wir annehmen, daſs insbesondere die Determinante

$$| a_{ik} | \qquad (i, k = 1, 2, \,..\, 2\lambda)$$

von null verschieden ist. Die 2λ totalen Differentialgleichungen

$$\sum_1^n{}^k a_{\iota k}\, dx_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \,..\, 2\lambda)$$

bilden dann das zu dem vollständigen System W adjungirte System (Art. 140), darnach besitzt W die Integrale (Art. 74)

$$y_i = a_{\iota 1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n \qquad (i = 1, 2, \,..\, 2\lambda);$$

führt man diese Integrale statt $x_1 \,..\, x_{2\lambda}$ als neue Variable in $\varDelta$ ein, so reduzirt sich $\varDelta$ auf einen *bedingungslosen* homogenen Pfaff'schen Ausdruck 1. Grades mit den Variabeln $y_1 y_2 \ldots y_{2\lambda}$ (Art. 136).

Es bleibt also nur noch folgender Fall zu betrachten:

4) $\varkappa = 2\lambda = n$. Die Determinante

$$| a_{ik} | \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

ist jetzt nicht null. Ferner ist die Determinante

$$D \equiv | u c_{ik} + v c_{ki} | \qquad (i, k, = 1, \ldots n)$$

nicht für jedes Wertsystem u, v null, da sie es für $u = 1$, $v = -1$ nicht ist.

Da sich D nicht ändert, wenn man u mit v vertauscht, so gestattet D eine Faktorenzerlegung der Form

$$D \equiv \prod_1^{\frac{1}{2}n}{}_s (\lambda_s u + \mu_s v)(\mu_s u + \lambda_s v),$$

worin die λ_s, μ_s ein System von $\frac{1}{2} n$ Konstantenpaaren bedeuten, die teilweise oder alle identisch sein können. Wir beschränken uns auf die Betrachtung des Falls, daſs D nur Elementarteiler ersten Grades[1]) besitzt, d. h. daſs jeder k-fache Linearfaktor von D auch in den gröſsten gemeinsamen Divisor sämtlicher $n - k + 1$-zeiliger Unterdeterminanten von D als einfacher Faktor aufgeht. Dann besteht eine Identität der Form:

$$\sum c_{ik} x_k y_i \equiv \sum_1^{\frac{1}{2}n}{}_s (\lambda_s X_s Y_{\frac{1}{2}n+s} + \mu_s X_{\frac{1}{2}n+s} Y_s),$$

worin $X_1 X_2 \ldots X_n$ n linear unabhängige Linearformen von $x_1 \ldots x_n$ mit konstanten Koeffizienten, und die Y_i die dazu kongruenten Linearformen in $y_1 \ldots y_n$ bedeuten. Daher hat man identisch:

$$\varDelta \equiv \sum \lambda_s X_s d X_{\frac{1}{2}n+s} + \mu_s X_{\frac{1}{2}n+s} d X_s \equiv$$

$$\equiv \sum_1^{\frac{1}{2}n}{}_s (X_s)^{1-\mu_s} (X_{\frac{1}{2}n+s})^{1-\lambda_s} d\,[(X_s)^{\mu_s} (X_{\frac{1}{2}n+s})^{\lambda_s}].$$

---

1) Vgl. z. B. P. Muth, Theorie und Anwendung der Elementarteiler, Leipzig 1899.

§ 4. Verallgemeinerung der expliciten Reduktionsmethode.

236. Es sei ein beliebiger Pfaff'scher Ausdruck

$$\varDelta \equiv \sum_1^n a_i dx_i$$

sowie ein System von r ($< n$) unabhängigen Funktionen $f_1 f_2 \ldots f_r$ der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ gegeben. Ferner sollen mit 2ϱ und $2\varrho'$ die Rangzahlen der beiden Matrices

$$(B_r) \left\| \begin{matrix} a_{ik} & a_i & f_{hi} \\ -a_k & 0 & 0 \\ -f_{hk} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|; \quad (C_r) \left\| \begin{matrix} a_{ik} & f_{hi} \\ -f_{hk} & 0 \end{matrix} \right\| \quad \begin{pmatrix} i, k = 1 \ldots n \\ h = 1 \ldots r \end{pmatrix}$$

bezeichnet werden[1]). *Berechnet man dann aus den Relationen*

(1) $$f_1 = c_1, \; f_2 = c_2 \ldots f_r = c_r$$

irgend r der Variabeln x als Funktionen der $n - r$ übrigen x und der Konstanten c_i, und substituirt die so erhaltenen Ausdrücke in $\varDelta$, so verwandelt sich $\varDelta$ in einen Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta_0$ mit $n - r$ Variabeln, der für jedes beliebige Wertsystem $c_1 \ldots c_r$ die Klasse

$$\varkappa_0 = \varrho + \varrho' - 2r$$

besitzt.

Umgekehrt, soll der Pfaff'sche Ausdruck $\varDelta_0$, in den sich $\varDelta$ vermöge der Relationen (1) *verwandelt, für jedes beliebige Wertsystem $c_1 \ldots c_r$ die Klasse $\varkappa_0$ besitzen, so müssen die Rangzahlen 2ϱ, $2\varrho'$ der beiden Matrices (B_r), (C_r) im Falle eines geraden $\varkappa_0$ den Gleichungen:*

$$2\varrho = 2\varrho' = \varkappa_0 + 2r,$$

im Falle eines ungeraden $\varkappa_0$ dagegen den Gleichungen

$$2\varrho = \varkappa_0 + 2r + 1; \; 2\varrho' = \varkappa_0 + 2r - 1$$

genügen.

Ersetzt man im Vorstehenden die Worte „für jedes beliebige Wertsystem $c_1 \ldots c_r$" durch die Worte: „für ein bestimmtes Wertsystem $c_1 \ldots c_r$", so hat man unter 2ϱ, $2\varrho'$ die Rangzahlen zu verstehen, die den Matrices (B_r) (C_r) *vermöge der Relationen* (1) zukommen, und es ist aufserdem zu beachten, dafs das Gleichungensystem (1) nunmehr den Bedingungen des Art. 40 genügen mufs.

---

1) Die Zahlen ϱ, ϱ' sind nicht $< r$, da sonst alle $2r$-reihigen Hauptunterdeterminanten von (B_r) und (C_r), also auch alle r-reihigen Determinanten in der Funktionalmatrix von $f_1 \ldots f_r$ verschwänden; ferner ist $2\varrho' \leqq n + r$; $2\varrho \leqq n + r + 1$.

Der soeben ausgesprochene Satz ist eine unmittelbare Folge der Resultate der Art. 230 und 231. In der That ist ja die oben mit $\varkappa_0$ bezeichnete Zahl in der Ausdrucksweise der zitirten Artikel nichts anderes als die um $2r$ verminderte Klasse, die dem Formenpaar

$$\varDelta_u \equiv \Sigma a_i u_i; \quad \varPhi_{uv} \equiv \Sigma\Sigma a_{ik} u_i v_k$$

vermöge der Relationen

$$\sum_1^n {}^i f_{hi} u_i = 0; \quad \sum_1^n {}^i f_{hi} v_i = 0 \qquad (h = 1 \,.\,.\, r)$$

zukommt, vorausgesetzt, daſs die $x_1 \,.\,.\, x_n$ den Gleichungen (1) genügen. Diese letztere Zahl ist aber gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Rangzahlen, die den Matrices (B_r) und (C_r) vermöge des Systems (1) zukommen. Bedeuten aber die c_i *arbiträre* Konstanten, so können durch Hinzunahme der Relationen (1) die genannten Rangzahlen keine Änderung erleiden.

Die Umkehrung des Satzes folgt unmittelbar daraus, daſs ϱ' nur einen der beiden Werte ϱ und $\varrho - 1$ besitzen kann.

Man erkennt leicht, daſs das Theorem dieser Nr. den Satz des Art. 151, auf dem die Reduktionsmethode von Clebsch beruht, als Spezialfall enthält.

237. Gegeben sei wieder ein beliebiger Pfaff'scher Ausdruck $\varDelta$ und r $(< n)$ unabhängige Funktionen $f_1 \,.\,.\, f_r$ der Variabeln $x_1 \,.\,.\, x_n$. *Ist dann* 2ϱ *der Rang der Matrix* (B_r), *so ist* ϱ *die kleinste Zahl von der Beschaffenheit, daſs sich* $\varDelta$ *in der Form:*

$$(2) \quad \varDelta \equiv F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_r df_r + F_{r+1} df_{r+1} + \cdots + F_\varrho df_\varrho$$

darstellen läſst.

In der That, soll eine Darstellung der Form (2) möglich sein, so muſs $\varDelta$ vermöge der Relationen

$$f_1 = c_1 \,.\,.\, f_\varrho = c_\varrho$$

identisch verschwinden, die Matrices (B_ϱ) und (C_ϱ) müssen also nach der vorigen Nr. beide den Rang 2ϱ besitzen; umgekehrt, ist dies der Fall, so verschwinden in (B_ϱ) alle $2\varrho + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten, und infolge dessen auch alle $\varrho + 1$-reihigen Determinanten in dem Schema

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdot\,\cdot & a_n \\ f_{11} & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & f_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{\varrho 1} & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & f_{\varrho n} \end{array} \right\|,$$

also giebt es wirklich eine Darstellung der Gestalt (2). Wir haben also nur noch zu zeigen, dafs sich wirklich $\varrho - r$ von einander und von den $f_1 \ldots f_r$ unabhängige Funktionen $f_{r+1} \ldots f_\varrho$ derart bestimmen lassen, dafs die Matrix (B_ϱ) den Rang 2ϱ besitzt. Dies ergiebt sich aber aus folgendem Satze:

Ist $r' - 1$ eine Zahl $< \varrho - r$, und hat man die Funktionen $f_{r+1} \ldots f_{r+r'-1}$ bereits so bestimmt, dafs sie unter sich und von $f_1 \ldots f_r$ unabhängig sind, und dafs alle $2\varrho + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten der Matrix $(B_{r+r'-1})$ verschwinden, so erhält man durch Nullsetzen aller $2\varrho + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten von $(B_{r+r'})$ für die Unbekannte $f_{r+r'}$ ein $(n + r + r' - 2\varrho)$-gliedriges vollständiges System linearer partieller Differentialgleichungen mit den Independenten $x_1 \ldots x_n$, und zwar besitzt dies System aufser $f_1 \ldots f_{r+r'-1}$ noch

$$2\varrho - 2(r + r') + 1$$

weitere unabhängige Lösungen. Für $f_{r+r'}$ ist dann ein beliebiges dieser Integrale zu wählen, was eine Operation

$$2\varrho - 2r - 2r' + 1$$

erfordert.

Der Beweis dieses Satzes wird ganz ähnlich wie in Art. 213 geführt. Wir bilden das 2ϱ-gliedrige System totaler Differentialgleichungen in $n + r + r'$ Variabeln $x_0, x_1 \ldots x_{n+r+r'-1}$:

$$\begin{aligned}
&x_0 \sum_1^n {}^k a_{ik} dx_k + a_i dx_0 + \sum_1^{r+r'-1} {}^h f_{hi} dx_{n+h} = 0 \quad (i = 1 \ldots n) \\
&\sum {}^k a_k dx_k = 0 \\
&\sum {}^k f_{jk} dx_k = 0 \quad (j = 1, \ldots r + r' - 1).
\end{aligned}$$

Aus diesem System lassen sich nun genau $2\varrho - r - r'$ linear unabhängige Linearkombinationen bilden, die die Variabeln $x_0, x_{n+1}, x_{n+2} \ldots$ weder in den Differentialen noch in den Koeffizienten enthalten, also nach Art. 75 für sich ein unbeschränkt integrables System in $x_1 \ldots x_n$ bilden. Dieses System ist adjungirt zu den partiellen Differentialgleichungen mit der Unbekannten $f_{r+r'}$, die sich durch Nullsetzen aller $2\varrho + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten des Schemas $(B_{r+r'})$ ergeben.

Ist 2ϱ der Rang von (B_r), so ist der Rang der Matrix (C_r) gleich 2ϱ oder gleich $2\varrho - 2$. Im letzteren Falle zeigt man genau wie vorhin: durch je eine Operation

$$2\varrho - 2r - 2, \; 2\varrho - 2r - 4, \ldots 4, \; 2$$

kann man die Funktionen $f_{r+1}, \ldots f_{\varrho-1}$ so bestimmen, daſs sie unter sich und von $f_1 \ldots f_r$ unabhängig sind, und alle 2ϱ-reihigen Hauptunterdeterminanten von $(C_{\varrho-1})$ zum Verschwinden bringen. Ersetzt man dann in dem Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ irgend $\varrho - 1$ Variabeln x durch ihre aus den Relationen:

$$f_1 = c_1;\ f_2 = c_2 \ \ldots\ f_{\varrho-1} = c_{\varrho-1}$$

folgenden Werte, so verwandelt sich $\varDelta$ nach Art. 236 in das exakte Differential einer Funktion $\overline{U}$, die von $n - \varrho + 1$ Variabeln x und den Konstanten $c_1 \ldots c_{\varrho-1}$ abhängt, und durch eine Operation 0 gefunden wird. Geht $\overline{U}$ in f_ϱ über, wenn man die c_i wieder durch die f_i ersetzt, so gestattet $\varDelta$ die Darstellung:

$$\varDelta \equiv F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r + \cdots + F_{\varrho-1} df_{\varrho-1} + df_\varrho.$$

Darnach können wir folgendes Theorem aussprechen:

Bedeuten $f_1 \ldots f_r$ $(r < n)$ beliebige unabhängige Funktionen, und besitzt die Matrix (B_r) die Rangzahl 2ϱ, dann und nur dann gestattet der Pfaff'sche Ausdruck $\varDelta$ die Darstellung:

$$\varDelta \equiv F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r + F_{r+1} df_{r+1} + \cdots + F_\varrho df_\varrho, \tag{2}$$

worin die Funktionen $f_1 f_2 \ldots f_\varrho$ unabhängig sind. Dabei sind die Funktionen

$$f_1 f_2 \ldots f_\varrho,\ F_{r+1},\ F_{r+2} \ldots F_\varrho$$

unabhängig oder durch eine Relation verknüpft,[1]) je nachdem der Rang $2\varrho'$ des Schemas (C_r) gleich 2ϱ oder gleich $2\varrho - 2$ ist.

Im letzteren Falle kann $\varDelta$ auf die Gestalt

$$\varDelta \equiv F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r + F_{r+1} df_{r+1} + \cdots + F_{\varrho-1} df_{\varrho-1} + df_\varrho \tag{3}$$

gebracht werden, worin die Funktionen

$$f_1 \ldots f_\varrho,\ F_{r+1} \ldots F_{\varrho-1}\ {}^{2})$$

unabhängig sind.

Die Ermittelung der Funktionen $f_1 \ldots f_\varrho$ in der Darstellung (2) *verlangt im Falle $2\varrho = 2\varrho'$ die Operationen:*

$$2\varrho - 2r - 1,\ 2\varrho - 2r - 3, \ldots 3, 1;$$

die Bestimmung von $f_1 \ldots f_\varrho$ in der Darstellung (3) *erfordert je eine Operation*

$$2\varrho - 2r - 2,\ 2\varrho - 2r - 4,\ \ldots\ 4, 2, 0.$$

Die Koeffizienten F_i ergeben sich hinterher aus den Identitäten (2) *bezw.* (3) *durch Auflösung linearer Gleichungen.*

1) Dieser Fall tritt immer ein, wenn $2\varrho = n + r + 1$, die Funktionen a_{ik}, f_k also gar keinen Bedingungen unterliegen.

2) Diese Funktionen haben dann natürlich eine andere Bedeutung wie in (2).

Die soeben aufgestellten Behauptungen über die Unabhängigkeit der Funktionen $F_i f_i$ folgen leicht aus Art. 236 und dem Fundamentalsatz.

238. Wir wollen nun mit den beiden Matrices (B_r) und (C_r) eine wichtige Umformung vornehmen.

Die Klasse $\varkappa$ des Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$ sei zunächst gleich 2λ, und das Aggregat

$$P \equiv (1, 2, \ldots 2\lambda)$$

nicht identisch null. Wir bezeichnen nun mit $i_1, i_2, \ldots i_{2s}$ irgend $2s$ Zahlen der Reihe

$$0,\ 2\lambda + 1,\ 2\lambda + 2, \ldots\ n,\ n + 1, \ldots n + r;$$

ferner setzen wir wie in Art. 36:

$$(4) \qquad [i, k] \equiv (1, 2, \ldots 2\lambda, i, k)$$

und verstehen unter dem Symbol

$$[i_1 i_2 \ldots i_{2s}]$$

dasjenige Pfaff'sche Aggregat der Ordnung $2s$, das mit Hülfe der Elemente $[i_\alpha i_\beta]$ genau nach denselben Regeln gebildet wird, wie das Aggregat $(i_1 i_2 \ldots i_{2s})$ mittels der Elemente $(i_\alpha i_\beta)$ (vgl. Art. 19, 20). Nach Art. 36 gilt dann die Identität:

$$[i_1 i_2 \ldots i_{2s}] \equiv P^{s-1} (1, 2, \ldots 2\lambda,\ i_1 \ldots i_{2s}).$$

Verschwinden also für eine bestimmte Zahl s alle Pfaff'schen Aggregate der Form

$$(1, 2, \ldots 2\lambda,\ i_1 \ldots i_{2s}),$$

so gilt dasselbe von allen Ausdrücken $[i_1 \ldots i_{2s}]$ und umgekehrt. Bilden wir daher die beiden schiefsymmetrischen Matrices:

$$(5) \qquad \| [i, k] \| \quad (i, k = 0, 2\lambda + 1, 2\lambda + 2, \ldots n, \ldots n + r)$$

$$(6) \qquad \| [i, k] \| \quad (i, k = \quad 2\lambda + 1, 2\lambda + 2, \quad \ldots \quad n + r)$$

und bedeuten 2σ, $2\sigma'$ ihre Rangzahlen, ferner 2ϱ und $2\varrho'$ wie vorhin diejenigen der Matrices (B_r) und (C_r), so erhält man mit Rücksicht auf Art. 26 die Beziehungen:

$$(7) \qquad 2\varrho = 2\lambda + 2\sigma;\ 2\varrho' = 2\lambda + 2\sigma'.$$

Ersetzt man aber in der Matrix (5) die Ausdrücke $[i, k]$ durch ihre Werte (4), so folgt aus den Rechnungen von Art. 219, 220 sofort, daſs diese Matrix nach Division ihrer Elemente mit $\pm P$ und passender Anordnung ihrer Zeilen und Spalten folgende Form annimmt:

$$
(\overline{B}_r)\left\|\begin{matrix}
0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & (f_1)_0 & (f_2)_0 & \cdot\cdot & (f_r)_0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & (f_1)_{n-\varkappa} & (f_2)_{n-\varkappa} & \cdot\cdot & (f_r)_{n-\varkappa} \\
-(f_1)_0 & -(f_1)_1 & \cdot\cdot & -(f_1)_{n-\varkappa} & 0 & (f_1 f_2) & \cdot\cdot & (f_1 f_r) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-(f_r)_0 & -(f_r)_1 & \cdot\cdot & -(f_r)_{n-\varkappa} & (f_r f_1) & (f_r f_2) & \cdot\cdot & 0
\end{matrix}\right\|.
$$

Die Klammersymbole $(\varphi)_s$ und (φf) haben dabei dieselbe Bedeutung wie in Art. 220. Das Schema (6) entsteht aus $(\overline{B}_r)$ durch Streichung der ersten Zeile und Spalte; wir wollen die so entstehende Matrix mit $(\overline{C}_r)$ bezeichnen. Die Relationen (7) liefern dann mit Rücksicht auf Art. 236 den wichtigen Satz:

Es sei $\varDelta$ ein Pfaff'scher Ausdruck der Klasse $\varkappa = 2\lambda$; bedeuten dann $f_1 \,..\, f_r$ $(r < n)$ irgend welche unabhängige Funktionen der Variabeln x, und sind 2σ, $2\sigma'$ die Rangzahlen der beiden Matrices $(\overline{B}_r)$ und $(\overline{C}_r)$, dann und nur dann reduzirt sich $\varDelta$ vermöge der Relationen

$$(8) \qquad f_1 = c_1;\; f_2 = c_2;\; ..\; f_r = c_r$$

auf einen Ausdruck $\varDelta_0$ in $n - r$ Variabeln, der für beliebige Werte c_i die Klasse

$$\varkappa_0 = \sigma + \sigma' + 2\lambda - 2r$$

besitzt.

239. Durch Angabe der Zahlen λ, r, $\varkappa_0$ sind die beiden Zahlen σ, σ' offenbar eindeutig bestimmt. Setzen wir $\varkappa_0 = 0$, so folgt:

Damit die Relationen (8) für beliebige Werte c_i ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung $\varDelta = 0$ darstellen, ist notwendig und hinreichend, da/s in der Matrix $(\overline{B}_r)$ sämtliche $2r - 2\lambda + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten verschwinden.

Darnach ist $2r - 2\lambda$ der Minimalwert, den die Rangzahlen der Matrices $(\overline{B}_r)$ und $(\overline{C}_r)$ erreichen können, falls $f_1 .. f_r$ unabhängig sein sollen.

Nehmen wir in dem vorstehenden Resultat für r seinen Minimalwert λ, so folgt:

Im Falle $\varkappa = 2\lambda$ stellen die Gleichungen

$$(8) \qquad f_1 = c_1;\; f_2 = c_2 \;..\; f_\lambda = c_\lambda$$

dann und nur dann für beliebige Werte der c_i ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung $\varDelta = 0$ dar, wenn man identisch hat:

$$(9) \qquad (f_i)_s = 0;\; (f_i f_k) = 0 \qquad (i, k = 1 \,..\, r;\; s = 0, 1, .. n - \varkappa).$$

Dafs die linken Seiten eines vollständigen Integraläquivalentes dem System V genügen müssen, ist uns aus Art. 205 bereits bekannt.

240. Aus dem Vorhergehenden ergeben sich noch die weiteren Folgerungen:

Die Klasse des Ausdrucks Δ_0, auf den sich ein Ausdruck Δ der Klasse 2λ vermöge des r-gliedrigen Gleichungensystems

$$(10) \qquad f_1 = 0 \,..\, f_r = 0$$

reduzirt, ist gleich $\sigma + \sigma' + 2\lambda - 2r$, wenn 2σ und $2\sigma'$ die Rangzahlen bedeuten, die den Matrices $(\overline{B}_r)$ und $(\overline{C}_r)$ vermöge (10) *zukommen, und wenn das Pfaff'sche Aggregat P vermöge* (10) *nicht verschwindet.*

Ist Δ ein Ausdruck der Klasse 2λ, und bilden die Gleichungen (10) *ein nicht singuläres Integraläquivalent* (Art. 190) *der Pfaff'schen Gleichung $\Delta = 0$, so kann man die Variabeln x so numeriren, daſs das Pfaff'sche Aggregat P vermöge* (10) *nicht null ist, und es verschwinden dann alle $2r - 2\lambda + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten der Schemata $(\overline{B}_r)$ und $(\overline{C}_r)$ vermöge* (10) *identisch. Umgekehrt, ist letzteres der Fall, ohne daſs P vermöge* (10) *null ist, so bilden die Gleichungen* (10) *ein nicht singuläres Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung $\Delta = 0$.*

Ein nicht singuläres Integraläquivalent kann darnach nicht weniger als λ-gliedrig sein, was wir aus Art. 191 schon wissen. Für $r = \lambda$ folgt insbesondere:

Die Relationen

$$(11) \qquad f_1 = 0,\; f_2 = 0,\; ..\, f_\lambda = 0$$

liefern dann und nur dann ein nicht singuläres λ-gliedriges Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichungen $\Delta = 0$, wenn alle Relationen

$$(f_i)_s \equiv 0,\; (f_i f_k) \equiv 0 \quad (i, k = 1 \,..\, r;\; s = 0, 1, ..\, n - 2\lambda)$$

vermöge (11) erfüllt sind.

241. Für den bedingungslosen Ausdruck

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_m dx_m$$

in den $2m$ unabhängigen Veränderlichen x_i, p_i hat man, wie die Ausrechnung lehrt:

$$(f)_0 \equiv p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m};\; P \equiv -1,$$

während das Klammersymbol (φf) diejenige Bedeutung erhält, in der es zuerst von *Poisson* gebraucht wurde:

$$(12) \qquad (\varphi f) \equiv \sum_1^m {}_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right).$$

Beschränken wir uns von vorneherein auf diejenigen Integraläquivalente der Pfaff'schen Gleichung $\Sigma p_i dx_i = 0$, die in den p_i homogen sind und die Gleichungen

$$p_1 = 0 \,..\, p_m = 0$$

nicht enthalten, und deuten wir dementsprechend die $x_i p_i$ als homogene Elementkoordinaten des Raums R_m, so führen die Ergebnisse der letzten Artikel unmittelbar zu folgenden Sätzen, in denen das Symbol (φf) in der Bedeutung (12) gebraucht wird:

Sind die r Funktionen $f_1 \,..\, f_r$ der $2m$ Veränderlichen $x_i p_i$ von einander unabhängig und in den p_i homogen nullter Ordnung, und ist $2r - 2m$ der Rang der Matrix

$$\| (f_i f_k) \| \qquad (i, k = 1, 2, \,..\, r), \tag{13}$$

dann und nur dann stellen die Relationen

$$f_1 = c_1 \,..\, f_r = c_r$$

für jedes beliebige Konstantensystem c_i eine Element-M_{2m-r-1} des Raums $R_m(x_1 \,..\, x_m)$ dar.

Damit die Gleichungen:

$$f_i(x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m) = c_i \qquad (i = 1 \,..\, m)$$

für beliebige c_i eine Element-M_{m-1} des R_m darstellen, ist notwendig und hinreichend, dafs die f_i von einander unabhängig und in den p_i homogen nullter Ordnung seien, und dafs alle Ausdrücke:

$$\sum_1^m {}_s \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_s} \frac{\partial f_k}{\partial x_s} - \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \frac{\partial f_k}{\partial p_s} \right) \qquad (i, k = 1 \,..\, m)$$

identisch verschwinden.

Ist das r-gliedrige Gleichungensystem

$$f_i(x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m) = 0 \qquad (i = 1 \,..\, r) \tag{14}$$

in den p_i homogen, d. h. verschwinden alle r Ausdrücke $\sum p_s \frac{\partial f_i}{\partial p_s}$ vermöge (14), so stellt es dann und nur dann eine Element-M_{2m-r-1} dar, wenn vermöge desselben die Matrix (13) den Rang $2r - 2m$ besitzt; insbesondere erfüllt ein m-gliedriges Gleichungensystem der Form (14) dann und nur dann die Pfaff'sche Gleichung $\Sigma p_s dx_s = 0$, wenn vermöge desselben alle Ausdrücke

$$\sum p_s \frac{\partial f_i}{\partial p_s}, \quad (f_i f_k)$$

null sind.

242. Im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ seien die Aggregate:

$$P' = (1, 2, \ldots 2\lambda - 2); \; Q \equiv (0, 1, \ldots 2\lambda - 1)$$

nicht identisch null.

Schreiben wir jetzt:

$$[i, k] = (1, 2, \ldots 2\lambda - 2, i, k)$$

so folgt aus Art. 36 die Identität:

$$[i_1 i_2 \ldots i_{2s}] = P'^{s-1}(1, 2, \ldots 2\lambda - 2, i_1, i_2, \ldots i_{2s}),$$

worin $i_1 \ldots i_{2s}$ irgend $2s$ Zahlen der Reihe

$$2\lambda - 1, \; 2\lambda, \ldots n, \; n + 1 \ldots n + r$$

bedeuten. Wir schliefsen jetzt wie oben, dafs der Rang $2\sigma'$ der Matrix

(15) $$\| [ik] \| \qquad (i, k = 2\lambda - 1, 2\lambda, \ldots n + r)$$

mit dem Rang $2\varrho'$ von (C_r) in folgender Beziehung steht:

$$2\varrho' = 2\sigma' + 2\lambda - 2.$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Symbole $[ik]$ schreibt sich aber die Matrix (15) nach Art. 223 folgendermafsen:

(16) $$\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & \ldots & 0 & \{f_1\}_0 & \ldots & \{f_r\}_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \{f_1\}_{n-\varkappa} & \ldots & \{f_r\}_{n-\varkappa} \\ -\{f_1\}_0 & \ldots & -\{f_1\}_{n-\varkappa} & 0 & \{f_1 f_2\} \ldots & \{f_1 f_r\} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\{f_r\}_0 & \ldots & -\{f_r\}_{n-\varkappa} & \{f_r f_1\} & \{f_r f_2\} \ldots & 0 \end{array} \right\|.$$

Aus den Identitäten (22) und (23) des Art. 224 folgt jetzt unmittelbar, dafs diese Matrix in die nachstehende Gestalt umgesetzt werden kann:

$(\overline{C}_r)$ $$\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & \ldots & 0 & \{f_1\}_0 & \ldots & \{f_r\}_0 \\ 0 & \ldots & 0 & [f_1]_1 & \ldots & [f_r]_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & [f_1]_{n-\varkappa} & \ldots & [f_r]_{n-\varkappa} \\ -\{f_1\}_0 & \ldots & -[f_1]_{n-\varkappa} & 0 & [f_1 f_2] \ldots & [f_1 f_r] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\{f_r\}_0 & \ldots & -[f_r]_{n-\varkappa} & [f_r f_1] & [f_r f_2] \ldots & 0 \end{array} \right\|.$$

Diese Umformung vollzieht sich in der Weise, dafs man in der Matrix (16) zunächst die 2^{te}, 3^{te}, .. $n - \varkappa + 1^{\text{te}}$ Zeile und Spalte mit dem Quotienten $\frac{Q}{P'}$ multiplizirt, sodann die mit geeigneten Funktionen multiplizirten Elemente der ersten Zeile und Spalte zu den übrigen Zeilen bezw. Spalten addirt. Durch alle diese Umformungen bleibt aber der Rang der Matrix (16) ungeändert (Art. 12).

Verstehen wir schliefslich unter dem Symbol $[ik]$ folgenden Ausdruck

$$[ik] \equiv (0, 1, \ldots 2\lambda - 1, ik),$$

so schliefsen wir aus der Identität

$$[i_1 i_2 \ldots i_{2s}] \equiv Q^{s-1}(0, 1, \ldots 2\lambda - 1, i_1 \ldots i_{2s})$$

wie vorhin, dafs der Rang 2σ der Matrix

$$(17) \qquad \| [ik] \| \qquad (i, k = 2\lambda, 2\lambda + 1 \ldots n)$$

gleich $2\varrho - 2\lambda$ ist, wenn mit 2ϱ derjenige von (B_r) bezeichnet wird. Die Matrix (17) entsteht aber aus $(\overline{C}_r)$ offenbar dadurch, dafs man die erste Zeile und Spalte fortläfst; das so entstehende Schema werde mit $(\overline{B}_r)$ bezeichnet. Mit Rücksicht auf Art. 236 ergeben sich jetzt der Reihe nach folgende Sätze, die alle unter der Annahme

$$\varkappa = 2\lambda - 1; \; P' \mathrel{\equiv\!\!\!|\!\!\!\equiv} 0; \; Q \mathrel{\equiv\!\!\!|\!\!\!\equiv} 0$$

gelten:

1) *Sind $f_1 \ldots f_r$ unabhängige Funktionen von $x_1 \ldots x_n$, so reduzirt sich der Pfaff'sche Ausdruck Δ vermöge der Relationen*

$$(18) \qquad f_1 = c_1 \ldots f_r = c_r$$

auf einen Pfaff'schen Ausdruck Δ_0 mit $n - r$ Variabeln, der für beliebige Werte der Konstanten c_i die Klasse

$$(19) \qquad \varkappa_0 = \sigma + \sigma' + 2\lambda - 1 - 2r$$

besitzt, wenn mit 2σ und $2\sigma'$ bez. die Rangzahlen der Matrices

$$(\overline{B}_r) \qquad \left\| \begin{matrix} [f_i f_k] & [f_i]_s \\ [f_k]_s & 0 \end{matrix} \right\|; \qquad (\overline{C}_r) \left\| \begin{matrix} [f_i f_k] & \{f_i\}_0 & [f_i]_s \\ \{f_k\}_0 & 0 & 0 \\ [f_k]_s & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$(i, k = 1 \ldots r; \; s = 1, 2, \ldots n - \varkappa)$$

bezeichnet werden.

2) *Die Relationen* (18) *stellen nur dann, aber auch stets dann für beliebige c_i ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung $\Delta = 0$ dar, wenn die Matrix $(\overline{B}_r)$ den Rang $2r - 2\lambda$ besitzt; der Rang von $(\overline{B}_r)$ kann nicht $< 2r - 2\lambda$ sein, wenn die Funktionen $f_1 \ldots f_r$ unabhängig sein sollen.*

3) *Damit die Gleichungen*

$$f_1 = c_1, \; f_2 = c_2 \ldots f_\lambda = c_\lambda$$

ein vollständiges Integraläquivalent von $\Delta = 0$ bilden, ist notwendig und hinreichend, dafs die Gleichungen

$$[f_i]_s \equiv 0, \; [f_i f_k] \equiv 0$$

für alle Indices $s = 1, \ldots n - \varkappa$; $i, k = 1 \ldots \lambda$ identisch bestehen.

4) *Verschwinden vermöge des r-gliedrigen Gleichungensystems*

$$(20) \qquad f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \ldots f_r = 0$$

die Pfaff'schen Aggregate P' und Q nicht identisch, so ist die Klasse $\varkappa_0$ des Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta_0$, auf den sich $\varDelta$ vermöge (20) *reduzirt, durch die Formel* (19) *gegeben, wenn 2σ und $2\sigma'$ die Rangzahlen bezeichnen, die den Matrices $(\overline{B}_r)$ und $(\overline{C}_r)$ vermöge des Gleichungensystems* (20) *zukommen.*

5) *Bilden die Gleichungen* (20) *ein r-gliedriges Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung $\varDelta = 0$, und sind insbesondere die Funktionen P' und Q vermöge* (20) *nicht null, so verschwinden in dem Schema $(\overline{B}_r)$ vermöge* (20) *alle $2r - 2\lambda + 2$-reihigen Unterdeterminanten; umgekehrt, ist dies der Fall, ohne daſs P' oder Q vermöge* (20) *verschwinden, so bilden die Relationen* (20) *ein nichtsinguläres Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung $\varDelta = 0$.*

6) *Ein nicht singuläres Integraläquivalent von $\varDelta = 0$ muſs mindestens λ Gleichungen enthalten; die Relationen*

$$f_1 = 0,\ \ldots f_\lambda = 0$$

bilden dann und nur dann ein λ-gliedriges Integraläquivalent, wenn vermöge derselben alle Ausdrücke $[f_i]_s$, $[f_i f_k]$ verschwinden.

243. Für den bedingungslosen Ausdruck

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m$$

in den $2m+1$ Variabeln z, x_i, p_i hat der eckige Klammerausdruck folgende Bedeutung:

$$(21) \quad [\varphi f] \equiv \sum_1^m {}_s \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial p_s}\left(\frac{\partial f}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right\},$$

wie man entweder durch direkte Rechnung oder auch aus Art. 260 erkennt. Aus der vorigen Nr. folgt jetzt:

Damit die Relationen

$$f_i(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = c_i \qquad (i = 1 \ldots r)$$

für beliebige c_i eine Element-M_{2m+1-r} des Raums $R_{m+1}(z x_1 \ldots x_m)$ darstellen (Art. 177), *ist notwendig und hinreichend, daſs die Matrix*

$$(22) \qquad \left\| \begin{matrix} 0 & [f_1 f_2] & [f_1 f_3] & \cdot\cdot & [f_1 f_r] \\ [f_2 f_1] & 0 & [f_2 f_3] & \cdot\cdot & [f_2 f_r] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [f_r f_1] & [f_r f_2] & [f_r f_3] & \cdot\cdot & 0 \end{matrix} \right\|,$$

worin das Symbol $[\varphi f]$ *die Bedeutung* (21) *hat, den Rang* $2r - 2m - 2$ *besitze, und es ist dies der kleinste Wert, den dieser Rang annehmen kann, wenn die Funktionen* $f_1 \ldots f_r$ *hinsichtlich der* $2m + 1$ *Variabeln* z, x_i, p_i *unabhängig sein sollen. Insbesondere stellen die Gleichungen*

$$f_1 = c_1 \ldots f_{m+1} = c_{m+1}$$

dann und nur dann für beliebige c_i *eine Element-*M_m *dar, wenn sämtliche* $\frac{1}{2} m(m+1)$ *Ausdrücke der Form:*

$$(23) \qquad \sum_1^m {}_s \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial p_s} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial f_k}{\partial z} \right) - \frac{\partial f_k}{\partial p_s} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial f_i}{\partial z} \right) \right\}$$

identisch null sind.

Das r-gliedrige Gleichungensystem

$$(24) \qquad f_i(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = 0 \qquad (i = 1 \ldots r)$$

definirt dann und nur dann eine Element-M_{2m+1-r}, *wenn vermöge desselben alle* $2r - 2m$*-reihigen Unterdeterminanten des Schemas* (22) *verschwinden; insbesondere liefern die Gleichungen* (24) *dann und nur dann eine Element-*M_m, *wenn* $r = m + 1$ *und wenn vermöge* (24) *alle Ausdrücke* (23) *verschwinden.*

244. Der zuletzt ausgesprochene Satz läfst sich ohne Zuhilfenahme der allgemeinen Theorie des Pfaff'schen Problems beweisen.

Zu diesem Zwecke gebrauchen wir das Symbol $[\varphi f]$ im Folgenden immer in der Bedeutung (21), und beweisen zunächst die Thatsache:

Sind die beiden r-gliedrigen Gleichungensysteme

$$(25) \qquad f_i(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = 0 \qquad (i = 1 \ldots r)$$

$$(26) \qquad \varphi_i(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = 0 \qquad (i = 1 \ldots r)$$

äquivalent (Art. 42), und bestehen die $\frac{1}{2} r(r-1)$ Identitäten $[f_i f_k] \equiv 0$ vermöge (25), so verschwinden auch alle Ausdrücke $[\varphi_i \varphi_k]$ vermöge der Gleichungen (26).

In der That, das Gleichungensystem (25) gestattet der Annahme nach die r infinitesimalen Transformationen

$$X_i f \equiv [f_i f];$$

mithin (Art. 55) gestattet auch das System (26) diese infinitesimalen Transformationen, d. h. es verschwinden alle Ausdrücke $[f_i \varphi_k]$ vermöge (26), also auch vermöge (25). Da nun identisch $[f_i \varphi_k] \equiv - [\varphi_k f_i]$, so gestattet das Gleichungensystem (25) die r infinitesimalen Transformationen $Y_k f \equiv [\varphi_k f]$ und dasselbe gilt sonach (Art. 55) auch für das äquivalente System (26), d. h. alle Ausdrücke $[\varphi_i \varphi_k]$ verschwinden vermöge (26).

245. Es möge jetzt das $m+1$-gliedrige Gleichungensystem

$$f_1 = 0, \ldots f_{m+1} = 0 \tag{27}$$

die Eigenschaft besitzen, dafs alle $\frac{1}{2} m(m+1)$ Relationen

$$[f_i f_k] = 0 \tag{28}$$

vermöge (27) erfüllt sind. Dann können die f_i nicht alle von z unabhängig sein.[1]) Andernfalls besäfsen nämlich die Gleichungen (28) folgende Form:

$$\sum_1^m {}_s \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_s} \frac{\partial f_k}{\partial x_s} - \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \frac{\partial f_k}{\partial p_s} \right) = 0 \qquad (i, k = 1 \ldots m+1).$$

Also besäfsen die linearen Gleichungen

$$\sum_1^m {}_s \, \xi_s \frac{\partial f_i}{\partial p_s} + \sum_1^m {}_s \, \xi_{m+s} \frac{\partial f_i}{\partial x_s} = 0 \qquad (i = 1 \ldots m+1) \tag{29}$$

die $m+1$ Lösungensysteme

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x_m}, \; -\frac{\partial f_k}{\partial p_1}, \ldots -\frac{\partial f_k}{\partial p_m} \quad (k = 1 \ldots m+1), \tag{30}$$

und es wären also entweder die Gleichungen (29) oder die Gröfsensysteme (30) vermöge (27) nicht linear unabhängig, also bildeten die Gleichungen (27) kein $m+1$-gliedriges Gleichungensystem im Sinne von Art. 40.

Darnach läfst sich eine der Gleichungen (27) nach z auflösen; durch Elimination von z erhalten die übrigen Gleichungen die Form:

$$\varphi_i(x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = 0 \qquad (i = 1 \ldots m). \tag{31}$$

Kann man aus diesen Relationen l und nicht mehr unabhängige Gleichungen zwischen den x allein ableiten:

$$\psi_1(x_1 \ldots x_m) = 0, \ldots \psi_l(x_1 \ldots x_m) = 0, \tag{32}$$

---

1) Dies ist auch eine Folge der Thatsache, dafs für den Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta = dz - \Sigma p_i dx_i$ das Symbol $\{f\}_0$ die Bedeutung $\frac{\partial f}{\partial z}$ hat, und dafs der Rang der Matrix $(\overline{C}_{m+1})$, die für unsern Pfaff'schen Ausdruck nach der Vorschrift des Art. 242 zu bilden ist, nicht null sein kann; andernfalls wäre die Klasse $\varkappa_0$ des Pfaff'schen Ausdrucks, auf den sich $\varDelta$ vermöge (27) reduzirt, < 0.

so müssen sich die Gleichungen (31) nach $m - l$ von den Variabeln p_i, etwa nach $p_{l+1} p_{l+2} \ldots p_m$ auflösen lassen:

(33) $$p_{l+s} = \chi_{l+s}(p_1 \ldots p_l, x_1 \ldots x_m).$$

Dann mufs man, behaupten wir, die Gleichungen (32) nach $x_1 \ldots x_l$ auflösen können; andernfalls würde aus (32) eine Gleichung in $x_{l+1} \ldots x_m$ allein folgen, und wäre diese letztere etwa in der Form

$$x_{l+1} = \omega(x_{l+2} \ldots x_m)$$

auflösbar, so hätte man

$$[p_{l+1} - \chi_{l+1}, x_{l+1} - \omega] \equiv 1,$$

was unmöglich ist, da der links stehende Ausdruck nach Art. 244 vermöge des Systems (27) verschwinden mufs. Darnach ist das System (27) nach

$$z, x_1 \ldots x_l, p_{l+1} \ldots p_m$$

auflösbar, und kann also die Form erhalten:

(34) $$\begin{cases} z - x_1 p_1 - \cdots - x_l p_l - W(p_1 \ldots p_l, x_{l+1} \ldots x_m) = 0 \\ x_i - W_i(p_1 \ldots p_l, x_{l+1} \ldots x_m) = 0 \qquad (i = 1 \ldots l) \\ p_s - W_s(p_1 \ldots p_l, x_{l+1} \ldots x_m) = 0 \qquad (s = l + 1 \ldots m). \end{cases}$$

Nun hat man aber:

$$[z - p_1 x_1 - \cdots - p_l x_l - W, x_i - W_i] \equiv - x_i - \frac{\partial W}{\partial p_i},$$

$$[z - p_1 x_1 - \cdots - p_l x_l - W, p_s - W_s] \equiv - p_s + \frac{\partial W}{\partial x_s},$$

und die rechten Seiten müssen vermöge (27) oder (34) verschwinden, woraus folgt:

(35) $$W_i \equiv - \frac{\partial W}{\partial p_i}; \;\; W_s \equiv \frac{\partial W}{\partial x_s}.$$

Nach Art. 175 befriedigt also das Gleichungensystem (34), und mithin auch das System (27) die Pfaff'sche Gleichung

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m = 0.$$

Umgekehrt, befriedigt ein $m + 1$-gliedriges Gleichungensystem (27) diese Pfaff'sche Gleichung, so kann es nach dem zitirten Art. die Form (34) (35) erhalten, wenn die Variabeln $x_i p_i$ von vorneherein passend numerirt werden, und die soeben durchgeführten Rechnungen zeigen dann ohne weiteres, dafs die eckigen Klammerausdrücke, die aus je zwei linken Seiten von (34) gebildet werden, vermöge (34) null sind.

Mit Rücksicht auf Art. 244 können wir sonach folgendes Theorem aussprechen:

Damit ein $m+1$*-gliedriges Gleichungensystem*

$$(27) \qquad f_i(z, x_1 \,.\,. x_m p_1 \,.\,. p_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \,.\,. m+1)$$

die Pfaff'sche Gleichung

$$(36) \qquad dz - p_1 dx_1 - \cdot\cdot - p_m dx_m = 0$$

befriedige, ist notwendig und hinreichend, dafs alle Ausdrücke $[f_i f_k]$ *vermöge des Systems* (27) *verschwinden.*

Nebenbei folgt noch der äufserst wichtige Satz:

Befriedigt das $m+1$*-gliedrige Gleichungensystem* (27) *die Pfaff'sche Gleichung* (36), *und ist die Relation*

$$\varphi(z, x_1 \,.\,. x_m p_1 \,.\,. p_m) = 0$$

eine Folge des Systems (27), *so gestattet das Gleichungensystem* (27) *die infinitesimale Transformation*

$$Xf \equiv [\varphi f].$$

246. Der Schlufssatz des Art. 241 ergiebt sich jetzt ohne weiteres. In der That, erfüllen m unabhängige Relationen:

$$(37) \qquad f_i(x_1 \,.\,. x_m p_1 \,.\,. p_m) = 0 \qquad (i = 1 \,.\,. m)$$

die Pfaff'sche Gleichung

$$p_1 dx_1 + \cdot\cdot + p_m dx_m = 0,$$

so befriedigen sie mit $z = 0$ zusammen die Gleichung (35), und umgekehrt. Dazu ist aber nach dem Vorigen notwendig und hinreichend, dafs man vermöge (37) identisch habe.

$$[f_i, z] \equiv \sum p_s \frac{\partial f_i}{\partial p_s} = 0, \; [f_i f_k] \equiv (f_i f_k) \equiv 0 \quad (i, k = 1 \,.\,. m).$$

Kapitel X.

Verwertung des Begriffs: „infinitesimale Transformation“ für die Theorie des Pfaff'schen Problems.

§ 1. Beziehungen zwischen Pfaff'schen Ausdrücken und infinitesimalen Transformationen.

247. Indem wir an die Begriffsbildungen und Sätze der Art. 77 und 78 wieder anknüpfen, ergeben sich nicht nur wesentlich neue Gesichtspunkte für unsere Theorie, sondern auch eine weit einfachere

und übersichtlichere Darstellung für die Mehrzahl der bisher entwickelten Sätze.

Es sei

$$\varDelta \equiv \sum_1^n {}^{\iota}\, a_\iota(x_1 \,..\, x_n)\, dx_\iota$$

ein Pfaff'scher Ausdruck der Klasse $\varkappa$, ferner

$$Xf \equiv \sum_1^n {}^{\iota}\, \xi_\iota(x_1 x_2 \,..\, x_n)\, \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

eine infinitesimale Transformation der Variabeln $x_1 \,..\, x_n$ (Art. 54). Dann hat das Symbol $X\varDelta$ nach Art. 77 folgende Bedeutung:

(1) $$X\varDelta \equiv \sum_1^n {}^{i} \sum_1^n {}^{k}\, \xi_k a_{ik} dx_i + d\,A,$$

worin

$$A \equiv a_1 \xi_1 + \cdots + a_n \xi_n$$

und wie gewöhnlich:

$$a_{\iota k} \equiv - a_{k i} \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$$

gesetzt ist. Wir fragen nun nach allen infinitesimalen Transformationen Xf, welche die Pfaff'sche Gleichung $\varDelta = 0$ ungeändert lassen, also einer Identität der Form

(2) $$X\varDelta \equiv \varrho(x_1 x_2 \,..\, x_n) \cdot \varDelta$$

genügen (Art. 78). Indem wir in dieser Identität die Koeffizienten von dx_i links und rechts vergleichen, erhalten wir zur Bestimmung der unbekannten Funktionen A, ϱ, $\xi_1 \,..\, \xi_n$ das nachfolgende Gleichungensystem:

(3) $$\sum_1^n {}^{k}\, a_{ik} \xi_k = \varrho a_i - \frac{\partial A}{\partial x_i} \qquad (i = 1 \,..\, n).$$

(4) $$\sum_1^n {}^{k}\, a_k \xi_k = A.$$

Umgekehrt, genügen die Funktionen A, ϱ, $\xi_1 \,..\, \xi_n$ diesen $n + 1$ Gleichungen identisch, so erfüllt die infinitesimale Transformation Xf offenbar die Identität (2).

248. Wir betrachten zunächst die Annahme $A \equiv 0$. Die infinitesimale Transformation Xf gehört dann der zu $\varDelta = 0$ adjungirten Schar infinitesimaler Transformationen an (Art. 73), und die Relationen (3) (4) nehmen folgende Form an:

$$(5)\qquad \Sigma \xi_k a_{ik} = \varrho a_i \qquad (i = 1 \,..\, n)$$

$$(6)\qquad \Sigma \xi_k a_k = 0.$$

Machen wir zunächst die Annahme $\varkappa = 2\lambda - 1$, so folgt aus (5) $\varrho = 0$ (Art. 103), und das allgemeinste Lösungensystem der Gleichungen (5) (6) ist eine lineare Kombination der folgenden $n - \varkappa$ linear unabhängigen Lösungensysteme:

$$(7)\qquad \xi_1^{(s)} \xi_2^{(s)} \,..\, \xi_n^{(s)}, 0 \qquad (s = 1, 2, \,..\, n - \varkappa),$$

wenn wir die Bezeichnungen von Art. 131 beibehalten. Damit ist gezeigt:

Ist $\varDelta$ ein Pfaff'scher Ausdruck mit ungeradem $\varkappa$, genügt ferner die infinitesimale Transformation $Xf \equiv \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ einer Identität der Form

$$X\varDelta \equiv \varrho \cdot \varDelta$$

und gehört sie gleichzeitig der zu $\varDelta$ adjungirten Schar infinitesimaler Transformationen an, so ist stets $\varrho \equiv 0$, und Xf hat die Form

$$(8)\qquad \sum_1^{n-\varkappa}{}_s\, \varrho_s X_s f;$$

darin sind $\varrho_1, \varrho_2 \,..\, \varrho_{n-\varkappa}$ arbiträre Funktionen der x, und man hat

$$X_s f \equiv \xi_1^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdot\cdot + \xi_n^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad (s = 1, 2, \,..\, n - \varkappa),$$

wobei die Funktionensysteme

$$\xi_1^{(s)} \,..\, \xi_n^{(s)}$$

$n - \varkappa$ linear unabhängige Lösungen der linearen Gleichungen

$$\Sigma \xi_k a_{ik} = 0, \; \Sigma \xi_k a_k = 0 \qquad (i = 1 \,..\, n)$$

bedeuten.

Die Ausdrücke $X_s f$ sind also nichts anderes als die linken Seiten des zu $\varDelta$ gehörigen vollständigen Systems W (Art. 131), und statt (8) können wir demnach unter Gebrauch der Symbole des Art. 222 auch schreiben

$$\sigma_1 [f]_1 + \cdot\cdot + \sigma_{n-2\lambda+1} [f]_{n-2\lambda+1},$$

wo die σ arbiträre Funktionen bedeuten. Jede infinitesimale Transformation dieser Schar läſst sonach nicht nur die Pfaff'sche Gleichung $\varDelta = 0$, sondern auch den Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ invariant (Art. 78). Im Falle $\varkappa = n$ giebt es überhaupt keine infinitesimale Transformation mit den im Satze geforderten Eigenschaften.

249. Ist zweitens $\varkappa = 2\lambda$, so besitzen die linearen Gleichungen (5) (6) $n - \varkappa$ Lösungensysteme (7), und ein weiteres, das wir unter leichter Modifikation der Bezeichnungsweise der Nr. 128 so schreiben wollen:

$$(9) \qquad \xi_1^{(0)} \xi_2^{(0)} \,..\, \xi_n^{(0)},\ 1$$

und es folgt das Theorem:

Ist $\varDelta$ ein Pfaff'scher Ausdruck mit geradem $\varkappa$, und erfüllt eine infinitesimale Transformation der zu $\varDelta = 0$ adjungirten Schar eine Identität der Form:

$$(2) \qquad X\varDelta \equiv \varrho\varDelta,$$

so hat sie die Gestalt

$$(10) \qquad \varrho X_0 f + \varrho_1 X_1 f + \cdots + \varrho_{n-\varkappa} X_{n-\varkappa} f.$$

Darin sind $\varrho, \varrho_1 \,..\, \varrho_{n-\varkappa}$ willkürliche Funktionen und ϱ ist mit dem in (2) *auftretenden Faktor identisch; ferner ist gesetzt:*

$$X_s f \equiv \xi_1^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

und die $n - \varkappa + 1$ Funktionensysteme

$$(7) \qquad \xi_1^{(s)} \,..\, \xi_n^{(s)},\ 0 \qquad (s = 1, 2 \,..\, n - \varkappa)$$

$$(11) \qquad \xi_1^{(0)} \,..\, \xi_n^{(0)},\ 1$$

bedeuten ebensoviele linear unabhängige Lösungensysteme der Gleichungen

$$(5) \qquad \Sigma \xi_k a_{ik} = \varrho a_i \qquad (i = 1 \,..\, n).$$

Darnach stellen die Gleichungen $X_1 f = 0 \,..\, X_{n-\varkappa} f = 0$ das vollständige System W und mit $X_0 f = 0$ zusammen das System V dar.

Der Ausdruck (10) läſst sich auch in der Form schreiben (vgl. Art. 220):

$$\varrho(f)_0 + \sum_{1}^{n-\varkappa}{}^{s} \varrho_s (f)_s.$$

Im Falle $\varkappa = 2$ ist die Schar (10) mit der zu $\varDelta = 0$ adjungirten Schar identisch, und unser Satz stimmt mit demjenigen des Art. 78 überein, wonach eine Pfaff'sche Gleichung $\varDelta = 0$ dann und nur dann exakt ist, wenn sie alle infinitesimalen Transformationen der adjungirten Schar gestattet.

Wird in (10) $\varrho \equiv 0$ gesetzt, so erhalten wir die allgemeinste infinitesimale Transformation, die den Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ invariant läſst, und der adjungirten Schar angehört.

250. Wir machen nunmehr die Annahme, daſs die simultane Invariante $\varDelta$ der infinitesimalen Transformation Xf und des Ausdrucks $\mathit{\Delta}$ (Art. 73) nicht identisch null sei. Damit dann $n+1$ Funktionen

$$\xi_1 \,..\, \xi_n,\ \varrho \tag{12}$$

existiren, welche die Relationen (3) (4) erfüllen, ist notwendig und hinreichend, daſs die Funktion $\varDelta$ denjenigen Bedingungen genüge, die aus diesen Gleichungen durch Elimination der Gröſsen (12) hervorgehen. Ist dies der Fall, so erhalten wir die Funktionen (12) hinterher durch Auflösung des nicht homogenen linearen Gleichungensystems (3) (4).

Um die genannte Elimination auszuführen, werde zunächst $\varkappa = 2\lambda$ angenommen und unter

$$\eta_1 \,..\, \eta_n,\ \sigma \tag{13}$$

ein beliebiges Lösungensystem der linearen Gleichungen

$$\sum^i a_{ik}\eta_i + \sigma a_k = 0, \quad \sum a_i \eta_i = 0 \quad (k = 1\,..\,n) \tag{14}$$

verstanden. Multipliziren wir dann die $n+1$ Gleichungen (3) (4) bezw. mit den Funktionen (13) und addiren sie, so folgt für $\varDelta$ die Bedingung:

$$\sum \eta_i \frac{\partial \varDelta}{\partial x_i} \equiv \sigma \varDelta, \tag{15}$$

die für jedes beliebige Lösungensystem (13) der linearen Gleichungen (14) erfüllt sein muſs.

Fassen wir zunächst die $n - \varkappa$ Lösungensysteme (7) ins Auge, so erkennen wir, daſs $\varDelta$ dem vollständigen System W genügen muſs; sodann liefert uns das Lösungensystem (11) für $\varDelta$ noch eine nicht homogene lineare partielle Differentialgleichung:

$$\sum \xi_i^{(0)} \frac{\partial \varDelta}{\partial x_i} = \varDelta$$

oder also

$$X_0 \varDelta \equiv \varDelta.$$

Wenn wir dies Resultat mit den Entwickelungen des Art. 142 vergleichen, und uns daran erinnern, daſs der gegenwärtig mit $X_0 f$ bezeichnete Ausdruck damals $-\frac{1}{p} X_0 f$ bezeichnet wurde, so folgt: die Funktion $\varDelta$ ist vollständig charakterisirt durch die Bedingung, daſs der Pfaff'sche Ausdruck

$$\frac{1}{\varDelta} \cdot \mathit{\Delta}$$

die Klasse $\varkappa - 1 = 2\lambda - 1$ besitzen mufs, und es ist in Art. 143 gezeigt worden, wie man die allgemeinste Funktion $\varLambda$ dieser Art durch eine Quadratur ermitteln kann, wenn die Integrale des zu $\varDelta$ gehörigen vollständigen Systems V bekannt sind.

Ist $\varLambda$ solcherweise bestimmt, so haben wir, um das allgemeinste Lösungensystem $\xi_1 \,.\,.\, \xi_n \varrho$ der nicht homogenen linearen Gleichungen (3) (4) zu finden, nach Art. 14 zunächst ein spezielles Lösungensystem dieser Gleichungen aufzusuchen. Da $\varkappa = 2\lambda$ ist, so dürfen wir das Aggregat

$$P \equiv (1, 2, \,.\,.\, 2\lambda)$$

als nicht verschwindend voraussetzen. Dann besitzen die Gleichungen (3) (4) ein Lösungensystem, für welches $\xi_{\varkappa+1} \,.\,.\, \xi_n$, ϱ verschwinden, während $\xi_1 \,.\,.\, \xi_\varkappa$ aus den Relationen:

$$(16) \qquad \sum_1^\varkappa{}^k \xi_k a_{ik} = -\frac{\partial \varLambda}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, \varkappa)$$

zu ermitteln sind.

Haben nun die Ausdrücke P_{ik} die in Art. 219 angegebene Bedeutung, so gelten die Beziehungen

$$\sum_1^\varkappa{}^i a_{il} P_{ik} \equiv 0 \qquad (k \gtrless l)$$

$$\sum_1^\varkappa{}^i a_{ik} P_{ik} \equiv P \qquad (k = 1, 2, \,.\,.\, n).$$

Multiplizirt man daher die Gleichungen (16) mit $P_{1k}, P_{2k}, \,.\,.\, P_{\varkappa k}$, so folgt durch Addition:

$$P\xi_k \equiv -\sum_1^\varkappa{}^i P_{ik} \frac{\partial \varLambda}{\partial x_i}$$

oder also:

$$\sum_1^\varkappa{}^k \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \equiv -\frac{1}{P} \sum_1^\varkappa{}^i \sum_1^\varkappa{}^k P_{ik} \frac{\partial \varLambda}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} \equiv (\varLambda, f),$$

wenn das Symbol (φf) wie in Art. 220 definirt wird.

Indem wir das allgemeinste Lösungensystem von (3) (4) nach Art. 14 bestimmen, und von den Klammersymbolen $(f)_s$ des Art. 220 Gebrauch machen, können wir folgendes Theorem aussprechen:

Ist $\varDelta$ ein Pfaff'scher Ausdruck der Klasse $\varkappa = 2\lambda$, und verschwindet das Pfaff'sche Aggregat P nicht identisch, so hat die allgemeinste infinitesimale Transformation Xf, welche die Pfaff'sche Gleichung $\varDelta = 0$ invariant läfst, d. h. eine Identität

$$(17) \qquad X\Delta \equiv \varrho\Delta$$

befriedigt, folgende Form:

$$(18) \qquad Xf \equiv \sum_1^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv (\Delta f) + \varrho (f)_0 + \sum_1^{n-\varkappa} {}^s \varrho_s (f)_s .$$

Dabei sind ϱ, $\varrho_1 \ldots \varrho_{n-\varkappa}$ arbiträre Funktionen der x_i, und ϱ ist mit der in (17) auftretenden Funktion identisch. Die Klammersymbole haben die in Art. 220 angegebene Bedeutung; Λ ist eine Funktion von $x_1 \ldots x_n$, welche dem folgenden System partieller Differentialgleichungen genügt:

$$(\Lambda)_1 = 0, \quad (\Lambda)_2 = 0, \quad \ldots \quad (\Lambda)_{n-\varkappa} = 0,$$
$$(\Lambda)_0 \equiv \Lambda$$

und man hat identisch

$$\Lambda \equiv a_1 \xi_1 + \cdots + a_n \xi_n .$$

Setzt man in (18) $\varrho \equiv 0$, so erhält man die allgemeinste infinitesimale Transformation, die den *Ausdruck* Δ invariant läſst.

Aus diesem Satz erhält man als Spezialfall das Theorem 249, wenn man $\Lambda \equiv 0$ annimmt.

251. Im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ seien die Pfaff'schen Aggregate P', Q nicht null. Die Funktion Λ muſs jetzt allen Relationen (15) genügen, wo $\eta_1 \ldots \eta_n \sigma$ ein beliebiges Lösungensystem der linearen Gleichungen (14) bedeutet. Da aber $\sigma = 0$ eine Folge dieser Gleichungen ist, so kann für Λ eine beliebige Lösung des zu Δ gehörigen vollständigen Systems W genommen werden.

Ist Λ so gewählt, so besitzen die linearen Gleichungen (3) und (4) ein und nur ein Lösungensystem ξ_i, ϱ, für welches die Funktionen $\xi_{\varkappa+1} \ldots \xi_n$ identisch verschwinden, während die übrigen Unbekannten aus den $\varkappa + 1$ Relationen

$$(19) \qquad \begin{aligned} &\sum_1^{\varkappa} {}^k \xi_k a_{ik} - \varrho\, a_i = -\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} \qquad (i = 1 \ldots \varkappa) \\ &\sum_1^{\varkappa} {}^k \xi_k a_k \qquad\quad = \Lambda \end{aligned}$$

ermittelt werden. Haben jetzt die Symbole Q_{ik} die in Art. 222 erklärte Bedeutung, beachten wir ferner die Identitäten:

$$\sum_1^{\varkappa} {}^i a_{il} Q_{ik} + a_l Q_{0k} \equiv 0 \qquad (l \gtrless k)$$

$$\sum_1^{\varkappa} {}^i a_{ik} Q_{ik} + a_k Q_{0k} \equiv Q \qquad (k = 1 \ldots \varkappa)$$

und multipliziren wir die Gleichungen (19) mit $Q_{1k}, Q_{2k} \ldots Q_{\varkappa k}, Q_{0k}$ respektive, so folgt durch Addition:

$$Q\xi_k = -\sum_1^{\varkappa}{}^i Q_{ik}\frac{\partial \Delta}{\partial x_k} + \Delta Q_{0k}$$

und hieraus;

$$(20)\quad \sum_1^{\varkappa}{}^k \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = -\frac{1}{Q}\sum_1^{\varkappa}{}^i\sum_1^{\varkappa}{}^k Q_{ik}\frac{\partial \Delta}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_k} + \Delta\sum_1^{\varkappa}{}^k \frac{Q_{0k}}{Q}\frac{\partial f}{\partial x_k}$$
$$= -[\Delta, f] + \Delta\{f\}_0,$$

wenn man die in Art. 222 und 223 eingeführten Symbole anwendet, und die Beziehungen

$$Q_{0k} \equiv -\Pi'_{k,2\lambda-1};\quad Q_{0,2\lambda-1} \equiv P'$$

berücksichtigt.

Für die Funktion ϱ erhält man aus (19) durch Multiplikation mit $Q_{01}Q_{02}\ldots Q_{0\varkappa}$, 0 und Addition:

$$\varrho \equiv \{\Delta\}_0.$$

Nach einer leicht zu verifizirenden Änderung der Vorzeichen ergiebt sich jetzt Folgendes:

Ist Δ ein Pfaff'scher Ausdruck der Klasse $\varkappa = 2\lambda - 1$, und sind die Pfaff'schen Aggregate

$$P' \equiv (1, 2, \ldots 2\lambda - 2);\quad Q \equiv (0, 1 \ldots 2\lambda - 1)$$

nicht identisch null, so hat die allgemeinste infinitesimale Transformation

$$Xf \equiv \xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

die einer Identität der Form

$$(21)\qquad X\Delta \equiv \varrho\Delta$$

genügt, folgende Gestalt:

$$(22)\qquad Xf \equiv [\Delta f] - \Delta\{f\}_0 + \sum_1^{n-\varkappa}{}^s \varrho_s[f]_s.$$

Dabei sind die ϱ_i willkürliche Funktionen; die Klammersymbole haben dieselbe Bedeutung wie in Art. 222 und 223; die Funktion Δ, die mit $\Sigma a_i\xi_i$ identisch ist, genügt den Bedingungen

$$[\Delta]_s \equiv 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots n - \varkappa),$$

ist also eine beliebige Lösung des zu Δ gehörigen vollständigen Systems

W, im Falle $\varkappa = n$ eine arbiträre Funktion der x, und die auf der rechten Seite von (21) *auftretende Funktion ϱ ist durch die Gleichung*

$$\varrho \equiv -\{\varDelta\}_0 \tag{23}$$

definirt.

Die allgemeinste infinitesimale Transformation Xf, die den Pfaff'schen *Ausdruck* $\varDelta$ invariant läfst, hat die Form (22), worin jetzt $\varDelta$ den Bedingungen

$$\{\varDelta\}_0 = 0,\ [\varDelta]_s = 0 \qquad (s = 1\,..\,n - \varkappa),$$

d. h., also dem vollständigen System V genügen mufs.

Der Satz des Art. 248 ergiebt sich aus dem obigen als Spezialfall ($\varDelta \equiv 0$).

252. Wir wenden uns nun zu einem Problem, das zu dem soeben behandelten in gewissem Sinne dualistisch ist, nämlich zu der Frage nach der allgemeinsten infinitesimalen Transformation $Xf \equiv \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, welche eine Identität der Form:

$$X\varDelta \equiv d\,U(x_1 x_2\,..\,x_n) \tag{24}$$

befriedigt, die also, wie wir auch sagen können, den Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ bis auf ein exaktes Differential dU ungeändert läfst.

Die Identität (24) kann so geschrieben werden (vgl. Art. 78):

$$\sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^k \xi_k a_{ik} dx_i + d(\varDelta - U) \equiv 0 \qquad (\varDelta \equiv \Sigma a_i \xi_i).$$

Schreiben wir zur Abkürzung H statt $U - \varDelta$, so folgt:

$$\sum_1^n{}^k \xi_k a_{ik} \equiv \frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1\,..\,n). \tag{25}$$

Darnach mufs H allen partiellen Differentialgleichungen

$$\sum \eta_i \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0$$

genügen, worin $\eta_1\,..\,\eta_n$ ein beliebiges Lösungensystem der linearen Gleichungen

$$\Sigma \eta_i a_{ik} = 0 \qquad (k = 1\,..\,n) \tag{26}$$

bedeutet, also kann für H bei geradem $\varkappa$ ein beliebiges Integral des Systems W, bei ungeradem $\varkappa$ eine beliebige Lösung von V genommen werden.

Ist in dem zuerst genannten Fall das Pfaff'sche Aggregat P von

Null verschieden, so besitzen die Gleichungen (25) ein Lösungensystem $\bar{\xi}_1 \ldots \bar{\xi}_k\, 0 \ldots 0$ wobei die $\bar{\xi}_i$ durch die Relationen

$$\sum_1^{2\lambda} {}^k \bar{\xi}_k a_{ik} = \frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots 2\lambda)$$

definirt sind; daraus folgt ähnlich wie früher:

$$\sum_1^{2\lambda} \bar{\xi}_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \equiv - \sum_1^{2\lambda} {}^i \sum_1^{2\lambda} {}^k \frac{P_{ik}}{P} \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv -(Hf),$$

und die allgemeinste infinitesimale Transformation Xf mit der verlangten Eigenschaft hat sonach die Form:

$$Xf \equiv \sum_1^{n} {}^i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv -(Hf) + \sum_1^{n-2\lambda} {}^s \varrho_s (f)_s.$$

Da ferner die Koeffizienten der Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in den Ausdrücken $(f)_s$ Lösungensysteme der linearen Gleichungen (26) sind, so folgt leicht:

$$A \equiv \sum_1^{2\lambda} {}^i a_i \bar{\xi}_i \equiv - \sum_1^{2\lambda} {}^i \sum_1^{2\lambda} {}^k \frac{a_i P_{ik}}{P} \frac{\partial H}{\partial x_k}.$$

Es ist aber nach der Bezeichnungsweise des Art. 219:

$$\sum_1^{2\lambda} {}^i a_i P_{ik} \equiv - \Pi_{k,0},$$

und andrerseits:

$$- \sum_1^{2\lambda} {}^k \frac{\Pi_{k0}}{P} \frac{\partial H}{\partial x_k} \equiv (H)_0.$$

Darnach findet man

(27) $$A \equiv -(H)_0$$

(28) $$U \equiv H - (H)_0.$$

Im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ bedeute H ein Integral des vollständigen Systems V und das Pfaff'sche Aggregat P' verschwinde nicht identisch. Wir ermitteln dann ein spezielles Lösungensystem $\bar{\xi}_1 \ldots \bar{\xi}_{2\lambda-2},\ 0 \ldots 0$ der Gleichungen (25) mittels der Relationen

$$\sum_1^{2\lambda-2} {}^k \bar{\xi}_k a_{ik} = \frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots 2\lambda - 2),$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$\sum_1^{2\lambda-2}{}^k \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \equiv - \sum_1^{2\lambda-2}{}^i \sum_1^{2\lambda-2}{}^k \frac{P'_{ik}}{P'} \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \{Hf\}.$$

Darnach hat die allgemeinste infinitesimale Transformation, die einer Identität der Form (24) genügt, die Form

$$Xf \equiv \sum{}^i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \{Hf\} + \varrho_0 \{f\}_0 + \sum_1^{n-\varkappa}{}^s \varrho_s [f]_s, \tag{29}$$

worin die ϱ willkürliche Funktionen bedeuten.

Da ferner die Koeffizienten $\eta_1 \ldots \eta_n$ eines Ausdrucks der Form $[f]_s$ der Gleichung $\Sigma a_\iota \eta_i = 0$ genügen, so folgt:

$$\varDelta \equiv \sum_1^n{}^i a_i \xi_i \equiv - \sum_1^{2\lambda-2}{}^i \sum_1^{2\lambda-2}{}^k \frac{a_i P'_{ik}}{P'} \frac{\partial H}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{\varrho_0}{Q} \left(a_{2\lambda-1} P' - \sum_1^{2\lambda-2}{}^i a_\iota \Pi'_{i,\, 2\lambda-1} \right) \equiv \sum_1^{2\lambda-2}{}^k \frac{\Pi'_{k0}}{P'} \frac{\partial H}{\partial x_k} + \varrho_0,$$

und man findet sonach:

$$U \equiv \varrho_0 + H + \sum_1^{2\lambda-2}{}^k \frac{\Pi'_{k0}}{P'} \frac{\partial H}{\partial x_k}.$$

Indem wir im Falle $\varkappa = 2\lambda$ die Vorzeichen noch etwas modifiziren, können wir unsere Ergebnisse so aussprechen:

Die allgemeinste infinitesimale Transformation

$$Xf \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

welche einer Identität der Form

$$X\varDelta \equiv d\,U$$

genügt, hat im Falle $\varkappa = 2\lambda$ folgende Gestalt:

$$Xf \equiv (Hf) + \sum_1^{n-\varkappa}{}^s \varrho_s (f)_s, \tag{30}$$

worin $\varrho_1 \ldots \varrho_{n-\varkappa}$ arbiträre Funktionen bedeuten. Dabei ist H ein beliebiges Integral des zu $\varDelta$ gehörigen vollständigen Systems W, im Falle $\varkappa = n$ eine willkürliche Funktion von $x_1 \ldots x_n$, und U hat den Wert $(H)_0 - H$.

Im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ hat die allgemeinste infinitesimale Transformation der genannten Beschaffenheit die Form

$$(29)\qquad Xf \equiv \{Hf\} + \varrho_0 \{f\}_0 + \sum_1^{n-\varkappa} \varrho_s [f]_s$$

worin ϱ_0, ϱ_s arbiträre Funktionen, und H ein beliebiges Integral des vollständigen Systems V bedeutet; U ist jetzt durch die Gleichung

$$(31)\qquad U \equiv \varrho_0 + H + \sum_1^{2\lambda-2} {}_k \frac{\Pi'_{k0}}{P'} \frac{\partial H}{\partial x_k}$$

definirt.

Diese Resultate stimmen mit denjenigen der Art. 249 und 250 überein. Macht man nämlich in den vorstehenden Entwickelungen die Annahme $U = c$, also $H \equiv c - \varDelta$, wo c eine Konstante bedeutet, so muſs $\varDelta$ bei geradem $\varkappa$ den Bedingungen des Art. 250 genügen, und der Ausdruck (30) verwandelt sich in die allgemeinste infinitesimale Transformation, die $\varDelta$ invariant läſst. Ebenso liefert im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ die Gleichung (31) unter der Annahme $U = c$ für ϱ_0 einen Wert, der in (29) substituirt, die negativ genommene rechte Seite dieser Gleichung direkt in den Ausdruck (22) überführt, wenn man Art. 224 und die Beziehung $\{\varDelta\}_0 \equiv 0$ berücksichtigt.

253. Aus dem vorstehenden Satze folgt noch das Korollar:

Die allgemeinste infinitesimale Transformation, die einer Identität der Form

$$X\varDelta \equiv dH$$

und auſserdem der Bedingung

$$\varDelta \equiv \Sigma a_i \xi_i \equiv 0$$

genügt, also der zu $\varDelta$ adjungirten Schar angehört, hat im Falle $\varkappa = 2\lambda$ die Form:

$$(Hf) + \sum_1^{n-\varkappa} {}_s \varrho_s (f)_s,$$

und im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ die Gestalt:

$$\{Hf\} - \left(\sum_1^{2\lambda-2} {}_k \frac{\Pi'_{k0}}{P'} \frac{\partial H}{\partial x_k}\right) \{f\}_0 + \sum_1^{n-\varkappa} {}_s \varrho_s [f]_s,$$

und es bedeutet H beidemale ein beliebiges Integral des zu $\varDelta$ gehörigen vollständigen Systems V.

Ferner folgt leicht:

Die allgemeinste infinitesimale Transformation $Xf \equiv \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, die einer Identität der Form

$$X\Delta \equiv d\left(\sum_1^n a_i\xi_i\right)$$

genügt, hat im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ *die Gestalt:*

$$\varrho_0\{f\}_0 + \sum_1^{n-\varkappa}\varrho_s[f]_s$$

und man hat identisch:

$$\Delta \equiv \Sigma a_i\xi_i \equiv \varrho_0.$$

Bei geradem $\varkappa$ *giebt es nur solche infinitesimale Transformationen der genannten Art, für die* $\Delta \equiv 0$ *ist.*

§ 2. Invariantentheoretische Begründung der Theorie des Pfaff'schen Problems.

254. Verwandelt sich vermöge der Variabelntransformation

(1) $\quad x_i' = \varphi_i(x_1x_2\,..\,x_n);\; x_i = \psi_i(x_1'x_2'\,..\,x_n') \qquad (i = 1, 2, .. n)$

der Pfaff'sche Ausdruck

$$\Delta \equiv \sum_1^n a_i(x_1x_2\,..\,x_n)dx_i$$

in den Ausdruck

$$\Delta' \equiv \sum_1^n a_i'(x_1'x_2'\,..\,x_n')dx_i',$$

ferner die infinitesimale Transformation

$$Xf \equiv \sum_1^n \xi_i(x_1x_2\,..\,x_n)dx_i$$

in die infinitesimale Transformation

$$X'f \equiv \sum_1^n \xi_i'(x_1'x_2'\,..\,x_n')\frac{\partial f}{\partial x_i'},$$

dann geht offenbar der Ausdruck $X\Delta$ in den Ausdruck $X'\Delta'$ über. Infolgedessen wird sich jede infinitesimale Transformation, die einer der Identitäten

$$X\Delta \equiv \varrho\Delta;\; X\Delta \equiv \Delta;\; X\Delta \equiv dU$$

genügt, vermöge unserer Variabelntransformation in eine infinitesimale Transformation $X'f$ verwandeln, die bezw. der analogen Identität

$$X'\Delta' \equiv \varrho'\Delta';\; X'\Delta' \equiv \Delta';\; X'\Delta' \equiv dU'$$

genügt, m. a. W.: die verschiedenen Kategorien infinitesimaler Transformationen, die im vorigen § studirt wurden, stehen alle zu dem Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ in invarianter Beziehung.

Wir erinnern noch daran, daſs vermöge (1)

$$A \equiv \sum_1^n {}^i a_i \xi_i \equiv \sum a_i' \xi_i' \equiv A',$$

daſs also A eine simultane Invariante des Ausdruckes $\varDelta$ und der infinitesimalen Transformation Xf darstellt (Art. 73).

255. Nach diesen Vorbemerkungen betrachten wir bei geradem $\varkappa$ die beiden Scharen infinitesimaler Transformationen:

$$\varrho_0(f)_0 + \varrho_1(f)_1 + \cdots + \varrho_{n-\varkappa}(f)_{n-\varkappa}, \tag{2}$$

$$\varrho_1(f)_1 + \cdots + \varrho_{n-\varkappa}(f)_{n-\varkappa}, \tag{3}$$

und bei ungeradem $\varkappa$ die folgenden beiden Scharen:

$$\varrho_0\{f\}_0 + \varrho_1[f]_1 + \cdots + \varrho_{n-\varkappa}[f]_{n-\varkappa}, \tag{4}$$

$$\varrho_1[f]_1 + \cdots + \varrho_{n-\varkappa}[f]_{n-\varkappa}, \tag{5}$$

worin die ϱ_i arbiträre Funktionen bedeuten.

Nach Art. 249 ist der Ausdruck (2) die allgemeinste infinitesimale Transformation, die der zu $\varDelta$ adjungirten Schar angehört und die Pfaff'sche Gleichung $\varDelta = 0$ nicht ändert; da aber diese beiden Eigenschaften invariant sind, so ist die Schar (2) infinitesimaler Transformationen mit $\varDelta$ invariant verknüpft, d. h. vermöge der Variabelntransformation (1) verwandelt sich jede infinitesimale Transformation der Form (2) in eine infinitesimale Transformation $X'f$ derjenigen Schar, die zu $\varDelta'$ in derselben Beziehung steht, wie (2) zu $\varDelta$.

Ebenso ist die Schar (3) bei geradem $\varkappa$ (und die Schar (5) bei ungeradem $\varkappa$) mit $\varDelta$ invariant verknüpft; denn der Ausdruck (3) (bezw. (5)) ist die allgemeinste infinitesimale Transformation der adjungirten Schar, die den Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ invariant läſst.

Ist ferner bei ungeradem $\varkappa$ die infinitesimale Transformation Xf in der Schar (4) enthalten, so genügt sie der Identität

$$X\varDelta \equiv dA \tag{6}$$

und umgekehrt; da aber die durch (6) ausgedrückte Eigenschaft invariant ist, so ist auch die Schar (4) mit $\varDelta$ invariant verknüpft.

Damit ist aufs neue gezeigt, daſs die beiden Gleichungensysteme V und W mit dem Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ invariant verknüpft sind.

256. Auch die Vollständigkeit der beiden Systeme V und W folgt jetzt aufs Leichteste. Wir bemerken vorab, daſs das Symbol $X\varDelta$

einen gewissen Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta_1$ bedeutet; ist dann Yf irgend eine andere infinitesimale Transformation, so haben wir unter dem Symbol $YX\varDelta$ einfach den Pfaff'schen Ausdruck $Y\varDelta_1$ zu verstehen.

Es mögen nun die Symbole Xf, Yf irgend zwei infinitesimale Transformationen der Schar (3) oder (5) bedeuten, je nachdem $\varkappa$ gerade oder ungerade ist. Dann hat man

$$X\varDelta \equiv 0, \quad Y\varDelta \equiv 0$$

und infolge dessen

$$XY\varDelta \equiv 0, \quad YX\varDelta \equiv 0.$$

Setzen wir daher

$$Zf \equiv X(Yf) - Y(Xf) \equiv \sum_i \zeta_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

so folgt auch $Z\varDelta \equiv 0$. Um also zu zeigen, daſs die infinitesimale Transformation Zf wiederum der Schar (3) (resp. (5)) angehört, haben wir nur nachzuweisen, daſs sie in der zu $\varDelta$ adjungirten Schar enthalten ist, d. h. also der Identität $\zeta_1 a_1 + \cdots + \zeta_n a_n \equiv 0$ genügt.

Wir schreiben zu diesem Zwecke

$$Xf \equiv \sum_1^n{}_h \xi_h \frac{\partial f}{\partial x_h}; \quad Yf \equiv \sum_1^n{}_h \eta_h \frac{\partial f}{\partial x_h},$$

und mithin:

$$Zf \equiv \sum_1^n{}_h (X\eta_h - Y\xi_h) \frac{\partial f}{\partial x_h},$$

also

(7) $$\zeta_h \equiv X\eta_h - Y\xi_h.$$

Nun hat man nach Voraussetzung:

(8) $$\Sigma a_h \xi_h \equiv 0, \quad \Sigma a_k \eta_k \equiv 0,$$

oder, indem man auf diese Identitäten die Operationen Yf bezw. Xf ausübt:

(9) $$\begin{aligned} \Sigma a_h Y\xi_h + \Sigma \xi_h Y a_h &\equiv 0 \\ \Sigma a_k X\eta_k + \Sigma \eta_k X a_k &\equiv 0, \end{aligned}$$

also durch Subtraktion:

(10) $$0 \equiv \sum_i a_h (Y\xi_h - X\eta_h) + \sum_1^n{}_h \sum_1^n{}_k a_{hk} \xi_h \eta_k,$$

und unsere Behauptung folgt jetzt unmittelbar aus der Thatsache, daſs die rechts stehende Doppelsumme null ist, da ja die ξ_h und η_k nach Voraussetzung die Relationen:

$$(11) \qquad \sum_1^n a_{hk}\xi_k \equiv 0, \quad \sum_1^n a_{hk}\eta_k \equiv 0$$

erfüllen. Die Vollständigkeit des Gleichungensystems W ist damit sowohl für gerades als auch für ungerades $\varkappa$ nachgewiesen.

257. Um dasselbe für das System V zu zeigen, nehmen wir zunächst $\varkappa = 2\lambda$ an und verstehen unter Xf wiederum eine beliebige infinitesimale Transformation der Schar (3).

Schreiben wir jetzt $X_0 f$ für $(f)_0$, so hat man nach Art. 249:

$$X_0 \varDelta \equiv \varDelta; \ X\varDelta \equiv 0,$$

mithin

$$XX_0\varDelta \equiv 0, \ X_0 X\varDelta \equiv 0,$$

also, wenn

$$Zf \equiv X(X_0 f) - X_0(Xf)$$

gesetzt wird:

$$Z\varDelta \equiv 0.$$

Darnach läſst die infinitesimale Transformation Zf den Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ invariant; sie gehört aber überdies der zu $\varDelta$ adjungirten Schar infinitesimaler Transformationen an. Letzteres folgt genau wie in der vor. Nr., wenn man darin Yf durch $X_0 f$ ersetzt. Darnach läſst sich Zf in der Form (3) darstellen, mithin bilden die partiellen Differentialgleichungen

$$(f)_0 = 0, \ (f)_1 = 0, \ldots (f)_{n-\varkappa} = 0$$

ein vollständiges System, was zu zeigen war.

Auch im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ gelten die Identitäten (9), wenn Yf durch $\{f\}_0 \equiv X_0 f$ ersetzt wird; dies folgt unmittelbar daraus, daſs die Koeffizienten $\eta_1 \ldots \eta_n$ der infinitesimalen Transformation $\{f\}_0$ der Identität

$$a_1\eta_1 + \cdots + a_n\eta_n \equiv 1$$

Genüge leisten. Ist ferner $Xf \equiv \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ eine infinitesimale Transformation der Schar (5), so ist die erste Gruppe der Identitäten (11) erfüllt, und aus (10) folgt jetzt sofort, daſs die infinitesimale Transformation

$$Zf \equiv X(X_0 f) - X_0(Xf)$$

der zu $\varDelta$ adjungirten Schar angehört. Ferner hat man nach dem Schluſssatz des Art. 253:

$$X_0\varDelta \equiv 0, \ X\varDelta \equiv 0,$$

also auch

$$Z\Delta \equiv 0,$$

und mithin ist Zf eine infinitesimale Transformation der Schar (5), womit auch bei ungeradem $\varkappa$ die Vollständigkeit des Systems V nachgewiesen ist.

258. *Wir fragen nun wie in Art. 106 nach der allgemeinsten Variabelntransformation*

$$(12)\quad y_1 = \omega_1(x_1 \,.\,.\, x_n);\ y_2 = \omega_2 \,.\,.\, y_{n-1} = \omega_{n-1};\ t = \varphi(x_1 \,.\,.\, x_n),$$

vermöge deren eine Identität folgender Form besteht:

$$(13)\qquad \Delta \equiv \varrho(t, y_1 \cdots y_{n-1}) \cdot \sum_1^{n-1} b_i(y_1 y_2 \cdots y_{n-1}) dy_i \equiv \Delta'.$$

Die Pfaff'sche Gleichung $\Delta' = 0$ gestattet offenbar alle infinitesimalen Transformationen der Form

$$(14)\qquad X'f \equiv \sigma(t, y_1 \,.\,.\, y_{n-1}) \frac{\partial f}{\partial t},$$

denn man hat identisch:

$$X'\Delta' \equiv \frac{\sigma}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial t} \cdot \Delta',$$

überdies gehört $X'f$, wie man sofort sieht, der zu Δ' adjungirten Schar an. Hat also $X'f$, in den ursprünglichen Variabeln $x_1 \,.\,.\, x_n$ geschrieben, die Form:

$$(15)\qquad Xf \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

so folgt aus den Sätzen der Art. 248 und 249 sofort, dafs Xf bei geradem $\varkappa$ der Schar (2), bei ungeradem $\varkappa$ der Schar (5) angehören mufs.

Umgekehrt, erfüllt Xf diese Bedingung, und sind $\omega_1 \,.\,.\, \omega_{n-1}$ die $n-1$ unabhängige Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung $Xf = 0$, so wird Xf vermöge der Variabelntransformation (12) (worin φ beliebig), die Form (14) erhalten. Es sei

$$(16)\qquad \Delta' \equiv \Sigma a_i'(t, y_1 \,.\,.\, y_{n-1}) dy_i + a_n'(t, y_1 \,.\,.\, y_{n-1}) dt$$

die transformirte Gestalt von Δ. Da die infinitesimale Transformation (14) der zu Δ' adjungirten Schar angehört, so hat man vermöge (12) die identische Beziehung

$$\Sigma a_i \xi_i \equiv \sigma \,.\, a_n' \equiv 0,$$

also $a_n' \equiv 0$. Da ferner Δ' die infinitesimale Transformation (14) gestatten mufs, so folgt:

$$X'\Delta' \equiv \sigma \sum_1^{n-1} \frac{\partial a_i'}{\partial t} dy_i \equiv \tau \sum_1^{n-1} a_i' dy_i,$$

also

$$\sigma(t, y_1 \, . \, . \, y_{n-1}) \frac{\partial a_i'}{\partial t} \equiv \tau(t, y_1 \, . \, . \, y_{n-1}) \cdot a_i',$$

und daraus folgt unmittelbar, dafs die Verhältnisse der Koeffizienten $a_1' \, . \, . \, a_{n-1}'$ von t nicht abhängen, dafs also $\varDelta$, in den neuen Variabeln $t, y_1 \, . \, . \, y_{n-1}$ geschrieben, wirklich die Form (13) erhält.

Zugleich erkennt man, dafs der in (13) auftretende Faktor ϱ dann und nur dann von t unabhängig ist, wenn entweder $\varkappa = 2\lambda - 1$, oder wenn $\varkappa = 2\lambda$ und Xf der Schar (3) angehört. Auch ersieht man sofort, dafs die Reduktion (13) dann und nur dann unmöglich ist, wenn $\varkappa = 2\lambda - 1 = n$.

Damit haben wir die Pfaff-Grassmann'sche Theorie mit allen daran sich anschliefsenden Sätzen wiedergewonnen.

259. Wir stellen uns ferner die Aufgabe, die allgemeinste Variabelntransformation (12) anzugeben, vermöge deren eine Identität:

$$\varDelta \equiv d\Psi(t, y_1 \, . \, . \, y_{n-1}) + \sum_1^{n-1} {}^i \, b_i(y_1 \, y_2 \, . \, . \, y_{n-1}) dy_i \equiv \varDelta' \tag{17}$$

stattfindet. Hat $X'f$ die Bedeutung (14), so findet man:

$$X'\varDelta' \equiv d\left(\sigma \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right); \tag{18}$$

hat $X'f$, in den x geschrieben, die Form (15), so gelten vermöge (12) die Beziehungen:

$$A \equiv \sum a_i \xi_i \equiv \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial t} \equiv A',$$

wenn mit A' der Ausdruck bezeichnet wird, der aus A durch die Transformation (12) hervorgeht. Die Identität (18) kann also geschrieben werden:

$$X'\varDelta' \equiv dA', \tag{19}$$

mithin genügt Xf der identischen Beziehung

$$X\varDelta \equiv dA,$$

nach Art. 253 gehört also Xf bei geradem $\varkappa$ der Schar (3), bei ungeradem $\varkappa$ der Schar (4) an.

Umgekehrt, ist dies der Fall, und sind $\omega_1 \, . \, . \, \omega_{n-1}$ die Lösungen von $Xf = 0$, so erhält Xf vermöge der Variabelntransformation (12) die Gestalt (14). Ist $\varkappa = 2\lambda - 1$, so gilt die Identität (19), wenn der durch (16) dargestellte Pfaff'sche Ausdruck $\varDelta'$ die transformirte Gestalt von $\varDelta$ bedeutet. Man hat daher:

$$\sigma\left(\sum_1^{n-1} {}^i\frac{\partial a_i'}{\partial t}dy_i + \frac{\partial a_n'}{\partial t}dt\right) + a_n' d\sigma \equiv d(a_n'\sigma),$$

und hieraus

$$\sum_1^{n-1} {}^i\frac{\partial a_i'}{\partial t}dy_\iota + \frac{\partial a_n'}{\partial t}dt \equiv da_n',$$

oder also:

$$\frac{\partial a_i'}{\partial t} \equiv \frac{\partial a_n}{\partial y_i} \qquad (i = 1\,..\,n-1).$$

Wie in Art. 120 folgt hieraus sofort, daſs $\varDelta'$ die Form (17) besitzt.

Der Fall $\varkappa = 2\lambda$ kommt auf einen Spezialfall des Satzes der vor. Nr. heraus. Damit haben wir dasjenige Verfahren, das in Kap. IV als „Jacobi'sche Reduktion" bezeichnet wurde, aufs neue abgeleitet.

260. Wir verstehen unter $\omega_1\,..\,\omega_\varkappa$ irgend $\varkappa$ unabhängige Integrale des zu $\varDelta$ gehörigen vollständigen Systems W, und unter $\omega_{\varkappa+1}\,..\,\omega_n$ beliebige Funktionen, die mit den vorigen zusammen ein System von n unabhängigen Funktionen der Variabeln $x_1\,..\,x_n$ bilden. Führen wir dann mittels der Formeln

$$y_i = \omega_i(x_1\,..\,x_n) \qquad (i = 1\,..\,n) \tag{20}$$

statt der x die neuen Variabeln y ein, so erhalte $\varDelta$ die Form

$$\varDelta' \equiv \sum_1^n {}^i b_i(y_1 y_2\,..\,y_n)dy_\iota. \tag{21}$$

Das Gleichungensystem W nimmt jetzt folgende Gestalt an:

$$\frac{\partial f}{\partial y_{\varkappa+1}} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y_{\varkappa+2}} = 0\ \cdot\cdot\ \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0, \tag{22}$$

und infolge dessen gehört jede infinitesimale Transformation:

$$\sigma_{\varkappa+1}(y_1\cdot\cdot y_n)\frac{\partial f}{\partial y_{\varkappa+1}} + \cdot\cdot + \sigma_n(y_1\cdot\cdot y_n)\frac{\partial f}{\partial y_n} \tag{23}$$

der zu $\varDelta'$ adjungirten Schar an, und läſst überdies $\varDelta'$ invariant. Aus der ersteren Eigenschaft folgt, daſs die Identität

$$\sum_{\varkappa+1}^n {}^s \sigma_s b_s \equiv 0$$

für beliebige σ erfüllt ist, daſs also alle Koeffizienten $b_{\varkappa+1}\,..\,b_n$ identisch verschwinden. Da ferner $\varDelta'$ alle infinitesimalen Transformationen (23) mithin auch $\frac{\partial f}{\partial y_{\varkappa+1}}\cdot\cdot\frac{\partial f}{\partial y_n}$ gestatten muſs, so folgt:

$$\sum_1^{\varkappa} {}^i \frac{\partial b_\iota}{\partial y_s} dy_i \equiv 0; \text{ d. h. } \frac{\partial b_i}{\partial y_s} \equiv 0 \quad (i = 1 \,.\,.\, \varkappa;\ s = \varkappa + 1 \,.\,.\, n),$$

also hat $\varDelta'$ die Form:

$$\varDelta' \equiv \sum_1^{\varkappa} {}^i b_i(y_1 \,.\,.\, y_\varkappa) dy_\iota, \tag{24}$$

und es ist $\varDelta'$ ein bedingungsloser Ausdruck in den $\varkappa$ Variabeln $y_1 \,.\,.\, y_\varkappa$.

Umgekehrt, soll $\varDelta$ vermöge (20) auf die Form eines bedingungslosen Ausdrucks (24) mit $\varkappa$ Variabeln gebracht werden, so müssen $\omega_1 \,.\,.\, \omega_\varkappa$ die Integrale des vollständigen Systems W sein, da die Gleichungen (22) offenbar das zu dem Pfaff'schen Ausdruck (24) gehörige vollständige System W bilden.

261. Es seien jetzt $\omega_1 \,.\,.\, \omega_{\varkappa-1}$ die unabhängigen Integrale des vollständigen Systems V, und die Funktionen $\omega_\varkappa \,.\,.\, \omega_n$ so gewählt, daſs die Formeln (20) eine Variabelntransformation darstellen. Vermöge (20) verwandle sich der Ausdruck $\varDelta$ in (21); das System V nimmt die Form

$$\frac{\partial f}{\partial y_\varkappa} = 0 \cdot\cdot \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0 \tag{25}$$

an, und die mit $\varDelta$ invariant verknüpfte Schar (2) (bezw. (4)) erhält demnach in den neuen Variabeln die Gestalt:

$$\sum_\varkappa^n {}^s \sigma_s \frac{\partial f}{\partial y_s}, \tag{26}$$

worin die σ_s arbiträre Funktionen von $y_1 \,.\,.\, y_n$ bedeuten.

Ist nun zunächst $\varkappa = 2\lambda$, so erschlieſsen wir aus dem Umstande, daſs jede infinitesimale Transformation (26) der zu dem Ausdruck (21) adjungirten Schar infinitesimaler Transformationen angehören muſs, das identische Verschwinden der Koeffizienten $b_\varkappa, b_{\varkappa+1} \,.\,.\, b_n$. Da ferner die Gleichung $\varDelta' = 0$ die infinitesimale Transformation (26) gestattet, so folgt:

$$\sum_1^{\varkappa-1} {}^i \sum_\varkappa^n {}^s \sigma_s \frac{\partial b_i}{\partial y_s} dy_i \equiv \varrho \sum_1^{\varkappa-1} {}^i b_i dy_i,$$

und hieraus für $i = 1, 2, \,.\,.\, \varkappa - 1$:

$$\sum_\varkappa^n {}^s \sigma_s \frac{\partial b_\iota}{\partial y_s} \equiv \varrho b_\iota.$$

Wenn wir hierin i durch k ersetzen, und aus den so entstehenden zwei Gleichungen ϱ eliminiren, so folgt für beliebige σ_s die Identität

$$\sum_{\varkappa}^{n} {}^{s}\, \sigma_s \frac{\partial}{\partial y_s}\left(\frac{b_i}{b_k}\right) \equiv 0; \text{ d. h. } \frac{\partial}{\partial y_s}\left(\frac{b_i}{b_\lambda}\right) \equiv 0 \quad (s = \varkappa, \ldots n),$$

also hat $\varDelta'$ die Form:

$$\varDelta' \equiv \tau(y_1 \ldots y_n) \cdot \sum_{1}^{\varkappa-1} {}^{i}\, c_\iota(y_1 y_2 \ldots y_{\varkappa-1}) dy_i. \tag{27}$$

Umgekehrt, soll $\varDelta$ durch die Transformation (20) diese Form erhalten, so müssen $\omega_1 \ldots \omega_{\varkappa-1}$ die Lösungen des zu $\varDelta$ gehörigen Systems V sein, da die Gleichungen (25) offenbar das zu dem Pfaff'schen Ausdruck (27) gehörige System V darstellen. Man erkennt auch sofort, daſs die Funktion τ von den Variabeln $y_{\varkappa+1} \ldots y_n$ nicht unabhängig sein kann, da andernfalls der Ausdruck (27) eine Klasse $\leqq \varkappa - 1$ besäſse.

Ist andererseits $\varkappa = 2\lambda - 1$, so befriedigt die infinitesimale Transformation (26) für beliebige σ_s eine Identität der Form:

$$\sum_{1}^{n} {}^{i} \sum_{\varkappa}^{n} {}^{s}\, \sigma_s \frac{\partial b_i}{\partial y_s} dy_i + \sum_{\varkappa}^{n} {}^{s}\, b_s d\sigma_s \equiv d\left(\sum_{\varkappa}^{n} {}^{s}\, b_s \sigma_s\right),$$

(vgl. Art. 253).

Hieraus folgt:

$$\sum_{\varkappa}^{n} {}^{s}\, \sigma_s \frac{\partial b_i}{\partial y_s} \equiv \sum_{\varkappa}^{n} {}^{s}\, \sigma_s \frac{\partial b_s}{\partial y_\iota};$$

und mithin:

$$\frac{\partial b_i}{\partial y_s} \equiv \frac{\partial b_s}{\partial y_i} \quad (i = 1, \ldots n;\ s = \varkappa \ldots n). \tag{28}$$

Hieraus schlieſst man, daſs der Pfaff'sche Ausdruck

$$\sum_{\varkappa}^{n} {}^{s}\, b_s dy_s$$

ein exaktes Differential $d\psi(y_1 \ldots y_n)$ wird, wenn man $y_1 \ldots y_{\varkappa-1}$ als Konstante betrachtet. Beziehen wir also das Symbol d auf alle Variabeln $y_1 \ldots y_n$, so folgt:

$$\sum_{\varkappa}^{n} {}^{s}\, b_s dy_s \equiv d\psi - \sum_{1}^{\varkappa-1} {}^{i}\, \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy_\iota;\ b_s \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y_s}.$$

Aus (28) schlieſsen wir jetzt:

$$\frac{\partial b_i}{\partial y_s} = \frac{\partial b_s}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_s}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y_i}\right) \qquad (s = \varkappa, \ldots n),$$

also:

$$b_i = \frac{\partial \psi}{\partial y_i} + c_i(y_1 \ldots y_{\varkappa-1}),$$

und es folgt:

$$(29)\quad \varDelta' = \sum_1^{\varkappa-1} {}^i\, b_i dy_i + \sum_{\varkappa}^{n} {}^s\, b_s dy_s = d\psi(y_1 \ldots y_n) + \sum_1^{\varkappa-1} {}^i\, c_i(y_1 \ldots y_{\varkappa-1}) dy_i.$$

Offenbar kann ψ von $y_\varkappa \ldots y_n$ nicht unabhängig sein.

Man erkennt auch leicht umgekehrt, dafs wenn $\varDelta$ vermöge (20) die eben hingeschriebene Form erhalten soll, die Funktionen $\omega_1 \ldots \omega_{\varkappa-1}$ dem vollständigen System V genügen müssen; denn die Gleichungen (25) gehören zu (29) in demselben Sinne wie die Gleichungen V zu $\varDelta$.

Hiermit sind alle Eigenschaften der Systeme V und W aufs neue abgeleitet.

Es sei noch hervorgehoben, dafs sich der in Art. 149 gegebene Beweis des Satzes, welcher der Clebsch'schen Reduktionsmethode zu Grunde liegt, wesentlich auf die Kovarianz der Systeme V und W stützt und daher auch von unserm gegenwärtigen Standpunkte aus keiner wesentlichen Vereinfachung fähig ist. Um also im Zusammenhang mit den Entwickelungen dieses § das Fundamentaltheorem zu beweisen, haben wir nur die Schlufsweise von Kap. VI, § 2 zu wiederholen.

§ 3. Die Normalformen der Klammersymbole.

262. Der Pfaff'sche Ausdruck $\varDelta$ besitze die Klasse $\varkappa = 2\lambda$ und sei auf eine Normalform

$$(1)\qquad \varDelta = \sum_1^{\lambda} {}^i\, \pi_i(x_1 x_2 \ldots x_n) d\xi_i(x_1 x_2 \ldots x_n) = \sum_1^{n} {}^i\, a_i dx_i$$

gebracht; wir dürfen annehmen, dafs das Pfaff'sche Aggregat P nicht identisch null sei, dafs also die $\varkappa$ Funktionen π_i, ξ_i hinsichtlich $x_1 \ldots x_\varkappa$ unabhängig seien. Dann stellen die Formeln

$$(2)\qquad \xi_i = \xi_i(x_1 x_2 \ldots x_n);\ \pi_i = \pi_i(x_1 x_2 \ldots x_n);\ y_s = x_s$$
$$(i = 1, 2, \ldots \lambda;\ s = \varkappa, \varkappa + 1 \ldots n)$$

eine Variabelntransformation dar, die nach den x_i aufgelöst so laute:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &x_i = \Xi_i(\xi_1 \ldots \xi_\lambda,\ \pi_1 \ldots \pi_\lambda,\ y_{\varkappa+1} \ldots y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots \varkappa) \\ &x_s = y_s \qquad (s = \varkappa + 1,\ \varkappa + 2,\ \ldots n). \end{aligned}$$

Wir stellen uns die Aufgabe, zu ermitteln, welche Gestalt die in Art. 220 definirten Klammersymbole

$$(\varphi f),\ (f)_0,\ (f)_1\ \ldots\ (f)_{n-\varkappa}$$

annehmen, wenn man statt der x_i vermöge (2) die neuen Independenten

$$\xi_1 \ldots \xi_\lambda \pi_1 \ldots \pi_\lambda y_{\varkappa+1} y_{\varkappa+2} \ldots y_n \tag{4}$$

einführt.

Verstehen wir unter δ_{ik} die positive Einheit oder die Null, je nachdem die Indices i und k gleich oder verschieden sind, so gelten vermöge der Transformationsformeln (2) oder (3) folgende identische Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_1^\varkappa{}^k \frac{\partial \pi_h}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \pi_l} \equiv \sum_1^\varkappa{}^k \frac{\partial \xi_h}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} \equiv \delta_{hl} \\ &\sum_1^\varkappa{}^k \frac{\partial \pi_h}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} \equiv \sum_1^\varkappa{}^k \frac{\partial \xi_h}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \pi_l} \equiv 0 \end{aligned}\right. \qquad (h, l = 1, 2, \ldots \lambda). \tag{5}$$

Ferner hat man vermöge (1) identisch:

$$a_i \equiv \sum_1^\lambda{}^h \pi_h \frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \tag{6}$$

$$a_{ik} \equiv \sum_1^\lambda{}^h \left(\frac{\partial \pi_h}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} - \frac{\partial \pi_h}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_h}{\partial x_k}\right). \tag{7}$$

Wir schreiben nun

$$b_{rs} \equiv \sum_1^\lambda{}^h \left(\frac{\partial x_s}{\partial \pi_h}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_h} - \frac{\partial x_r}{\partial \pi_h}\frac{\partial x_s}{\partial \xi_h}\right) \tag{8}$$

und bilden die Summe

$$\sum_1^\varkappa{}^k a_{ik} b_{rk}.$$

Setzen wir hierin für a_{ik} und b_{rk} ihre Ausdrücke (7) (8) ein, so ergiebt sich:

$$\sum_1^\varkappa{}^k \sum_1^\lambda{}^h \sum_1^\lambda{}^l \left(\frac{\partial \pi_h}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_h}{\partial x_i}\frac{\partial x_k}{\partial \pi_l}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_l} + \frac{\partial \pi_h}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_h}{\partial x_k}\frac{\partial x_r}{\partial \pi_l}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_l}\right)$$

$$- \sum_1^\varkappa{}^k \sum_1^\lambda{}^h \sum_1^\lambda{}^l \left(\frac{\partial \pi_h}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_h}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \pi_l}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_l} + \frac{\partial \pi_h}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_h}{\partial x_i}\frac{\partial x_r}{\partial \pi_l}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_l}\right).$$

Die zweite dieser dreifachen Summen verschwindet nach (5) identisch, während die erste folgenden Wert hat:

$$\sum_1^\lambda {}_h \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial x_i} \frac{\partial x_r}{\partial \xi_h} + \frac{\partial \pi_h}{\partial x_i} \frac{\partial x_r}{\partial \pi_h} \right).$$

Dieser Ausdruck reduzirt sich aber vermöge (2) oder (3) auf δ_{ir}, und es folgt:

$$(9) \qquad \sum_1^\varkappa {}_k\, a_{ik} b_{rk} \equiv \delta_{ir}.$$

Lassen wir jetzt i die Werte $1, 2, .. \varkappa$ durchlaufen, so erhalten wir zur Bestimmung der $\varkappa$ Unbekannten $b_{r1} b_{r2} \ldots b_{r\varkappa}$ ein System von $\varkappa$ Gleichungen, deren Auflösung folgendes Resultat liefert:

$$(10) \qquad P \cdot b_{rk} = P_{rk};$$

das Symbol P_{rk} hat die in Art. 219 angegebene Bedeutung; die daselbst angegebenen Formeln, sowie die Identität

$$\sum_1^\varkappa {}_i\, a_i P_{ik} \equiv - \Pi_{k0}$$

liefern jetzt mit Rücksicht auf (5) nnd (6):

$$(f)_0 \equiv - \sum_1^\varkappa {}_k \frac{\Pi_{k0}}{P} \frac{\partial f}{\partial x_k} \equiv \sum_1^\varkappa {}_i \sum_1^\varkappa {}_k\, a_i \frac{P_{ik}}{P} \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$\equiv \sum_1^\varkappa {}_i \sum_1^\varkappa {}_k \sum_1^\lambda {}_l\, b_{ik} \pi_l \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$\equiv \sum_1^\varkappa {}_i \sum_1^\varkappa {}_k \sum_1^\lambda {}_l \sum_1^\lambda {}_p \left\{ \pi_l \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \pi_p} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_p} - \frac{\partial x_i}{\partial \pi_p} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_p} \right) \right\}$$

$$\equiv \sum_1^\varkappa {}_k \sum_1^\lambda {}_l\, \pi_l \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \pi_l} \equiv \sum_1^\lambda {}_l\, \pi_l \frac{\partial f}{\partial \pi_l}.$$

Da ferner die Beziehung:

$$\Pi_{k,\, \varkappa+s} \equiv \sum_1^\varkappa {}_i\, a_{i,\, \varkappa+s} P_{ik}$$

stattfindet, so hat man für $s > 0$ mit Rücksicht auf die Formeln des Art. 220 die Identitäten:

$$(f)_s \equiv \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+s}} - \sum_1^\varkappa {}_i \sum_1^\varkappa {}_k\, a_{i,\, \varkappa+s} b_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Auf Grund einer ähnlichen Rechnung wie soeben erhält man vermöge (7) und (8) die Formel:

$$(f)_s \equiv \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+s}} - \sum_1^\lambda {}_h \frac{\partial f}{\partial \pi_h} \frac{\partial \pi_h}{\partial x_{\varkappa+s}} - \sum_1^\lambda {}_h \frac{\partial f}{\partial \xi_h} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_{\varkappa+s}} \equiv \frac{\partial f}{\partial y_{\varkappa+s}}.$$

Endlich hat man wegen (5) (8) und (10):

$$(\varphi f) \equiv \sum b_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \equiv$$

$$\equiv \sum_1^\varkappa {}_i \sum_1^\varkappa {}_k \sum_1^\lambda {}_l \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \pi_l} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_l} - \frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial x_i}{\partial \pi_l} \right)$$

$$\equiv \sum_1^\lambda {}_l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \pi_l} \frac{\partial f}{\partial \xi_l} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_l} \frac{\partial f}{\partial \pi_l} \right).$$

Damit haben wir den folgenden Satz gewonnen:

Ist Δ ein Pfaff'scher Ausdruck der Klasse $\varkappa = 2\lambda$, und das Pfaff'sche Aggregat $P \equiv (1, 2, .. \varkappa)$ nicht identisch null, und besitzt Δ die Normalform

$$\sum_1^\lambda {}_i \pi_i d\xi_i,$$

so gelten vermöge der Variabelntransformation:

$$\xi_i = \xi_i(x_1 .. x_n); \quad \pi_i = \pi_i(x_1 .. x_n); \quad y_s = x_s$$
$$(i = 1, 2, .. \lambda; \; s = 2\lambda + 1, 2\lambda + 2, .. n)$$

die folgenden Identitäten:

$$(11) \begin{cases} (\varphi f) \equiv \sum_1^\varkappa {}_i \sum_1^\varkappa {}_k \frac{P_{ik}}{P} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \equiv \sum_1^\lambda {}_l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \pi_l} \frac{\partial f}{\partial \xi_l} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_l} \frac{\partial f}{\partial \pi_l} \right); \\ (f)_0 \equiv \sum_1^\varkappa {}_i \sum_1^\varkappa {}_k a_i \frac{P_{ik}}{P} \frac{\partial f}{\partial x_k} \equiv \pi_1 \frac{\partial f}{\partial \pi_1} + \cdots + \pi_\lambda \frac{\partial f}{\partial \pi_\lambda}; \\ (f)_s \equiv \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+s}} - \sum_1^\varkappa {}_k \frac{\Pi_{k, \varkappa+s}}{P} \frac{\partial f}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial f}{\partial y_{\varkappa+s}} \quad (s = 1, 2, .. n - \varkappa). \end{cases}$$

Wir wollen die hier gegebenen einfachen Ausdrücke für die Klammersymbole (φf) und $(f)_i$ als deren „Normalformen" bezeichnen.

263. Ehe wir an dieses wichtige Theorem weitere Schlußfolgerungen knüpfen, wollen wir die analogen Rechnungen auch für den Fall $\varkappa = 2\lambda - 1$ durchführen.

Unter der genannten Annahme habe $\varDelta$ die Normalform

$$(12)\qquad \varDelta \equiv d\zeta(x_1\,..\,x_n) - \sum_1^{\lambda-1}{}^{i}\,\pi_i(x_1\,..\,x_n)\,d\xi_i(x_1\,..\,x_n);$$

sind dann die Pfaff'schen Aggregate P', Q nicht identisch null (Art. 166), so liefern die Gleichungen

$$(13)\qquad \begin{cases} \zeta = \zeta(x_1\,..\,x_n); \; \xi_i = \xi_i(x_1\,..\,x_n); \; \pi_i = \pi_i(x_1\,..\,x_n) \\ y_{\varkappa+s} = x_{\varkappa+s}, \quad (i = 1\,..\,\lambda-1;\; s = 1, 2, ..\, n-\varkappa) \end{cases}$$

eine Variabelntransformation, deren nach den x_i aufgelöste Form so laute:

$$(14)\qquad \begin{cases} x_i = \Xi_i(\zeta, \xi_1\,..\,\xi_{\lambda-1}, \pi_1\,..\,\pi_{\lambda-1}, y_{\varkappa+1}\,..\,y_n) \quad (i = 1, 2, ..\,\varkappa) \\ x_s = y_s \qquad (s = \varkappa+1\,..\,n). \end{cases}$$

Vermöge dieser Transformation gelten die Identitäten (5) für $h, l = 1\,..\,\lambda-1$, und aufserdem noch die folgenden:

$$(15)\qquad \sum_1^{\varkappa}{}^{k} \frac{\partial\zeta}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\zeta} \equiv 1; \quad \sum_1^{\varkappa}{}^{k} \frac{\partial\zeta}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\xi_l} \equiv \sum_1^{\varkappa}{}^{k} \frac{\partial\zeta}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\pi_l} \equiv 0,$$

$$(16)\qquad a_i \equiv \frac{\partial\zeta}{\partial x_i} - \sum_1^{\lambda-1}{}^{h} \pi_h \frac{\partial\xi_h}{\partial x_i} \qquad (i = 1\,..\,n),$$

$$(17)\qquad a_{ik} \equiv -\sum_1^{\lambda-1}{}^{h} \left(\frac{\partial\pi_h}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_h}{\partial x_i} - \frac{\partial\pi_h}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_h}{\partial x_k}\right).$$

Wir schreiben jetzt:

$$(18)\qquad \begin{cases} c_{rs} \equiv -\displaystyle\sum_1^{\lambda-1}{}^{l} \left[\frac{\partial x_s}{\partial\pi_l}\left(\frac{\partial x_r}{\partial\xi_l} + \pi_l\frac{\partial x_r}{\partial\zeta}\right) - \frac{\partial x_r}{\partial\pi_l}\left(\frac{\partial x_s}{\partial\xi_l} + \pi_l\frac{\partial x_s}{\partial\zeta}\right)\right]; \\ c_{r0} \equiv -\dfrac{\partial x_r}{\partial\zeta}. \end{cases}$$

Bilden wir dann den Ausdruck

$$\sum_1^{\varkappa}{}^{k} a_{ik}c_{rk},$$

indem wir für a_{ik} und c_{rk} ihre Werte (17), (18) einsetzen, so ergiebt sich mit Hülfe der Identitäten (5) (15) (16) durch eine etwas längere, aber unschwierige Rechnung das Resultat:

$$\sum_1^{\lambda-1}{}^{h}\left(\frac{\partial x_r}{\partial\xi_h}\frac{\partial\xi_h}{\partial x_i} + \frac{\partial x_r}{\partial\pi_h}\frac{\partial\pi_h}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial x_r}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x_i} + \frac{\partial x_r}{\partial\zeta}\left(-\frac{\partial\zeta}{\partial x_i} + \sum_1^{\lambda-1}{}^{h}\pi_h\frac{\partial\xi_h}{\partial x_i}\right);$$

dieser Ausdruck aber hat offenbar den Wert:

$$\delta_{r\iota} - a_\iota \frac{\partial x_r}{\partial \zeta};$$

setzen wir daher noch

$$a_i \equiv a_{0i} \equiv - a_{\iota 0},$$

so folgt wegen (18):

$$(19) \qquad \begin{cases} \sum_0^{\varkappa} {}^k a_{\iota k} c_{rk} = \delta_{ir} & (i = 1, 2 \, .. \, \varkappa) \\ \sum_0^{\varkappa} {}^k a_k c_{rk} = 0. \end{cases}$$

Die zuletzt hingeschriebene Gleichung ergiebt sich leicht aus (5) (15) (16) und (18). Aus den $\varkappa + 1$ Gleichungen (19) lassen sich die $\varkappa + 1$ Unbekannten $c_{r0} c_{r1} \, .. \, c_{r\varkappa}$ berechnen, und zwar ergiebt sich:

$$Q c_{rk} = Q_{rk} \qquad (r, k = 0, 1, \, .. \, \varkappa),$$

wenn Q_{rk} die in Art. 222 angegebene Bedeutung hat. Daraus folgt:

$$[\varphi f] \equiv - \sum_1^{\varkappa} {}^i \sum_1^{\varkappa} {}^k \frac{Q_{ik}}{Q} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \equiv - \sum_1^{\varkappa} {}^i \sum_1^{\varkappa} {}^k c_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}.$$

Eine leichte Rechnung zeigt, daſs der zuletzt hingeschriebene Ausdruck vermöge (5) (15) (18) die Form:

$$\sum_1^{\lambda - 1} {}^l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \pi_l} \frac{\partial f}{\partial \xi_l} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_l} \frac{\partial f}{\partial \pi_l} \right) + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \sum_1^{\lambda - 1} {}^l \pi_l \frac{\partial \varphi}{\partial \pi_l} - \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \sum_1^{\lambda - 1} {}^l \pi_l \frac{\partial f}{\partial \pi_l}$$

annimmt. Ferner verifizirt man ohne Mühe die Beziehung

$$K_{s, 2\lambda + k} \equiv - \sum_0^{\varkappa} {}^h a_{2\lambda + k, h} Q_{hs},$$

und erhält somit der Reihe nach

$$\begin{aligned} [f]_{k+1} &\equiv \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda + k}} - \sum_1^{\varkappa} {}^s \frac{K_{s, 2\lambda + k}}{Q} \frac{\partial f}{\partial x_s} \\ &\equiv \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda + k}} + \sum_1^{\varkappa} {}^s \sum_1^{\varkappa} {}^i a_{2\lambda + k, i} c_{is} \frac{\partial f}{\partial x_s} - a_{2\lambda + k} \sum_1^{\varkappa} {}^s \frac{\partial x_s}{\partial \zeta} \frac{\partial f}{\partial x_s} \\ &\equiv \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda + k}} - \sum_1^{\lambda - 1} {}^h \frac{\partial f}{\partial \xi_h} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_{2\lambda + k}} - \sum_1^{\lambda - 1} {}^h \frac{\partial f}{\partial \pi_h} \frac{\partial \pi_h}{\partial x_{2\lambda + k}} - \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_{2\lambda + k}} \\ &\equiv \frac{\partial f}{\partial y_{2\lambda + k}}. \end{aligned}$$

Endlich gelten noch die Beziehungen:

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} \equiv \sum_1^{\varkappa} {}^i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \zeta} \equiv - \sum_1^{\varkappa} {}^i \frac{\partial f}{\partial x_i} c_{i0} \equiv - \sum_1^{\varkappa} {}^i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{Q_{i0}}{Q};$$

unter Gebrauch der Bezeichnungen des Art. 222 aber hat man

$$Q_{\varkappa 0} \equiv - P'; \; Q_{i0} \equiv \Pi'_{i, 2\lambda-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots \varkappa - 1)$$

und es folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} \equiv \frac{1}{Q}\left(P' \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} - \sum_1^{\varkappa-1} {}^i \Pi'_{i, 2\lambda-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \equiv \{f\}_0.$$

Indem wir diese Resultate zusammenfassen, können wir folgenden Satz formuliren:

Ist $\varDelta$ ein Pfaff'scher Ausdruck mit der Klasse $\varkappa = 2\lambda - 1$ und der Normalform:

$$d\zeta(x_1 \ldots x_n) - \sum_1^{\lambda-1} {}^i \pi_i(x_1 \ldots x_n) d\xi_i(x_1 \ldots x_n),$$

und verschwinden die Pfaff'schen Aggregate P', Q nicht identisch, so gelten vermöge der Variabelntransformation

$$\xi_i = \xi_i(x_1 \ldots x_n); \; \pi_i = \pi_i(x_1 \ldots x_n); \; \zeta = \zeta(x_1 \ldots x_n)$$
$$y_{\varkappa+s} = x_{\varkappa+s} \qquad (i = 1, \ldots \lambda - 1, \; s = 1, 2, \ldots n - \varkappa)$$

folgende Identitäten:

$$(20) \quad \begin{cases} [\varphi f] \equiv - \sum_1^{\varkappa} {}^i \sum_1^{\varkappa} {}^k \frac{Q_{ik}}{Q}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \\ \quad \equiv \sum_1^{\lambda-1} {}^h \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \pi_h}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_h} + \pi_h \frac{\partial f}{\partial \zeta}\right) - \frac{\partial f}{\partial \pi_h}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_h} + \pi_h \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right)\right] \\ \{f\}_0 \equiv \frac{1}{Q}\left(P' \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} - \sum_1^{\varkappa-1} {}^i \Pi'_{i\varkappa} \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \equiv \frac{\partial f}{\partial \zeta} \\ [f]_s \equiv \frac{\partial f}{\partial x_{\varkappa+s}} - \frac{1}{Q}\sum_1^{\varkappa} {}^i K_{i, 2\lambda+s} \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial y_{\varkappa+s}}. \end{cases}$$

Diese einfachen Ausdrücke für die Klammersymbole wollen wir wiederum als die „Normalformen" der letzteren bezeichnen.

264. Wir wollen noch für das in Art. 223 definirte Symbol $\{\varphi f\}$ durch Einführung neuer Independenten einen einfachen Ausdruck gewinnen. In der Normalform (12) sind unter den oben gemachten

Annahmen die $\varkappa - 1$ Funktionen $\pi_i \xi_\iota$ hinsichtlich $x_1 x_2 \ldots x_{2\lambda-2}$ unabhängig (Art. 167), daher liefern die Relationen

(21) $\xi_\iota = \xi_\iota(x_1 \ldots x_n)$; $\pi_i = \pi_i(x_1 \ldots)$; $y_s = x_s$ $(i = 1 \ldots \lambda - 1;\ s = \varkappa \ldots n)$

eine Variabelntransformation. Definirt man dann die Gröfsen b_{ik} durch die Formel

$$b_{ik} \equiv - \sum_1^{\lambda-1} {}_h \left(\frac{\partial x_k}{\partial \pi_h} \frac{\partial x_\iota}{\partial \xi_h} - \frac{\partial x_\iota}{\partial \pi_h} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_h} \right),$$

so lassen sich die Rechnungen des Art. 262 fast wörtlich auf den gegenwärtigen Fall übertragen, und man findet:

$$\{\varphi f\} \equiv - \sum_1^{\varkappa-1} {}_i \sum_1^{\varkappa-1} {}_k \frac{P'_{ik}}{P'} \frac{\partial f}{\partial x_\iota} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \equiv \sum_1^{\lambda-1} {}_h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \pi_h} \frac{\partial f}{\partial \xi_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_h} \frac{\partial f}{\partial \pi_h} \right).$$

Dagegen verliert $\{\varphi f\}$ im allgemeinen seine einfache Bedeutung, wenn man nicht die Transformation (21), sondern die Transformation (13) anwendet. Da aber diesem Klammersymbol späterhin nur eine geringe Wichtigkeit zukommt, wollen wir uns mit der Aufstellung der betreffenden Formel nicht weiter aufhalten.

265. Aus den vorstehenden Entwickelungen ergeben sich zunächst die folgenden, schon anderweitig (Kap. V) bekannten Thatsachen:

Ist $\varkappa = 2\lambda$, besitzt also Δ die Normalform:

$$\pi_1 d\xi_1 + \cdots + \pi_\lambda d\xi_\lambda,$$

und führt man vermöge (2) neue Independente ein, so erhält das zu Δ gehörige System W die Form:

$$\frac{\partial f}{\partial y_{\varkappa+s}} = 0 \quad (s = 1, 2 \ldots n - \varkappa),$$

während das $n - \varkappa + 1$-gliedrige vollständige System V die folgende Gestalt annimmt:

$$\sum_1^\lambda {}_i\, \pi_i \frac{\partial f}{\partial \pi_i} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_{\varkappa+s}} = 0 \qquad (s = 1, \ldots n - \varkappa).$$

Das allgemeinste Integral von W ist also eine arbiträre Funktion der π_i, ξ_ι, dasjenige von V eine beliebige Funktion der π_i, ξ_i, die in den π_i homogen nullter Ordnung ist.

Ist im Fall $\varkappa = 2\lambda - 1$ der Ausdruck (12) eine Normalform von Δ, so erhalten die Systeme V und W vermöge (13) folgende Formen:

$$(V) \qquad \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y_{\varkappa+1}} = 0, \cdots \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0,$$

$$(W) \qquad \frac{\partial f}{\partial y_{\varkappa+1}} = 0, \cdots \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0.$$

Also ist das allgemeinste Integral von V eine arbiträre Funktion von $\pi_i \xi_i$, die allgemeinste Lösung von W eine solche von $\zeta, \pi_i \xi_i$, was mit den früheren Resultaten übereinstimmt.

266. Indem wir die Resultate des Art. 263 mit denjenigen des Art. 251 in Verbindung bringen, erhalten wir ohne weiteres den Satz:

Ist $\varkappa = 2\lambda - 1$ und besitzt $\varDelta$ die Normalform:

$$d\zeta - \pi_1 d\xi_1 - \cdots - \pi_{\lambda-1} d\xi_{\lambda-1},$$

so erhält die allgemeinste infinitesimale Transformation Xf, die einer Identität der Form

$$X\varDelta \equiv \varrho \varDelta \tag{22}$$

genügt, vermöge der Variabelntransformation (13) die Gestalt:

$$\sum_1^{\lambda-1} {}_h \left[\frac{\partial W}{\partial \pi_h}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_h} + \pi_h \frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial \pi_h}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi_h} + \pi_h \frac{\partial W}{\partial \zeta}\right)\right] - W \frac{\partial f}{\partial \zeta}$$

$$+ \sum_1^{n-\varkappa} {}_s \varrho_s \frac{\partial f}{\partial y_{\varkappa+s}}.$$

Dabei bedeutet W eine arbiträre Funktion der $\varkappa$ Funktionen ζ, π_i, ξ_i, und der in (22) auftretende Faktor ϱ hat den Wert

$$\varrho \equiv -\frac{\partial W}{\partial \zeta}.$$

Insbesondere besitzt also die allgemeinste infinitesimale Transformation Xf, die der Identität

$$X\varDelta \equiv 0$$

genügt, die Form:

$$\sum \left(\frac{\partial W}{\partial \pi_h}\frac{\partial f}{\partial \xi_h} - \frac{\partial W}{\partial \xi_h}\frac{\partial f}{\partial \pi_h}\right) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\left(\sum \pi_h \frac{\partial W}{\partial \pi_h} - W\right) + \sum_1^{n-\varkappa} \varrho_s \frac{\partial f}{\partial y_{\varkappa+s}},$$

worin W eine Funktion der Gröfsen $\pi_i \xi_i$ allein bedeutet.

267. Die Resultate der vor. Nr. lassen sich noch auf zwei andere Weisen, ohne Bezugnahme auf die Variabelntransformation des Art. 263 ableiten.

Erstens nämlich können wir für den Pfaff'schen Ausdruck:

$$\varDelta \equiv dx_{2\lambda-1} - \sum_1^{\lambda-1} {}_h x_{h+\lambda-1} dx_h$$

unter der Annahme, dafs $x_1 x_2 \ldots x_n$ die Independenten sind, die Pfaff'schen Aggregate P', Q, Q_{ik} etc. berechnen, sodann nach den Vorschriften des Art. 251 die allgemeinste infinitesimale Transformation aufstellen, welche die Pfaff'sche Gleichung $\Delta = 0$ bezw. den Ausdruck Δ nicht ändert, und hinterher dann die Gröfsen $x_1 \ldots x_n$ wieder durch die Buchstaben ζ, ξ_ι, π_i, y_s ersetzen. Weit einfacher aber lassen sich die Sätze der vor. Nr. direkt aus der Betrachtung der Identität (22) ableiten. Wir wollen dies für den Fall $\varkappa = n$ näher ausführen. Dabei ersetzen wir, um auf die Bezeichnungsweise des Art. 174 ff. zurückzukommen, $\lambda - 1$ durch m, ζ durch z, ξ_i durch x_i und π_i durch p_i, und schicken zunächst folgende Definition voraus:

Eine infinitesimale Transformation

$$Xf \equiv \sum_1^m {}_i\, \Xi_\iota \frac{\partial f}{\partial x_\iota} + \sum_1^m {}_i\, \Pi_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + Z \frac{\partial f}{\partial z},$$

worin die Ξ_i, Π_ι, Z Funktionen der $2m+1$ Variabeln

(23) $$z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m$$

bedeuten, heifst eine *„infinitesimale Berührungstransformation"* dieser Variabeln (oder des Raums $R_{m+1}(z, x_1 \ldots x_m)$), wenn sie die Pfaff'sche Gleichung

$$\nabla \equiv dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m = 0$$

invariant läfst, also einer Identität der Form

(24) $$X\nabla \equiv \varrho(z, \ldots p_m) \cdot \nabla$$

genügt. Bezeichnen wir den Ausdruck

(25) $$\sum_1^m {}_i \left[\frac{\partial W}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial W}{\partial z}\right)\right]$$

mit $[Wf]_{zxp}$, oder auch, wenn kein Mifsverständnis zu befürchten ist, einfach mit $[Wf]$, so nimmt der Satz der Nr. 266 folgende Form an:

Die allgemeinste infinitesimale Berührungstransformation der $2m+1$ *Variabeln* (23) *hat die Form*

$$Xf \equiv [Wf]_{zxp} - W \frac{\partial f}{\partial z},$$

worin W *eine beliebige Funktion der Variabeln* (23) *bedeutet, und man hat*

$$X\nabla \equiv -\frac{\partial W}{\partial z} \cdot \nabla.$$

Die allgemeinste infinitesimale Berührungstransformation, die überdies den Ausdruck ∇ *invariant läfst, hat die Form:*

$$\sum_1^m {}_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H\right), .$$

worin H *eine arbiträre Funktion von* $x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m$ *bedeutet.*

Um unsere Behauptung zu erweisen, schreiben wir die Bedingungen dafür auf, dafs die infinitesimale Transformation

$$(26)\qquad Xf \equiv Z\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_1^m {}_i\, \Xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m {}_i\, \Pi_i \frac{\partial f}{\partial p_i},$$

deren Koeffizienten Funktionen von $z, x_1 \ldots p_m$ sind, die Pfaff'sche Gleichung $\nabla = 0$ invariant lasse. Man findet:

$$X\nabla \equiv dZ - \sum_1^m {}_i\, p_i d\Xi_i - \sum_1^m {}_i\, \Pi_i dx_i \equiv \varrho \nabla,$$

d. h. also:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum p_i \frac{\partial \Xi}{\partial z} = \varrho$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} - \sum p_i \frac{\partial \Xi_i}{\partial x_i} - \Pi_i = - \varrho p_i$$
$$\frac{\partial Z}{\partial p_i} - \sum p_i \frac{\partial \Xi}{\partial p_i} \equiv 0.$$

Setzen wir nun

$$(27)\qquad W \equiv p_1\Xi_1 + p_2\Xi_2 + \cdots + p_m\Xi_m - Z,$$

so schreiben sich diese Gleichungen folgendermafsen:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -\varrho;$$
$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = \varrho p_i - \Pi_i$$
$$\frac{\partial W}{\partial p_i} = \Xi_i$$

woraus für die infinitesimale Transformation Xf sofort die Darstellung

$$(28)\qquad Xf \equiv [Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$$

hervorgeht. Umgekehrt, hat Xf diese Form, worin W beliebig gewählt ist, so hat man

$$X\nabla \equiv d\left[\sum p_i \frac{\partial W}{\partial p_i} - W\right] - \sum p_i d\left(\frac{\partial W}{\partial p_i}\right) + \sum\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial W}{\partial z}\right) dx_i$$
$$\equiv -\frac{\partial W}{\partial z}(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m),$$

was zu zeigen war. Der zweite Teil unseres Satzes folgt unmittelbar aus dieser Identität.

Ist dt eine unendlich kleine Konstante, so verwandelt die infinitesimale Transformation (28) jedes Flächenelement $z, x_1 \ldots p_m$ des Raums

R_{m+1} in ein dazu unendlich benachbartes mit den Koordinaten $z + dz \,.\,.\, p_m + dp_m$, wobei

$$dz = \left(\sum p_\iota \frac{\partial W}{\partial p_\iota} - W\right) dt,$$

$$dx_i = \frac{\partial W}{\partial p_i} dt; \; dp_i = -\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial W}{\partial z}\right) dt.$$

Dieses Nachbarelement liegt offenbar dann und nur dann mit dem ursprünglichen vereinigt, wenn die Koordinaten des letzteren der Relation $W = 0$ genügen.

Eine infinitesimale Transformation (26) gehört dann und nur dann der zu ∇ adjungirten Schar an, wenn ihre Koefficienten durch die Identität

$$Z \equiv p_1 \Xi_1 + \cdot\cdot + p_m \Xi_m$$

verbunden sind. Die infinitesimalen Transformationen der zu ∇ adjungirten Schar, und nur diese haben sonach die Eigenschaft, jedem Flächenelement des R_{m+1} ein benachbartes, mit ihm vereinigt liegendes zuzuweisen.

268. Verbindet man im Falle $\varkappa = 2\lambda$ die Resultate von Art. 250 einerseits und von Art. 262 andrerseits, so folgt ohne weiteres:

Ist die Klasse $\varkappa$ des Pfaff'schen Ausdrucks $\varDelta$ gleich 2λ, und

$$\pi_1 d\xi_1 + \cdot\cdot + \pi_\lambda d\xi_\lambda$$

eine Normalform von $\varDelta$, so hat die allgemeinste infinitesimale Transformation Xf, welche eine Identität der Form

$$X\varDelta \equiv \varrho \varDelta \tag{29}$$

befriedigt, in den Independenten

$$\pi_1 \,.\,.\, \pi_\lambda, \; \xi_1 \,.\,.\, \xi_\lambda, \; y_{\varkappa+s} = x_{\varkappa+s} \qquad (s = 1 \,.\,.\, n - \varkappa) \tag{30}$$

geschrieben, folgende Form

$$\sum_1^\lambda{}^i \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_i}\frac{\partial f}{\partial \xi_i} - \frac{\partial H}{\partial \xi_i}\frac{\partial f}{\partial \pi_i}\right) + \varrho \sum_1^\lambda{}^i \pi_i \frac{\partial f}{\partial \pi_i} + \sum_1^{n-\varkappa}{}^s \varrho_s \frac{\partial f}{\partial y_{\varkappa+s}},$$

wobei H eine Funktion der 2λ Variabeln $\pi_\iota \xi_i$ und in den π_i homogen erster Ordnung ist, d. h. also die Bedingung

$$\pi_1 \frac{\partial H}{\partial \pi_1} + \cdot\cdot + \pi_\lambda \frac{\partial H}{\partial \pi_\lambda} \equiv H$$

befriedigt. Die Gröfsen ϱ, ϱ_s sind willkürliche Funktionen der n Variabeln (30) *und ϱ stimmt mit dem in* (29) *auftretenden Faktor überein.*

Wir betrachten insbesondere den Fall $\varkappa = n = 2\lambda$, und schreiben dann x_i statt ξ_i, p_i statt π_i und m statt λ. Deuten wir dann die $2m$ Variabeln

(31) $$x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m$$

als homogene Elementkoordinaten des Raums $R_m\,(x_1 x_2 \ldots x_m)$ (Art. 182), so ist zu beachten, dafs die infinitesimale Transformation

$$\sum p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

den Variabeln x_i keine Zuwachse erteilt, die p_i dagegen in $p_i(1+dt)$ überführt, also ihre Verhältnisse ungeändert läfst; diese infinitesimale Transformation läfst also jedes einzelne Flächenelement (31) des Raums R_m ungeändert. Wir bezeichnen nun eine infinitesimale Transformation

$$Xf \equiv \sum_1^m {}_i \left(\Xi_i(x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \Pi_i(x_1 \ldots p_m) \frac{\partial f}{\partial p_i} \right)$$

als eine *„infinitesimale homogene Berührungstransformation"* der $2m$ Variabeln (31), wenn sie den Pfaff'schen *Ausdruck*

$$\nabla' \equiv p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_m dx_m$$

invariant läfst, also die Identität

(32) $$X\nabla' \equiv 0$$

befriedigt. Dann liefert uns der vorige Satz unmittelbar die Thatsache:

Die allgemeinste homogene Berührungstransformation des R_m hat die Form

$$(Hf)_{xp},$$

wobei

$$(Hf)_{xp} \equiv \sum_1^m {}_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \right)$$

gesetzt ist, und H eine Funktion der $2m$ Variabeln $x_i p_i$ bedeutet, die in den p_i homogen erster Ordnung ist.

Dieses Resultat folgt auch mit Hülfe der aus (32) hervorgehenden Relationen:

(33) $$\begin{cases} \displaystyle\sum_1^m {}_i\, p_i \frac{\partial \Xi_i}{\partial x_k} + \Pi_k = 0 & (k = 1 \ldots m) \\ \displaystyle\sum_1^n {}_i\, p_i \frac{\partial \Xi_i}{\partial p_k} \qquad\quad = 0 & (k = 1 \ldots m), \end{cases}$$

wenn wir

$$H \equiv \Sigma p_i \Xi_i$$

setzen und beachten, daſs die Gleichungen (33) jetzt so geschrieben werden können:

$$\Xi_i \equiv \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \Pi_k \equiv -\frac{\partial H}{\partial x_k}.$$

Die infinitesimale Transformation (Hf) führt das Flächenelement $x_i p_i$ offenbar dann und nur dann in ein benachbartes, mit ihm vereinigt liegendes über, wenn seine Koordinaten die Gleichung $\sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$, oder, was dasselbe ist, die Gleichung $H = 0$ erfüllen.

269. Wir wollen noch folgende Thatsache beweisen:

Gestattet die Pfaff'sche Gleichung

$$\varDelta \equiv \sum_1^n{}^i a_i(x_1 x_2 \ldots x_n)\, dx_i = 0$$

die infinitesimale Transformation

$$Xf \equiv \sum_1^n{}^i \xi_i(x_1 x_2 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

so gestattet sie alle Transformationen der von Xf erzeugten eingliedrigen Gruppe

$$x_i' = F_i(x_1 x_2 \ldots x_n t) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

(Art. 54 und 210).

Der Satz bleibt richtig, wenn die Worte: „die Pfaff'sche Gleichung $\varDelta = 0$" durch die Worte „der Pfaff'sche Ausdruck $\varDelta$" ersetzt werden.

Es ist zu zeigen, daſs für jedes beliebige Wertsystem

$$(34) \qquad t, x_1 \ldots x_n$$

eine Identität der Form

$$\sum_1^n{}^i a_i(F_1 \ldots F_n)\, dF_i \equiv \sigma(t, x_1 \ldots x_n) \cdot \sum_1^n a_i(x_1 \ldots x_n)\, dx_i$$

stattfindet, wenn die Differentiale dF_i unter der Annahme ausgeführt werden, daſs t eine Konstante ist.

Nach Art. 54 sind nun die F_i diejenigen Integralfunktionen des simultanen Systems

$$\frac{dx_i'}{dt} = \xi_i(x_1' \ldots x_n') \qquad (i = 1 \ldots n),$$

die vermöge $t = 0$ bez. in x_i übergehen; man hat daher

$$(35) \qquad \frac{\partial F_h}{\partial t} \equiv \xi_h(F_1 F_2 \ldots F_n).$$

Ferner gilt der Annahme nach die Identität

$$(36)\qquad X\Delta \equiv \varrho(x_1 \,..\, x_n)\cdot\Delta,$$

also bestehen die Relationen:

$$Xa_s + \sum a_h \frac{\partial \xi_h}{\partial x_s} \equiv \varrho\, a_s \qquad (s = 1 \,..\, n),$$

und diese Identitäten gelten auch noch, wenn man die x_i durch die Buchstaben F_i ersetzt, d. h. man hat für jedes Wertsystem (34):

$$(37)\quad \sum_1^n {}^h\, \xi_h(F_1 \,..\, F_n) \frac{\partial a_s(F_1 \,..\, F_n)}{\partial F_h} + \sum_1^n {}^h\, a_h(F_1 \,..\, F_n) \frac{\partial \xi_h(F_1 \,..\, F_n)}{\partial F_s}$$
$$\equiv \varrho(F_1 \,..\, F_n) a_s(F_1 \,..\, F_n).$$

Wir schreiben jetzt:

$$U_k \equiv \sum_1^n {}^s\, a_s(F_1 \,..\, F_n) \frac{\partial F_s}{\partial x_k};$$

dann folgt:

$$\frac{\partial U_k}{\partial t} \equiv \sum_1^n {}^s \sum_1^n {}^h \frac{\partial a_s(F_1 \,..\, F_n)}{\partial F_h} \frac{\partial F_h}{\partial t} \frac{\partial F_s}{\partial x_k} + \sum_1^n {}^s\, a_s(F_1 \,..\, F_n) \frac{\partial^2 F_s}{\partial t\, \partial x_k}$$
$$\equiv \sum_1^n {}^s \sum_1^n {}^h \frac{\partial a_s(F_1 \,..\, F_n)}{\partial F_h}\, \xi_h(F_1 \,..\, F_n) \frac{\partial F_s}{\partial x_k}$$
$$+ \sum_1^n {}^s \sum_1^n {}^h\, a_h(F_1 \,..\, F_n) \frac{\partial \xi_h(F_1 \,..\, F_n)}{\partial F_s} \frac{\partial F_s}{\partial x_k}.$$

Mit Rücksicht auf (37) folgt sonach:

$$\frac{\partial U_k}{\partial t} \equiv \varrho(F_1 \,..\, F_n)\cdot U_k.$$

Da mithin die Verhältnisse der U_k von t nicht abhängen, dürfen wir schreiben:

$$U_k = \omega(t, x_1 \,..\, x_n)\cdot \psi_k(x_1 x_2 \,..\, x_n).$$

Setzen wir hierin $t = 0$ und beachten, daſs vermöge dieser Substitution F_i in x_i, ferner $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$ in 1 oder 0 übergeht, je nachdem i gleich k ist oder nicht (Art. 52), so folgt:

$$a_k(x_1 \,..\, x_n) \equiv \omega(0, x_1 \,..\, x_n)\cdot \psi_k(x_1 \,..\, x_n),$$

und hieraus:

$$U_k \equiv \frac{\omega(t, x_1 \ldots x_n)}{\omega(0, x_1 \ldots x_n)} \cdot a_k(x_1 x_2 \ldots x_n),$$

was zu zeigen war.

Aus dem soeben bewiesenen Satze ergeben sich folgende Korollare:

Jede infinitesimale Berührungstransformation

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$$

erzeugt eine eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen der Variabeln $z x_i p_i$:

$$\begin{aligned}
z' &= F(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m t),\\
x_i' &= F_i(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m t) \qquad (i = 1 \ldots m),\\
p_i' &= \Phi_i(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m t) \qquad (i = 1 \ldots m).
\end{aligned}$$

Jede infinitesimale Berührungstransformation der Form

$$\sum_1^m {}^i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\sum_1^m {}^i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H\right),$$

worin H *eine beliebige Funktion von* $x_1 \ldots p_m$ *bedeutet, erzeugt eine eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen der Form:*

$$\begin{aligned}
z' &= z + U(x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m, t)\\
x_i' &= F_i(x_1 x_2 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m, t) \qquad (i = 1 \ldots m)\\
p_i' &= \Phi_i(x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m, t) \qquad (i = 1 \ldots m),
\end{aligned}$$

die also der in Art. 201 definirten besonderen Kategorie von Berührungstransformationen angehören.

Jede infinitesimale homogene Berührungstransformation

$$\sum_1^m {}^i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right),$$

worin $H(x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m)$ *in den* p_i *homogen erster Ordnung ist, erzeugt eine eingliedrige Gruppe von* ***homogenen*** *Berührungstransformationen:*

$$\begin{aligned}
x_i' &= F_i(x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m t)\\
p_i' &= \Phi_i(x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m t) \qquad (i = 1 \ldots m).
\end{aligned}$$

270. Sind φ, ψ, χ drei beliebige Funktionen der $2m$ Veränderlichen $x_1 x_2 \ldots x_m p_1 \ldots p_m$ und hat das Klammersymbol (φf) die Bedeutung:

$$(38) \qquad (\varphi f) \equiv \sum_1^m {}^i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right),$$

so besteht die „*Jacobi'sche Identität*“:

$$(\varphi(\psi\chi)) + (\psi(\chi\varphi)) + (\chi(\varphi\psi)) \equiv 0. \tag{39}$$

In der That, die linke Seite dieser Gleichung ist eine Summe von Produkten aus je zwei ersten Ableitungen der Funktionen φ, ψ oder χ in eine zweite partielle Ableitung einer dieser Funktionen. Mit Rücksicht auf die Symmetrie der Identität (39) genügt es daher zu zeigen, dafs deren linke Seite keine zweite Ableitung von φ enthalten kann.

Terme, die mit einer zweiten Ableitung von φ multiplizirt sind, können nur aus den zwei letzten Gliedern von (39) entstehen. Schreiben wir nun

$$X\varphi \equiv (\psi\varphi); \quad Y\varphi \equiv (\chi\varphi),$$

so folgt:

$$(\psi(\chi\varphi)) + (\chi(\varphi\psi)) \equiv X(Y\varphi) - Y(X\varphi)$$

und wir wissen aus Art. 57, dafs die rechte Seite keine zweite Ableitung von φ enthält, was zu zeigen war.

271. Sind jetzt φ, ψ, χ drei beliebige Funktionen der $2m+1$ Veränderlichen $zx_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m$, und setzt man:

$$[\varphi f] \equiv \sum_1^m{}_i \left[\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right], \tag{40}$$

so besteht die „*Mayer'sche Identität*“:

$$[\varphi[\psi\chi]] + [\psi[\chi\varphi]] + [\chi[\varphi\psi]] \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial z}[\psi\chi] + \frac{\partial\psi}{\partial z}[\chi\varphi] + \frac{\partial\chi}{\partial z}[\varphi\psi]. \tag{41}$$

Wie im vorigen Art. zeigt man nämlich, dafs die linke Seite dieser Identität keine zweite Ableitung einer der Funktionen $\varphi\psi\chi$ enthalten kann; es genügt daher bei der Ausrechnung dieser linken Seite nur diejenigen Glieder zu betrachten, die keine zweiten Ableitungen enthalten. Die aus $[\varphi[\psi\chi]]$ entstehenden Terme dieser Art sind nun die folgenden:

$$-\sum_1^m{}_i \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\chi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial p_i} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial p_i}\right).$$

Vertauscht man hierin $\varphi\psi\chi$ zweimal hintereinander cyklisch, so folgt durch Addition der so entstehenden drei Summen in der That die rechte Seite von (41).

Es seien jetzt φ und ψ zwei Funktionen der Variabeln $x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m$; dann hat man:

$$[\varphi\psi] \equiv (\varphi\psi); \quad [\varphi z] \equiv \sum_1^n p_i\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}.$$

Schreibt man nun

(42) $$(\varphi)_0 \equiv p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial \varphi}{\partial p_m},$$

so findet man durch Anwendung der Mayer'schen Identität auf φ, ψ, z:

(43) $$(\varphi(\psi)_0) + ((\varphi)_0 \psi) + (\psi \varphi) \equiv ((\varphi \psi))_0.$$

Der Ausdruck rechts hat die Bedeutung $(\omega)_0$, wenn $\omega \equiv (\varphi \psi)$ gezetzt wird.

272. Die Identitäten (39) (41) (43) gelten auch, wenn man den Klammersymbolen ihre frühere Bedeutung beilegt:

$$(\varphi f) \equiv \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_k \frac{P_{ik}}{P} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i}; \qquad (f)_0 \equiv \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_k a_i \frac{P_{ik}}{P} \frac{\partial f}{\partial x_k};$$

$$[\varphi f] \equiv - \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_k \frac{Q_{ik}}{Q} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

und in (41) die Terme $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ etc. durch $\{\varphi\}_0$ etc. ersetzt (Art. 223).

Es folgt dies unmittelbar aus den Normalformen dieser Klammersymbole. Man erhält jetzt folgende Sätze:[1]

1) Sind $\psi(x_1 \,.\,.\, x_n)$ und $\chi(x_1 \,.\,.\, x_n)$ zwei Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(\varphi f) = 0,$$

so ist die Funktion $(\psi \chi)$ entweder eine Konstante oder ebenfalls ein Integral dieser Gleichung.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge der Jacobi'schen Identität.

2) Sind φ und ψ zwei Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung

(44) $$(f)_0 = 0,$$

so gilt dasselbe von jeder der beiden Funktionen:

(45) $$\frac{((\varphi \psi) \varphi)}{(\varphi \psi)^2}; \quad \frac{((\varphi \psi) \psi)}{(\varphi \psi)^2}.$$

In der That, wegen $(\varphi)_0 \equiv (\psi)_0 \equiv 0$ nimmt die Identität (43) folgende Form an:

(46) $$\omega + (\omega)_0 \equiv 0,$$

wenn $\omega \equiv (\varphi \psi)$ gesetzt wird. Ersetzt man aber in (43) die Funktion

1) Vgl. Clebsch III und IV.

φ durch ω, so folgt wegen $(\psi)_0 \equiv 0$:

$$((\omega)_0 \psi) + (\psi \omega) \equiv ((\omega \psi))_0,$$

oder also mit Rücksicht auf (46):

$$2\tau + (\tau)_0 \equiv 0, \tag{47}$$

wenn $\tau \equiv (\omega \psi)$ gesetzt wird.

Aus (46) und (47) folgt:

$$\omega^2 \cdot (\tau)_0 - \tau \cdot (\omega^2)_0 \equiv 0;$$

also ist $\frac{\tau}{\omega^2}$ in der That ein Integral der Gleichung (44); für den ersten Ausdruck (45) wird der Beweis ganz ähnlich geführt.

Bei diesem Satze wird natürlich vorausgesetzt, dafs die Ausdrücke (45) nicht konstant oder illusorisch werden.

3) Sind φ, ψ, χ drei Lösungen der partiellen Differentialgleichung (44), so gilt dasselbe von den Funktionen:

$$\frac{(\varphi\psi)}{(\psi\chi)}, \quad \frac{(\psi\chi)}{(\chi\varphi)}, \quad \frac{(\chi\varphi)}{(\varphi\psi)}, \tag{48}$$

denn schreibt man $\omega \equiv (\varphi\psi)$; $\omega' \equiv (\psi\chi)$, $\omega'' \equiv (\chi\varphi)$, so folgen aus (43) die Identitäten:

$$\omega + (\omega)_0 \equiv \omega' + (\omega')_0 \equiv \omega'' + (\omega'')_0 \equiv 0$$

und mithin:

$$\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)_0 \equiv \left(\frac{\omega'}{\omega''}\right)_0 \equiv \left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)_0 = 0.$$

Die drei vorstehenden Sätze gelten selbstverständlich auch, wenn $\varphi\psi\chi$ Funktionen der Variabeln $x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m$ sind, und die Klammersymbole (φf) und $(f)_0$ in der Bedeutung (38) (42) genommen werden. Satz 1) verwandelt sich dann in das sogenannte *„Poisson'sche Theorem"*, und die Sätze 2) und 3) geben der leicht zu verifizirenden Thatsache Ausdruck, dafs die Funktionen (45) (48) in den p_i homogen nullter Ordnung sind, wenn dies für φ, ψ, χ zutrifft.

Kapitel XI.

Die Definitionsgleichungen der endlichen Berührungstransformationen.[1])

§ 1. Die Definitionsgleichungen der endlichen homogenen Berührungstransformationen.

273. In den $2m$ unabhängigen Veränderlichen

(1) $$x_1 x_2 \ldots x_m p_1 p_2 \ldots p_m$$

seien irgend $2m$ Funktionen $X_1 \ldots X_m$, $P_1 \ldots P_m$ gegeben, welche der Identität:

(2) $$\sum_1^m {}^i P_i(x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m)\, dX_i(x_1 \ldots p_m) \equiv \sum_1^m {}^i p_i dx_i$$

Genüge leisten. Haben nun die Klammersymbole (φf) und $(f)_0$ dieselbe Bedeutung wie in Art. 267 und 268, und beachtet man, daſs die linke Seite der Identität (2) eine Normalform des Pfaff'schen Ausdrucks:

$$\nabla' \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m$$

darstellt, so liefert die Anwendung der allgemeinen Theorie des Pfaff'schen Problems auf den Ausdruck ∇' der Reihe nach folgende Sätze, von denen uns die drei ersten bereits bekannt sind:

1) *Die $2m$ Funktionen*

(3) $$X_1 X_2 \ldots X_m, \; P_1 P_2 \ldots P_m$$

sind von einander unabhängig, d. h. die Gleichungen

(4) $$x_i' = X_i; \; p_i' = P_i \qquad (i = 1 \ldots m)$$

definiren eine Transformation der $2m$ Variabeln (1), und zwar eine homogene Berührungstransformation.

2) *Die X_i sind hinsichtlich der p_k homogen nullter Ordnung,* man hat also

(5) $$(X_i)_0 \equiv p_1 \frac{\partial X_i}{\partial p_1} + \cdots + p_m \frac{\partial X_i}{\partial p_m} \equiv 0 \qquad (i = 1 \ldots m).$$

Die X_i müssen nämlich dem zu ∇' gehörigen vollständigen System V genügen, und dieses reduzirt sich auf die einzige Gleichung

$$(f)_0 \equiv \sum_1^m {}^i p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0.$$

---

1) Lie II Abt. 1.

3) *Die P_ι sind hinsichtlich der p_k homogen erster Ordnung,* d. h. man hat:

$$(6) \qquad (P_\iota)_0 \equiv P_i \qquad (i = 1 \,..\, m),$$

denn der Pfaff'sche Ausdruck $\frac{1}{P_\iota}\nabla'$ besitzt die Klasse $2m - 1$, also genügt die Funktion $\frac{1}{P_i}$ der nichthomogenen linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(f)_0 + f \equiv 0$$

(Art. 142), ist also in den p_k homogen der Ordnung -1.

Die beiden letzten Sätze haben wir schon in Art. 202 aus der Form der allgemeinsten homogenen Berührungstransformation (4) erschlossen.

4) *Die Funktionen $X_1 \,..\, X_m$ genügen den Identitäten*

$$(7) \qquad (X_\iota X_k) \equiv 0 \qquad (i, k = 1, 2 \,..\, m).$$

5) *Umgekehrt, kennt man m unabhängige Funktionen $X_1 \,..\, X_m$ der $2m$ Variabeln* (1), *welche die Identitäten* (7) *erfüllen, und in den p_i homogen nullter Ordnung sind, so lassen sich m Funktionen $P_1 \,..\, P_m$ auf eine und nur eine Weise mit Hülfe der linearen Gleichungen:*

$$\sum_1^m {}_i\, P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \equiv p_k; \quad \sum_1^m {}_i\, P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_k} \equiv 0 \quad (k = 1, 2 \,..\, m)$$

ermitteln, derart dafs die Identität (2) *stattfindet.*

Diese beiden Sätze folgen unmittelbar aus den Entwickelungen von Kap. IX, § 1 und 2 (vgl. auch Art. 239 und 241).

6) *Für jeden Index ν der Reihe* $1, 2, \,..\, m - 1$ *bilden die partiellen Differentialgleichungen*

$$(8) \qquad (f)_0 = 0,\ (X_1, f) = 0,\ (X_2, f) = 0,\ ..\ (X_\nu, f) = 0$$

ein $\nu + 1$-gliedriges vollständiges System.

Dies folgt ebenfalls unmittelbar aus Kap. IX, § 2, da ja die Gleichungen (8) in der Terminologie dieses Kapitels nichts anderes als das „vollständige System V_ν" darstellen. Doch wollen wir für diesen Satz noch zwei weitere Beweise aufstellen.

274. Wir zeigen zunächst die lineare Unabhängigkeit der Gleichungen (8). Aus der Unabhängigkeit der ν Funktionen $X_1 \,..\, X_\nu$ folgt vor allem, dafs die ν letzten Gleichungen (8) für sich linear unabhängig sind. Es ist also nur noch nachzuweisen, dafs der Ausdruck $(f)_0$ keine Linearkombination der Ausdrücke (X_i, f) sein kann. Hätte man identisch:

$$-(f)_0 \equiv \sum_1^\nu {}^h \varrho_h (X_h, f),$$

so würde folgen:

$$0 \equiv \sum_1^\nu {}^h \varrho_h \frac{\partial X_h}{\partial p_k}; \quad p_k \equiv \sum_1^\nu \varrho_h \frac{\partial X_h}{\partial x_k},$$

und hieraus:

$$\sum_1^m {}^k p_k \, d x_k \equiv \sum_1^\nu \varrho_h d X_h,$$

was nur für $\nu = m$, $\varrho_h \equiv P_h$ möglich ist. Zugleich erkennen wir, daſs im Falle $\nu = m$ die erste Gleichung (8) wirklich eine Folge der übrigen ist, welch' letztere linear unabhängig sind.

275. Schreiben wir:

$$Y_i f \equiv (X_i, f),$$

so nimmt die Jacobi'sche Identität:

$$(X_i(X_k, f)) + (X_k(f, X_i)) + (f(X_i X_k)) \equiv 0$$

mit Rücksicht auf (7) folgende Form an:

$$Y_i(Y_k f) - Y_k(Y_i f) = 0.$$

Daraus folgt zunächst:

Genügen ν unabhängige Funktionen $X_1 \ldots X_\nu$ der Variabeln (1) *den Bedingungen*

$$(9) \qquad (X_r X_s) \equiv 0 \quad (r, s = 1, 2 \ldots \nu),$$

so bilden die partiellen Differentialgleichungen:

$$(X_1, f) = 0, \ldots (X_\nu, f) = 0$$

ein ν-gliedriges Jacobi'sches System.

Dieser Satz gilt offenbar ganz unabhängig davon, daſs die X_i in den p_k homogen nullter Ordnung sind.

Ist aber die letztere Bedingung erfüllt, so erhält die in Art. 271 unter (43) angegebenen Identität, auf die Funktionen X_i und f angewendet, folgende Form:

$$(X_i(f)_0) + (f, X_i) \equiv ((X_i, f))_0$$

oder also, wenn wir Af statt $(f)_0$ und wiederum $Y_i f$ statt (X_i, f) schreiben:

$$A(Y_i f) - Y_i(Af) \equiv - Y_i f,$$

eine Identität, die sich auch auf's leichteste direkt aus den Homogenitätseigenschaften der Funktion X_i erschlieſsen läſst.

Die Vollständigkeit des Systems (8) ist damit bewiesen.

276. Ein dritter Beweis des Satzes 6) folgt aus nachstehender Eigenschaft des Symbols (φf):

Führt man in den Ausdruck (φf) *statt der Variabeln* (1) *vermöge der homogenen Berührungstransformation* (4) *die neuen Independenten* X_ι, P_ι *ein, so hat man identisch:*

$$\sum_1^m{}_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial P_\iota}\frac{\partial f}{\partial X_\iota} - \frac{\partial \varphi}{\partial X_i}\frac{\partial f}{\partial P_i}\right) \equiv \sum_1^m{}_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_\iota}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_\iota}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)$$

oder, in leicht verständlicher Bezeichnungsweise:

$$(\varphi f)_{XP} \equiv (\varphi f)_{xp},$$

m. a. W. *das Klammersymbol* (φf) *bleibt bei jeder homogenen Berührungstransformation invariant.*[1])

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge von Art. 262, da ja die linke Seite der Identität (2) eine Normalform des Pfaff'schen Ausdrucks ∇' darstellt.

Nun hat man offenbar:

$$(P_i X_i)_{XP} \equiv 1;\ (P_i X_k)_{XP} \equiv (P_i P_k)_{XP} \equiv (X_i X_k)_{XP} \equiv 0$$
$$(i, k = 1, 2 \,..\, m;\quad i \gtrless k),$$

und es ergiebt sich somit auf's neue der Satz 4), sowie folgendes Theorem:

7) *Erfüllen die Funktionen* X_i, P_ι *die Identität* (2), *so gelten die Beziehungen*

(10) $$(P_i X_i) \equiv 1;\ (P_\iota X_k) \equiv (P_i P_k) \equiv 0$$
$$(i, k = 1, 2, \,..\, m;\ i \gtrless k).$$

Darnach erfüllen die Funktionen:

$$X_1 X_2 \,..\, X_m,\ P_{\nu+1},\ P_{\nu+2},\ ..\ P_m$$

die partiellen Differentialgleichungen $(X_1 f) = 0 \,..\, (X_\nu f) = 0$. Da nun die Funktionen

1) Offenbar gilt auch der etwas allgemeinere Satz: Wenn die Formeln

$$z' = z + U(x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m);\ x_i' = X_i,\ p_i = P_i$$

eine Berührungstransformation von der in Art. 201 erklärten Beschaffenheit darstellen, so besteht die Identität:

$$(\varphi f)_{xp} \equiv (\varphi f)_{XP}.$$

$$X_1 \cdot\cdot X_m, \frac{P_{\nu+2}}{P_{\nu+1}} \cdot\cdot \frac{P_m}{P_{\nu+1}}$$

in den p_ι homogen nullter Ordnung sind, so stellen sie $2m - \nu - 1$ unabhängige Integrale der $\nu + 1$ partiellen Differentialgleichungen (8) dar; diese bilden also wirklich ein vollständiges System. Im Falle $\nu = m - 1$ sind die Funktionen $X_1 \,..\, X_m$ die unabhängigen Lösungen des Systems (8).

277. Die vorstehenden Ergebnisse wurden mit Hülfe der allgemeinen Theorie des Pfaff'schen Problems gewonnen; dieselben Resultate in etwas anderer Reihenfolge lassen sich aber auch, ohne Bezugnahme auf die früheren Kapitel, durch direkte Betrachtung der Identität:

$$(11) \quad P_1 dX_1 + P_2 dX_2 + \cdots + P_m dX_m \equiv p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_m dx_m$$

ableiten. Aus dieser Identität folgen nämlich die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} &(12) \qquad \sum_1^m {}_s\, P_s \frac{\partial X_s}{\partial x_i} \equiv p_i \\ &(13) \qquad \sum_1^m {}_s\, P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_i} \equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1 \,..\, m).$$

Wir differentiiren die i^{te} Identität (12) nach p_k, und die k^{te} Identität (13) nach x_i und subtrahiren die so entstehenden beiden Relationen. Ebenso differentiiren wir die i^{te} Relation (12) nach x_k und die k^{te} Relation (12) nach x_i und subtrahiren; endlich differentiiren wir die i^{te} Gleichung (13) nach p_k und die k^{te} nach p_i und subtrahiren. Dadurch erhalten wir der Reihe nach:

$$(14) \quad \begin{cases} c_{ik} \equiv \sum_1^m {}_s \left(\frac{\partial P_s}{\partial p_k} \frac{\partial X_s}{\partial x_i} - \frac{\partial P_s}{\partial x_i} \frac{\partial X_s}{\partial p_k} \right) \equiv \delta_{ik} \qquad \text{(pag. 354)} \\ a_{ik} \equiv \sum_1^m {}_s \left(\frac{\partial P_s}{\partial x_k} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} - \frac{\partial P_s}{\partial x_i} \frac{\partial X_s}{\partial x_k} \right) \equiv 0 \\ b_{ik} \equiv \sum_1^m {}_s \left(\frac{\partial P_s}{\partial p_k} \frac{\partial X_s}{\partial p_i} - \frac{\partial P_s}{\partial p_i} \frac{\partial X_s}{\partial p_k} \right) \equiv 0 \end{cases}$$

$$(i, k = 1, 2, \,..\, m).$$

Wir betrachten jetzt die Funktionaldeterminante der $2m$ Funktionen $X_i P_i$:

$$D \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial X_m}{\partial x_1} & \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial P_m}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_m} & \cdot\cdot & \frac{\partial X_m}{\partial x_m} & \frac{\partial P_1}{\partial x_m} & \cdot\cdot & \frac{\partial P_m}{\partial x_m} \\ \frac{\partial X_1}{\partial p_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial X_m}{\partial p_1} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial P_m}{\partial p_1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial X_1}{\partial p_m} & \cdot\cdot & \frac{\partial X_m}{\partial p_m} & \frac{\partial P_1}{\partial p_m} & \cdot\cdot & \frac{\partial P_m}{\partial p_m} \end{vmatrix}.$$

Es sei D' diejenige Determinante, die aus D entsteht, indem man zunächst die X_ι durch $-X_\iota$ ersetzt, und hinterher die linke Hälfte des Schemas mit der rechten vertauscht. Dann ist $D' \equiv D$ und durch zeilenweise Komposition der beiden Determinanten ergiebt sich folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1m} & c_{11} & \cdot\cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot\cdot & a_{mm} & c_{m1} & \cdot\cdot & c_{mm} \\ -c_{11} & \cdot\cdot & -c_{1m} & b_{11} & \cdot\cdot & b_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ -c_{m1} & \cdot\cdot & -c_{mm} & b_{m1} & \cdot\cdot & b_{mm} \end{vmatrix},$$

die wegen (14) den Wert 1 besitzt. Daraus folgt:

$$DD' \equiv D^2 \equiv 1, \; D = \varepsilon,$$

worin ε die positive oder negative Einheit bedeutet. Damit ist zunächst Satz 1) bewiesen. Bezeichnen wir jetzt mit

$$(-1)^{\iota+k} D_{k i}$$

diejenige $2m - 1$-reihige Determinante, deren Elementensystem aus D durch Streichung der i^{ten} Zeile und k^{ten} Spalte entsteht, so folgt nach bekannten Determinantensätzen:

$$(15) \quad \begin{cases} \sum_1^m {}_s \frac{\partial X_s}{\partial x_i} D_{sk} + \sum_1^m {}_s \frac{\partial P_s}{\partial x_i} D_{m+s,k} \equiv \varepsilon \delta_{\iota k} \\ \sum_1^m {}_s \frac{\partial X_s}{\partial p_i} D_{sk} + \sum_1^m {}_s \frac{\partial P_s}{\partial p_i} D_{m+s,k} \equiv 0 \\ \qquad (i = 1 \,..\, m;\; k \leqq m). \end{cases}$$

Dies sind $2m$ nicht homogene lineare Gleichungen zur Bestimmung der $2m$ Unbekannten:

$$D_{1k} D_{2k} \,..\, D_{2m,k}.$$

Der Vergleich mit den Formeln (14) lehrt sofort, dafs identisch,

$$(16)\qquad D_{sk} \equiv \varepsilon \frac{\partial P_s}{\partial p_k};\ D_{m+s,\,k} \equiv -\,\varepsilon \frac{\partial X_s}{\partial p_k} \qquad (s, k = 1, 2 \,..\, m).$$

Auf ganz analoge Weise erhält man:

$$(17)\qquad D_{s,\,m+k} = -\,\varepsilon \frac{\partial P_s}{\partial x_k},\quad D_{m+s,\,m+k} = \varepsilon \frac{\partial X_s}{\partial x_k}.$$

Andererseits aber folgt aus der Bedeutung der D_{ik} sofort, dafs identisch folgende Beziehungen stattfinden:

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\sum_1^m{}_s \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_s} D_{ks} + \frac{\partial X_i}{\partial p_s} D_{k,\,m+s}\right) \equiv \varepsilon\,\delta_{ik}\\
&\sum_1^m{}_s \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_s} D_{m+k,\,s} + \frac{\partial X_i}{\partial p_s} D_{m+k,\,m+s}\right) \equiv 0\\
&\sum_1^m{}_s \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_s} D_{ks} + \frac{\partial P_i}{\partial p_s} D_{k,\,m+s}\right) \equiv 0\\
&\sum_1^m{}_s \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_s} D_{m+k,\,s} + \frac{\partial P_i}{\partial p_s} D_{m+k,\,m+s}\right) \equiv \varepsilon\,\delta_{ik}\\
&\qquad\qquad (i, k = 1 \,..\, m).
\end{aligned}\right.$$

Mit Rücksicht auf (16) (17) schreiben sich diese Relationen:

$$(19)\qquad (P_i X_k) \equiv \delta_{ik},\ (X_i X_k) \equiv (P_i P_k) \equiv 0 \qquad (i, k = 1 \,..\, m).$$

Hiermit sind die Sätze 4) und 7) als richtig erkannt.

Multipliziren wir jetzt die Relationen (12) bez. mit $\frac{\partial X_t}{\partial p_i}$, die Relationen (13) mit $-\frac{\partial X_t}{\partial x_i}$ und addiren die so erhaltenen $2m$ Gleichungen, so folgt:

$$\sum p_i \frac{\partial X_t}{\partial p_i} \equiv \sum_1^{m}{}_s P_s (X_t X_s) \equiv 0,$$

womit Satz 2) nachgewiesen ist. Zugleich aber erkennt man die Richtigkeit von Satz 5). In der That, der Rang der Matrix:

$$(20)\qquad \left\|\begin{matrix}
p_1 & .. & p_n & 0 & .. & 0\\
\frac{\partial X_1}{\partial x_1} & .. & \frac{\partial X_1}{\partial x_m} & \frac{\partial X_1}{\partial p_1} & .. & \frac{\partial X_1}{\partial p_m}\\
. & .. & . & . & .. & .\\
\frac{\partial X_m}{\partial x_1} & .. & \frac{\partial X_m}{\partial x_m} & \frac{\partial X_m}{\partial p_1} & .. & \frac{\partial X_m}{\partial p_m}
\end{matrix}\right\|$$

ist offenbar nicht $< m$, da sonst die X_ι nicht unabhängig wären, aber auch nicht $> m$, da die Bedingungen

$$\sum_1^m {}_i\, p_i \frac{\partial X_k}{\partial x_\iota} = 0, \ (X_k X_s) = 0 \qquad (k, s = 1 \,..\, m)$$

erfüllt sind, und mithin die Gleichungen:

$$\sum p_s \xi_s = 0, \ \sum_1^m {}_s \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_s} \xi_s + \frac{\partial X_i}{\partial p_s} \xi_{m+s} \right) = 0 \qquad (i = 1 \,..\, m)$$

m linear unabhängige Lösungensysteme $\xi_1 \,..\, \xi_{2m}$ besitzen.

Da ferner der Rang der Matrix (20) durch Weglassung der ersten Zeile sich nicht ändert, so besitzen die linearen nicht homogenen Gleichungen (12) (13) in der That ein und nur ein Lösungensystem $P_1 P_2 \,..\, P_m$ (Art. 14).

Multipliziren wir die Gleichungen (12) mit $\frac{\partial P_t}{\partial p_i}$, und die Gleichungen (13) mit $-\frac{\partial P_t}{\partial x_i}$, so folgt mit Rücksicht auf (19) durch Addition die Identität:

$$\sum p_i \frac{\partial P_t}{\partial p_i} \equiv P_t,$$

also die Richtigkeit des Satzes 3).

Der Satz 6) folgt jetzt hinterher wie in Art. 275 oder 276.

278. Wir haben, ausgehend von den Identitäten (12) (13), die Relationen:

$$(19) \qquad (P_i X_k) \equiv \delta_{ik}; \ (X_i X_k) \equiv (P_i P_k) \equiv 0 \qquad (i, k = 1 \,..\, m),$$

$$(21) \qquad \sum p_s \frac{\partial X_i}{\partial p_s} \equiv 0, \quad \sum p_s \frac{\partial P_i}{\partial p_s} = P_i \qquad (i = 1 \,..\, m)$$

abgeleitet. Offenbar kann man auch umgekehrt von diesen Relationen ausgehend, die Identitäten (12) (13) wiedergewinnen. In der That, ist D'' diejenige Determinante, die aus D entsteht, indem man zunächst alle Elemente der oberen Hälfte mit -1 multiplizirt, und dann die obere mit der untern Hälfte vertauscht, so entsteht durch spaltenweise Komposition von D und D'' wieder die Gleichung $D = \varepsilon$. Aus den identischen Relationen (18) ergeben sich jetzt durch Vergleichung mit (19) die Beziehungen (16) (17); die Gleichungen (15) und die analogen für $k > m$ liefern dann sofort die Beziehungen (14); aus den Relationen (21) folgt schliefslich durch geeignete Multiplikationen und Additionen das Formelnsystem (12) (13).

Darnach können wir so resumiren:

Befriedigen $2m$ *Funktionen* X_ι, P_ι *die Identität:*

$$(22)\qquad P_1 dX_1 + \cdots + P_m dX_m \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m,$$

so sind sie unabhängig und erfüllen die Bedingungen (19) (21).

Dieser Satz gestattet zweierlei Umkehrungen:

a) *Befriedigen* m *unabhängige Funktionen* $X_1 \,..\, X_m$ *der Variabeln* $x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m$ *die Bedingungen:*

$$\sum p_s \frac{\partial X_\iota}{\partial p_s} \equiv 0,\ (X_i X_k) \equiv 0 \qquad (i, k = 1 \,..\, m),$$

so giebt es ein und nur ein System von Funktionen $P_1 \,..\, P_m$, *die der Identität* (22) *genügen.*

b) *Befriedigen* $2m$ *Funktionen* $X_i P_\iota$ *die Identitäten* (19) (21), *so sind sie unabhängig und erfüllen die Identität* (22).

Durch die Relationen (19) (21) sind also die $X_\iota P_\iota$ als die rechten Seiten einer endlichen, homogenen Berührungstransformation vollständig charakterisirt; man nennt daher diese Relationen die *„Definitionsgleichungen der endlichen homogenen Berührungstransformation“.*

279. Nach a) erfordert die Bestimmung einer homogenen Berührungstransformation diejenige der Funktionen $X_1 \,..\, X_m$ und aufserdem noch die Auflösung linearer Gleichungen. Sind $X_1 \,..\, X_\nu$ bereits so bestimmt, dafs die Bedingungen:

$$\sum p_s \frac{\partial X_i}{\partial p_s} \equiv 0,\ (X_i X_k) \equiv 0 \qquad (i, k = 1, 2 \,..\, \nu)$$

erfüllt sind, so mufs für $X_{\nu+1}$ ein beliebiges, von $X_1 \,..\, X_\nu$ unabhängiges Integral des $\nu + 1$-gliedrigen vollständigen Systems (8) genommen werden; dies erfordert eine Operation $2m - 2\nu - 1$, da das System (8) die bekannten Lösungen $X_1 \,..\, X_\nu$ zuläfst. Für X_1 kann man eine beliebige Funktion von $x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m$ wählen, die in den p homogen nullter Ordnung ist.

Die Bestimmung der allgemeinsten homogenen Berührungstransformation

$$x_i' = X_i,\ p_i' = P_i$$

erfordert also bei willkürlich vorgeschriebenem X_1 *noch je eine Operation*

$$2m - 3,\ 2m - 5,\ ..\ 3,\ 1.$$

Dieser Satz ist offenbar in den Ergebnissen von Kap. IX, § 1 als Spezialfall enthalten.

280. Aus den Relationen (19) folgt ein neuer Beweis für den zu Anfang der Nr. 276 aufgestellten Satz. In der That, führt man in

das Symbol (φf) vermöge der homogenen Berührungstransformation (4) die neuen Independenten $X_i P_i$ ein, so folgt leicht:

$$(\varphi f)_{xp} \equiv \sum\sum \frac{\partial \varphi}{\partial X_i}\frac{\partial f}{\partial X_k}(X_i X_k) + \sum\sum \frac{\partial \varphi}{\partial X_i}\frac{\partial f}{\partial P_k}(X_i P_k)$$
$$+ \sum\sum \frac{\partial \varphi}{\partial P_i}\frac{\partial f}{\partial X_k}(P_i X_k) \equiv (\varphi f)_{XP}.$$

§ 2. Die Definitionsgleichungen der endlichen, nichthomogenen Berührungstransformationen.

281. Unter einer Berührungstransformation der Variabeln

$$z, x_1 \dots x_m p_1 \dots p_m$$

verstanden wir in Art. 195 eine Transformation:

$$(1)\qquad \begin{cases} z' = Z\,(z, x_1 \dots x_m p_1 \dots p_m) \\ x_i' = X_i(z, x_1 \dots x_m p_1 \dots p_m) \\ p_i' = P_i(z, x_1 \dots x_m p_1 \dots p_m) \end{cases} \qquad (i = 1 \dots m),$$

deren rechte Seiten einer Identität der Form:

$$(2)\quad dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_m dX_m \equiv \varrho\,(dz - p_1 dx_1 - \dots - p_m dx_m).$$

Dabei verschwindet die mit ϱ bezeichnete Funktion der Variabeln $z, x_i p_i$ nicht identisch, da andernfalls, wie man leicht sieht, die Funktionen $Z, X_1 \dots X_m$ nicht unabhängig wären.

Umgekehrt, genügen $2m+1$ Funktionen Z, X_i, P_i der Variabeln $z, x_k p_k$ der Identität (2), in der ϱ nicht identisch null ist, so besitzen sie nach der allgemeinen Theorie des Pfaff'schen Problems folgende Eigenschaften:

1) *Sie sind von einander unabhängig.* Denn der Pfaff'sche Ausdruck $\varrho\nabla$, wo $\nabla \equiv dz - \Sigma p_i dx_i$ gesetzt ist, besitzt die Klasse $2m+1$ (Art. 99, Schlufsbemerkung), und die linke Seite von (2) ist eine Normalform desselben.

2) *Die Funktionen $Z, X_1 \dots X_m$ genügen den Relationen:*

$$(3)\qquad [ZX_i] \equiv 0;\ [X_i X_k] \equiv 0 \qquad (i, k = 1 \dots m),$$

wenn gesetzt wird

$$(4)\ [\varphi f] \equiv -[f\varphi] \equiv \sum_1^m{}_s \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial p_s}\left(\frac{\partial f}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \right\}.$$

Dies folgt aus Kap. IX, § 1, 2, oder auch aus Art. 242 Satz 3), wenn man bedenkt, daſs der Pfaff'sche Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho}\,dZ - \frac{P_1}{\varrho}\,dX_1 - \cdots - \frac{P_m}{\varrho}\,dX_m$$

eine reduzirte Form von ∇ mit $m+1$ Differentialelementen darstellt, und daſs das Klammersymbol (4) zu ∇ in derselben Beziehung steht, wie das in Kap. IX erklärte allgemeinere Symbol $[\varphi f]$ zu einem beliebigen Pfaff'schen Ausdruck ungerader Klasse.

3) *Kennt man* $m+1$ *unabhängige Funktionen* $Z, X_1 \dots X_m$ *der Variabeln* $z x_i p_i$, *die den Bedingungen* (3) *genügen, so lassen sich die Funktionen* ϱ, $P_1 \dots P_m$ *auf eine und nur eine Weise so bestimmen, daſs die Identität* (2), *oder, was dasselbe besagt, die Beziehungen:*

$$(5)\qquad \frac{\partial Z}{\partial z} - P_1\frac{\partial X_1}{\partial z} - \cdots - P_m\frac{\partial X_m}{\partial z} \equiv \varrho;$$

$$(6)\qquad \frac{\partial Z}{\partial x_i} - P_1\frac{\partial X_1}{\partial x_i} - \cdots - P_m\frac{\partial X_m}{\partial x_i} \equiv -\varrho p_i \quad (i=1\,..\,m)$$

$$(7)\qquad \frac{\partial Z}{\partial p_i} - P_1\frac{\partial X_1}{\partial p_i} - \cdots - P_m\frac{\partial X_m}{\partial p_i} \equiv 0 \qquad (i=1\,..\,m)$$

stattfinden.

Dies ist wiederum eine einfache Konsequenz der Entwickelungen des Kap. IX (Art. 242, Satz 3)).

4) *Für jeden Index* ν *der Reihe* $1\,..\,m-1$ *bilden die partiellen Differentialgleichungen:*

$$(8)\qquad [Zf]=0,\ [X_i f]=0 \qquad (i=1,\dots\nu)$$

ein $\nu+1$-*gliedriges vollständiges System*, wie aus Kap. IX unmittelbar folgt. Unter der Annahme $\nu=m$ dagegen reduziren sich die partiellen Differentialgleichungen (8) offenbar auf nur m linear unabhängige, die ein vollständiges System mit den unabhängigen Lösungen $Z, X_1 \dots X_m$ bilden.

282. In Analogie mit dem vorigen § wollen wir den Satz 4) noch auf zwei andere Arten begründen, und zu diesem Zwecke zunächst die lineare Unabhängigkeit der $\nu+1$ partiellen Differentialgleichungen (8) für den Fall $\nu<m$ nachweisen. Wir definiren zu diesem Zweck zur Abkürzung das Differentiationssymbol $\frac{d}{dx_i}$ folgendermaſsen:

$$\frac{d}{dx_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial}{\partial z},$$

und bilden die Matrix:

$$(9)\qquad \left\|\begin{array}{cccccccc} \frac{dZ}{dx_1} & \frac{dZ}{dx_2} & \cdot\cdot & \frac{dZ}{dx_m} & \frac{\partial Z}{\partial p_1} & \frac{\partial Z}{\partial p_2} & \cdot\cdot & \frac{\partial Z}{\partial p_m} \\ \frac{dX_1}{dx_1} & \frac{dX_1}{dx_2} & \cdot\cdot & \frac{dX_1}{dx_m} & \frac{\partial X_1}{\partial p_1} & \frac{\partial X_1}{\partial p_2} & \cdot\cdot & \frac{\partial X_1}{\partial p_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{dX_m}{dx_1} & \frac{dX_m}{dx_2} & \cdot\cdot & \frac{dX_m}{dx_m} & \frac{\partial X_m}{\partial p_1} & \frac{\partial X_m}{\partial p_2} & \cdot\cdot & \frac{\partial X_m}{\partial p_m} \end{array}\right\| .$$

Verschwänden alle $\nu + 1$-reihigen Determinanten dieser Matrix, so gäbe es $\nu + 1$ Funktionen $\varrho_0 \varrho_1 \cdot\cdot \varrho_\nu$, die nicht alle verschwinden und den Identitäten:

$$(10)\ \varrho_0 \frac{dZ}{dx_i} + \sum_1^\nu \varrho_s \frac{dX_s}{dx_i} \equiv 0;\ \varrho_0 \frac{\partial Z}{\partial p_i} + \sum_1^\nu \varrho_s \frac{\partial X_s}{\partial p_i} \equiv 0 \quad (i = 1 \,.\,.\, m)$$

genügen. Setzt man jetzt:

$$\sigma \equiv \varrho_0 \frac{\partial Z}{\partial z} + \sum_1^\nu \varrho_s \frac{\partial X_s}{\partial z},$$

so folgt, indem man die Gleichungen (10) mit dx_i, bezw. dp_i multiplizirt und addirt:

$$(11)\ \varrho_0 dZ + \varrho_1 dX_1 + \cdot\cdot + \varrho_\nu dX_\nu \equiv \sigma(dz - p_1 dx_1 - \cdot\cdot - p_m dx_m).$$

Wäre $\sigma \equiv 0$, so wären die Funktionen $Z, X_1 \,.\,.\, X_\nu$, entgegen der Voraussetzung, nicht unabhängig. Hätte man aber $\sigma \not\equiv 0$, so könnte die Identität (11) nach dem Grassmann'schen Theorem (Art. 118, 119) nur für $\nu = m$ bestehen.

Damit ist für $\nu < m$ die lineare Unabhängigkeit der Gleichungen (8) nachgewiesen.

Betrachtet man nun die Identitäten (3), und setzt:

$$[Zf] \equiv Y_0 f;\ [X_i f] \equiv Y_i f,$$

so läfst sich die Mayer'sche Identität (Art. 268):

$$[X_i[Zf]] + [Z[fX_i]] + [f[X_i Z]] \equiv$$
$$\equiv \frac{\partial X_i}{\partial z}[Zf] + \frac{\partial Z}{\partial z}[fX_i] + \frac{\partial f}{\partial z}[X_i Z]$$

folgendermafsen schreiben:

$$Y_i(Y_0 f) - Y_0(Y_i f) \equiv \frac{\partial X_i}{\partial z} \cdot Y_0 f - \frac{\partial Z}{\partial z} Y_i f.$$

Ebenso erhält man:

$$Y_i(Y_k f) - Y_k(Y_i f) \equiv \frac{\partial X_i}{\partial z} Y_k f - \frac{\partial X_k}{\partial z} Y_i f,$$

womit Satz 4) bewiesen ist.

283. Um einen zweiten Beweis für diesen Satz zu gewinnen, wollen wir zunächst eine wichtige Eigenschaft des Klammersymbols $[\varphi f]$ ableiten. Es sei

$$\varDelta \equiv \sum_1^n {}^i a_i(x_1 x_2 \ldots x_n) dx_i$$

ein Pfaff'scher Ausdruck der Klasse $2\lambda - 1$, und es werde gesetzt:

$$\varDelta' \equiv \varrho(x_1 \ldots x_n) \cdot \varDelta,$$

und zwar sei ϱ so gewählt, dafs $\varDelta'$ wieder die Klasse $2\lambda - 1$ besitze (Art. 144). Endlich sollen die Funktionen Q', Q'_{ik} für $\varDelta'$ dieselbe Bedeutung haben, wie Q, Q_{ik} für den Ausdruck $\varDelta$ (Art. 222). Man erkennt dann leicht, dafs identisch:

$$Q'_{ik} = \varrho^{\lambda-1} Q_{ik}; \; Q \equiv \varrho^{\lambda} \cdot Q,$$

und infolgedessen:

$$(12) \qquad \sum_1^{2\lambda-1} {}^i \sum_1^{2\lambda-1} {}^k \frac{Q'_{ik}}{Q'} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \frac{1}{\varrho} \sum_1^{2\lambda-1} {}^i \sum_1^{2\lambda-1} {}^k \frac{Q_{ik}}{Q} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Verstehen wir jetzt unter ∇ wiederum den Pfaff'schen Ausdruck:

$$\nabla \equiv dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m,$$

und unter ϱ die in der Identität (2) vorkommende Funktion, so ergiebt sich aus der Beziehung (12) und dem Satz des Art. 263 ohne weiteres die Identität:

$$(13) \qquad [\varphi f]_{ZXP} \equiv \frac{1}{\varrho} [\varphi f]_{zxp},$$

wenn gesetzt wird:

$$[\varphi f]_{ZXP} \equiv \sum_1^m {}^i \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial P_i} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} + P_i \frac{\partial f}{\partial Z} \right) - \frac{\partial f}{\partial P_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_i} + p_i \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \right) \right\},$$

oder, mit Worten ausgedrückt: *Das Klammersymbol $[\varphi f]$ behält bis auf einen hinzutretenden Faktor ϱ seine Form, wenn man statt der Variabeln $z x_i p_i$ mittels einer beliebigen Berührungstransformation* (1) *die neuen Independenten Z, $X_i P_i$ einführt.*

Da nun identisch:

$$[Z X_i]_{ZXP} \equiv [X_i X_k]_{ZXP} \equiv [P_i P_k]_{ZXP} \equiv 0.$$

$$[P_r Z]_{ZXP} \equiv P_r, \; [P_r X_s]_{ZXP} \equiv \delta_{rs},$$

so ist Satz 2) auf's neue bewiesen, und wir haben aufserdem noch folgende Eigenschaften der Funktionen Z, $X_i P_i$ gewonnen:

5) *Genügen die Funktionen* $Z X, P_i$ *der Identität* (2), *worin* $\varrho \equiv\not\equiv 0$, *so gelten die Beziehungen:*

(14) $[P_i P_k] \equiv 0;\ [P_r X_s] \equiv \varrho \cdot \delta_{rs};\ [P_r Z] \equiv \varrho P_r \quad (r, s = 1 \, .. \, m).$

Darnach hat man auch:

$$\left[\frac{P_r}{P_s} Z\right] \equiv 0 \qquad (r, s = 1, 2 \, .. \, m),$$

und die $\nu + 1$ partiellen Differentialgleichungen (8) besitzen mithin die $2m - \nu$ unabhängigen Integrale:

$$Z, X_1 \cdots X_m, \frac{P_{\nu+2}}{P_{\nu+1}}, \frac{P_{\nu+3}}{P_{\nu+1}} \cdots \frac{P_m}{P_{\nu+1}},$$

bilden also in der That ein vollständiges System.

Indem man die Mayer'sche Identität (Art. 271) auf irgend drei der Funktionen $Z X_i P_i$ anwendet, und die Formeln (3) und (14) beachtet, folgen leicht die Beziehungen:

$$[Z\varrho] \equiv \varrho \frac{\partial Z}{\partial z} - \varrho^2, \tag{15}$$

$$[X_i \varrho] \equiv \varrho \frac{\partial X_i}{\partial z};\ [P_i \varrho] \equiv \varrho \frac{\partial P_i}{\partial z}. \tag{16}$$

284. Wir wollen schliefslich noch in Analogie zum vorigen § die wichtigsten der bisherigen Resultate direkt aus der Identität:

(17) $dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_m dX_m \equiv \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m)$

ableiten. Diese Identität zerlegt sich in die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_1^m{}_s P_s \frac{\partial X_s}{\partial z} \equiv \varrho \tag{18}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} - \sum_1^m{}_s P_s \frac{\partial X_s}{\partial x_i} \equiv -\varrho p_i \qquad (i = 1 \, .. \, m)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial p_i} - \sum_1^m{}_s P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_i} \equiv 0 \qquad (i = 1 \, .. \, m). \tag{19}$$

Aus (18) (19) folgt durch Elimination von ϱ unter Gebrauch des Symbols $\frac{d}{dx_i}$ (Art. 282):

$$\frac{dZ}{dx_i} - \sum P_s \frac{dX_s}{dx_i} \equiv 0 \qquad (i = 1 \, .. \, m). \tag{20}$$

Wir üben nun auf die i^{te} Relation (20) die Operation $\frac{d}{dx_k}$, auf die k^{te} Relation (20) die Operation $\frac{d}{dx_i}$ aus und subtrahiren; ferner differentiiren wir die i^{te} Relation (20) nach p_k und die k^{te} Relation (19) mit dem Symbol $\frac{d}{dx_i}$ und subtrahiren; endlich subtrahiren wir die nach p_k abgeleitete i^{te} Relation (19) von der nach p_i abgeleiteten k^{ten} Relation (19) und erhalten so:

$$(21)\qquad \begin{cases} a_{ik} \equiv \sum_1^m {}_s \left(\dfrac{dP_s}{dx_k}\dfrac{dX_s}{dx_i} - \dfrac{dP_s}{dx_i}\dfrac{dX_s}{dx_k} \right) \equiv 0 \\ b_{ik} \equiv \sum_1^m {}_s \left(\dfrac{\partial P_s}{\partial p_k}\dfrac{\partial X_s}{\partial p_i} - \dfrac{\partial P_s}{\partial p_i}\dfrac{\partial X_s}{\partial p_k} \right) \equiv 0 \\ c_{ik} \equiv \sum_1^m {}_s \left(\dfrac{\partial P_s}{\partial p_k}\dfrac{dX_s}{dx_i} - \dfrac{dP_s}{dx_i}\dfrac{\partial X_s}{\partial p_k} \right) \equiv \varrho\,\delta_{ik} \\ (i, k = 1 \,..\, m;\ \delta_{ik} = 0;\ i \gtrless k;\ \delta_{ii} = 1). \end{cases}$$

Ferner betrachten wir die Determinante:

$$D \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{dX_1}{dx_1} & .. & \dfrac{dX_m}{dx_1} & \dfrac{dP_1}{dx_1} & .. & \dfrac{dP_m}{dx_1} \\ . & .. & . & . & .. & . \\ \dfrac{dX_1}{dx_m} & .. & \dfrac{dX_m}{dx_m} & \dfrac{dP_1}{dx_m} & .. & \dfrac{dP_m}{dx_m} \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial p_1} & .. & \dfrac{\partial X_m}{\partial p_1} & \dfrac{\partial P_1}{\partial p_1} & .. & \dfrac{\partial P_m}{\partial p_1} \\ . & .. & . & . & .. & . \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial p_m} & .. & \dfrac{\partial X_m}{\partial p_m} & \dfrac{\partial P_1}{\partial p_m} & .. & \dfrac{\partial P_m}{\partial p_m} \end{vmatrix},$$

und bezeichnen mit D' diejenige Determinante, die aus D hervorgeht, wenn man darin die X_i durch $-X_i$ ersetzt, und sodann die linke Hälfte mit der rechten vertauscht. Durch Zeilenkomposition von D, D' folgt dann wegen (21) leicht:

$$DD' \equiv D^2 \equiv \varrho^{2m};\ D = \varepsilon \varrho^m,$$

worin ε die positive oder negative Einheit bedeutet.

Wenn man nun in der Funktionaldeterminante J der $2m + 1$ Funktionen $Z, X_i P_i$:

$$J \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_m}{\partial x_1} & \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_m}{\partial x_1} & \frac{\partial Z}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial X_1}{\partial p_m} & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \frac{\partial Z}{\partial p_m} \\ \frac{\partial X_1}{\partial z} & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

zu der i^{ten} Zeile die mit p_i multiplizirte letzte Zeile addirt, so kommt dies darauf hinaus, in den m ersten Zeilen von J die Symbole $\frac{\partial}{\partial x_k}$ durch $\frac{d}{d x_k}$ zu ersetzen. Wenn man in der so umgeformten Determinante J die ersten m Spalten bez. mit $-P_1, \ldots -P_m$ multiplizirt, und zu der letzten addirt, so folgt wegen (18), (19) und (20):

$$J \equiv \varrho \cdot D \equiv \varepsilon \cdot \varrho^{m+1}.$$

Da nun ϱ der Annahme nach nicht identisch verschwindet, so ist Satz 1) nachgewiesen.

Es sei jetzt wieder

$$(-1)^{i+k} D_{ki}$$

die aus D durch Streichung der i^{ten} Zeile und k^{ten} Spalte hervorgehende Determinante. Die Theorie der Determinanten liefert dann folgende Relationen:

$$(22)\quad \begin{cases} \sum_1^m {}_s \left(\frac{d X_s}{d x_i} D_{sk} + \frac{d P_s}{d x_i} D_{m+s,k} \right) \equiv \varepsilon \varrho^m \delta_{ik} \\ \sum_1^m {}_s \left(\frac{\partial X_s}{\partial p_i} D_{sk} + \frac{\partial P_s}{\partial p_i} D_{m+s,k} \right) \equiv 0 \\ \sum_1^m {}_s \left(\frac{d X_s}{d x_i} D_{s,m+k} + \frac{d P_s}{d x_i} D_{m+s,m+k} \right) \equiv 0 \\ \sum_1^m {}_s \left(\frac{\partial X_s}{\partial p_i} D_{s,m+k} + \frac{\partial P_s}{\partial p_i} D_{m+s,m+k} \right) \equiv \varepsilon \varrho^m \delta_{ik}. \\ \qquad (s, k = 1, 2, \ldots m) \end{cases}$$

Der Vergleich mit (21) lehrt jetzt, dafs identisch:

$$(23)\quad \begin{cases} D_{sk} \equiv \varepsilon \varrho^{m-1} \frac{\partial P_s}{\partial p_k}; \; D_{m+s,k} \equiv -\varepsilon \varrho^{m-1} \frac{\partial X_s}{\partial p_k} \\ D_{s,m+k} \equiv -\varepsilon \varrho^{m-1} \frac{d P_s}{d x_k}; \; D_{m+s,m+k} \equiv \varepsilon \varrho^{m-1} \frac{d X_s}{d x_k} \\ \qquad (s, k = 1 \ldots m). \end{cases}$$

Man hat ferner die Identitäten:

$$(24)\quad \begin{cases} \text{a)}\ \sum\limits_1^m {}_s \left(\dfrac{dX_i}{dx_s} D_{ks} + \dfrac{\partial X_i}{\partial p_s} D_{k,\,m+s} \right) \equiv \varepsilon \varrho^m \delta_{ik} \\ \text{b)}\ \sum\limits_1^m {}_s \left(\dfrac{dP_i}{dx_s} D_{ks} + \dfrac{\partial P_i}{\partial p_s} D_{k,\,m+s} \right) \equiv 0 \\ \text{c)}\ \sum\limits_1^m {}_s \left(\dfrac{dX_i}{dx_s} D_{m+k,\,s} + \dfrac{\partial X_i}{\partial p_s} D_{m+k,\,m+s} \right) \equiv 0 \\ \text{d)}\ \sum\limits_1^m {}_s \left(\dfrac{dP_i}{dx_s} D_{m+k,\,s} + \dfrac{\partial P_i}{\partial p_s} D_{m+k,\,m+s} \right) \equiv \varepsilon \varrho^m \delta_{ik}. \end{cases}$$

Die Relationen a) d) liefern übereinstimmend:

$$[P_i X_k] \equiv \varrho\, \delta_{ik},$$

während sich aus b) und c) die folgenden Gleichungen ergeben:

$$[P_i P_k] \equiv [X_i X_k] \equiv 0.$$

Multiplizirt man ferner die Relationen (20) mit $-\dfrac{\partial X_k}{\partial p_i}$, die Gleichungen (19) mit $\dfrac{dX_k}{dx_i}$, und addirt die so entstehenden $2m$ Gleichungen, so folgt:

$$[Z X_k] \equiv \Sigma P_s [X_s X_k] \equiv 0.$$

Indem wir schliefslich die Relationen (20) mit $-\dfrac{\partial P_k}{\partial p_i}$, die Gleichungen (19) mit $\dfrac{dP_k}{dx_i}$ multiplizirt, so folgt durch Summation dieser $2m$ Gleichungen:

$$[Z P_k] \equiv \Sigma P_s [X_s P_k] \equiv -\varrho P_k,$$

womit die Sätze 2) und 5) bewiesen sind.

285. Um den Satz 3) nachzuweisen, bemerken wir zunächst, dafs von den $m+1$ Funktionensystemen:

$$(25)\qquad \begin{matrix} \dfrac{dZ}{dx_1} & \cdots & \dfrac{dZ}{dx_m}, & \dfrac{\partial Z}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial Z}{\partial p_m} \\ \dfrac{dX_i}{dx_1} & \cdots & \dfrac{dX_i}{dx_m}, & \dfrac{\partial X_i}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial X_i}{\partial p_m} \end{matrix} \qquad (i = 1, \ldots m)$$

immer je m linear unabhängig sein müssen, wenn die $m+1$ Funktionen $Z, X_1 \ldots X_m$ als unabhängig vorausgesetzt werden. Denn wären etwa die m ersten Systeme (25) linear abhängig, so ergäbe sich eine Identität:

$$\varrho_0 dZ + \sum_1^{m-1} {}_s\, \varrho_s dX_s \equiv \sigma(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m),$$

was im Falle $\sigma \equiv 0$ mit der vorausgesetzten Unabhängigkeit von $Z, X_1 \ldots X_m$, im Falle $\sigma \not\equiv 0$ aber, wie man leicht erkennt, mit Satz 1) in Widerspruch steht. Darnach ist der Rang der aus den Systemen (25) gebildeten Matrix $\geqq m$. Da nun die Funktionen Z, X_i den Relationen (3) genügen, so besitzen die $m+1$ linearen Gleichungen:

$$\sum_1^m \left(\xi_s \frac{dZ}{dx_s} + \xi_{m+s} \frac{\partial Z}{\partial p_s} \right) = 0, \quad \sum_1^m {}_s \left(\xi_s \frac{dX_i}{dx_s} + \xi_{m+s} \frac{\partial X_i}{\partial p_s} \right) = 0$$
$$(i = 1 \ldots m)$$

offenbar die m linear unabhängigen Lösungensysteme:

$$-\frac{\partial X_k}{\partial p_1} \cdots -\frac{\partial X_k}{\partial p_m} \; \frac{dX_k}{dx_1} \cdots \frac{dX_k}{dx_m} \qquad (k = 1 \ldots m),$$

also ist der Rang der Matrix (25) $\leqq m$; er ist daher genau $= m$ und ändert sich nicht, wenn man aus dieser Matrix die erste Zeile fortläſst. Nach Art. 14 besitzen daher die linearen Gleichungen (19) (20) ein und nur ein Lösungensystem $P_1 \ldots P_m$. Definirt man dann die Funktion ϱ durch die Gleichung (18), so gilt die Identität (17) und ϱ kann nicht null sein, da andernfalls die $2m+1$ Funktionen $Z X_i P_i$ nicht unabhängig wären. Der Satz 3) ist damit vollständig bewiesen.

286. Es seien jetzt umgekehrt $2m+2$ Funktionen ϱ, Z, X_i, P_i gegeben, die den Bedingungen

$$(26) \qquad \begin{cases} [X_i X_k] \equiv [P_i P_k] \equiv 0; \; [P_i X_k] \equiv \varrho\, \delta_{ik} \\ [Z X_i] \equiv 0; \; [P_i Z] \equiv \varrho P_i \qquad (i, k = 1, 2 \ldots m) \end{cases}$$

genügen; die Funktion ϱ verschwinde nicht identisch.

Bezeichnet jetzt D'' diejenige Determinante, die aus D dadurch entsteht, daſs man darin alle Elemente der obern Hälfte mit dem negativen Zeichen versieht, und dann die obere Hälfte mit der untern vertauscht, so ergiebt sich durch spaltenweise Komposition der beiden Schemata D und D'' für D wieder der Wert $\varepsilon \varrho^m$. Aus den identischen Relationen (24) folgen für die D_{ik} durch Vergleichung mit (26) die Werte (23), worauf die Relationen (22) ohne weiteres das Gleichungensystem (21) ergeben.

Nun hat man vermöge (26):

$$\sum_1^m{}_s [P_s Z] \frac{\partial X_s}{\partial p_i} - \sum_1^m{}_s [X_s Z] \frac{\partial P_s}{\partial p_i} \equiv \varrho \sum_1^m{}_s P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_i}$$

$$\sum_1^m{}_s [P_i Z] \frac{d X_s}{d x_i} - \sum_1^m{}_s [X_s Z] \frac{d P_s}{d x_i} \equiv \varrho \sum_1^m{}_s P_s \frac{d X_s}{d x_i}.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind aber, wie die Ausrechnung lehrt, vermöge der Formeln (21) mit $\varrho \frac{\partial Z}{\partial p_i}$ bezw. mit $\varrho \frac{d Z}{d x_i}$ identisch, womit die Formeln (19) (20) gewonnen sind. Diese Formeln zeigen, dafs die Identität

$$dZ - \sum P_i dX_i \equiv \left(\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum P_i \frac{\partial X_i}{\partial z}\right)\left(dx - \sum p_i dx_i\right)$$

stattfindet, und aus Satz 5) und den Identitäten (14) folgt jetzt unmittelbar, dafs die in den Formeln (26) auftretende Funktion ϱ durch die Gleichung (18) definirt ist.

Darnach lassen sich die bisherigen Resultate so zusammenfassen: *Befriedigen $2m+1$ Funktionen Z, X_i, P_i der Variabeln*

$$z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m$$

eine Identität der Form:

(2) $dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_m dX_m \equiv \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m),$

worin $\varrho(z \ldots p_m)$ nicht identisch verschwindet, so sind sie von einander unabhängig, und es bestehen die Beziehungen:

$$(26) \qquad \begin{cases} [ZX_i] \equiv [X_i X_k] \equiv 0 \\ [P_i P_k] \equiv 0;\ [P_i X_k] \equiv \varrho\,\delta_{ik};\ [P_i Z] \equiv \varrho P_i, \end{cases}$$

$$(27) \qquad [Z\varrho] \equiv \varrho \frac{\partial Z}{\partial z} - \varrho^2;\ [X_i \varrho] \equiv \varrho \frac{\partial X_i}{\partial z};\ [P_i \varrho] \equiv \varrho \frac{\partial P_i}{\partial z}$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots m).$$

Dieser Satz gestattet eine doppelte Umkehrung:

a) *Kennt man $m+1$ unabhängige Funktionen $Z, X_1 \ldots X_m$, welche die Relationen*

(3) $\qquad [ZX_i] \equiv 0,\ [X_i X_k] \equiv 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots m)$

erfüllen, so lassen sich auf eine und nur eine Weise $m+1$ weitere Funktionen $\varrho, P_1 \ldots P_m$ so bestimmen, dafs die Identität (2) stattfindet.

b) *Kennt man $2m+2$ Funktionen Z, X_i, P_i, ϱ, von denen keine identisch verschwindet, und welche die Relationen (26) (und infolgedessen auch (27)) erfüllen, so besteht zwischen ihnen die Identität (2).*

Die Gleichungen (26) heifsen die „*Definitionsgleichungen der endlichen, nicht homogenen Berührungstransformationen*“, da sie nach dem Vorigen die Funktionen Z, $X_i P_i$ als die rechten Seiten einer Berührungstransformation vollständig charakterisiren.

287. Sind von den rechten Seiten einer Berührungstransformation:

$$z' = Z;\ x_i' = X_i;\ p_i' = P_i \tag{28}$$

die Funktionen $Z, X_1 \ldots X_\nu$ bereits so bestimmt, dafs die Relationen

$$[ZX_i] \equiv [X_i X_k] \equiv 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

alle erfüllt sind, so ist für $X_{\nu+1}$ ein beliebiges, von $Z, X_1 \ldots X_\nu$ unabhängiges Integral des $\nu + 1$-gliedrigen vollständigen Systems:

$$[Zf] = 0,\ [X_1 f] = 0 \ldots [X_\nu f] = 0 \tag{8}$$

zu wählen, was eine Operation $2m - 2\nu - 1$ erfordert, da $Z, X_1 \ldots X_\nu$ bekannte Integrale dieses Systems sind.

Die Aufstellung der allgemeinsten Berührungstransformation erfordert also, wenn Z willkürlich vorgeschrieben wird, je eine Operation:

$$2m - 1,\ 2m - 3, \ldots 3, 1.$$

Natürlich kann man ebenso gut etwa X_1 willkürlich annehmen. In der That ist ja die in der Identität (2) auftretende Funktion Z vor den X_i in keiner Weise ausgezeichnet; denn dividirt man diese Identität durch $-P_1$, so entsteht eine Relation, in der X_1 die Rolle von Z übernommen hat.

288. Man kann aber auch ϱ willkürlich annehmen, und sodann die Funktionen Z, X_i, P_i so bestimmen, dafs die Identität (2) stattfindet. Es gilt nämlich folgender Satz:

Ist ϱ eine beliebig vorgeschriebene, nicht identisch verschwindende Funktion der Variabeln $z x_i p_i$, und bedeuten $X_1 \ldots X_\nu$ $(\nu \leqq m)$ unabhängige Funktionen derselben Variabeln, die den Identitäten:

$$[X_i \varrho] \equiv \varrho \frac{\partial X_i}{\partial z};\ [X_i X_k] \equiv 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \nu) \tag{29}$$

genügen, so bilden die partiellen Differentialgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} Y_0 f &\equiv [\varrho f] + \varrho \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ Y_i f &\equiv [X_i f] \qquad\quad = 0 \end{aligned}\right. \qquad (i = 1 \ldots \nu) \tag{30}$$

ein $\nu + 1$-gliedriges vollständiges System.

Dafs die Gleichungen (30) linear unabhängig sind, folgt leicht daraus, dafs andernfalls entweder die ν letzten derselben, entgegen den

Resultaten des Art. 282, für sich linear abhängig wären, oder dafs ϱ identisch verschwände.

Man hat ferner:

$$(31)\qquad \begin{cases} Y_i(Y_0 f) \equiv [X_i[\varrho f]] + \left[X_i, \varrho \frac{\partial f}{\partial z}\right] \\ Y_0(Y_i f) \equiv [\varrho [X_i f]] + \varrho \frac{\partial}{\partial z}[X_i f]; \end{cases}$$

beachtet man nun, dafs identisch:

$$\frac{\partial}{\partial z}[X_i f] \equiv \left[\frac{\partial X_i}{\partial z}, f\right] + \left[X_i, \frac{\partial f}{\partial z}\right]$$

$$[\varphi, \varrho\psi] \equiv \varrho[\varphi\psi] + \psi[\varphi\varrho],$$

so folgt mit Rücksicht auf die Mayer'sche Identität durch Subtraktion der beiden Gleichungen (31) nach kurzer Rechnung:

$$Y_i(Y_0 f) - Y_0(Y_i f) \equiv 2\frac{\partial X_i}{\partial z} Y_0 f - \frac{\partial \varrho}{\partial z} Y_i f.$$

Da nun die ν letzten Gleichungen (30) für sich genommen ein vollständiges System bilden (Satz 4) dieses §), so ist die Vollständigkeit des Systems (30) nachgewiesen. Man wähle jetzt für $X_{\nu+1}$ ein beliebiges, von $X_1 \ldots X_\nu$ unabhängiges Integral dieses Systems, was eine Operation:

$$2m + 1 - (\nu + 1) - \nu = 2m - 2\nu$$

erfordert. Hat man solcherweise $X_1 \ldots X_m$ der Reihe nach ermittelt, so bestimme man eine Funktion Z, die den Bedingungen:

$$(32)\qquad Y_0 Z - \varrho^2 \equiv 0,\ Y_1 Z \equiv 0, \ldots Y_m Z \equiv 0$$

genügt. Zu diesem Zwecke denken wir uns Z durch die Gleichung

$$f(Z, z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = 0$$

definirt. Ist dann ξ irgend eine der Variabeln $z x_i p_i$, so hat man:

$$\frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0.$$

Substituirt man die Werte der Ableitungen $\frac{\partial Z}{\partial \xi}$ aus diesen Gleichungen in das System (32), so verwandelt sich dieses in das folgende:

$$(33)\qquad \overline{Y}f \equiv Y_0 f + \varrho^2 \frac{\partial f}{\partial Z} = 0,\ Y_1 f = 0, \ldots Y_m f = 0.$$

Diese Gleichungen bilden ein $m + 1$-gliedriges vollständiges System mit $2m + 2$ Independenten, da nämlich identisch:

$$Y_i(\overline{Y}f) - \overline{Y}(Y_i f) \equiv 2\frac{\partial X_i}{\partial z}\overline{Y}f - \frac{\partial \varrho}{\partial z} Y_i f.$$

Da ferner die Koeffizienten des Systems (33) die Independente Z nicht enthalten, und dasjenige Gleichungensystem, das aus (33) durch Weglassung des mit $\frac{\partial f}{\partial Z}$ multiplizirten Terms entsteht, wiederum vollständig ist, so besitzen die Gleichungen (33) aufser $X_1 \ldots X_m$ noch ein $m+1^{\text{tes}}$ Integral der Form:

$$-Z + \Phi(z x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m),$$

welches durch eine einzige Quadratur bestimmt wird, wenn $X_1 \ldots X_m$ bekannt sind. Alle diese Behauptungen ergeben sich durch ganz ähnliche Überlegungen wie in Nr. 145. Indem wir jetzt Z mit Φ identificiren, können wir nach Satz 3) die P_i hinterher durch Auflösung linearer Gleichungen so bestimmen, dafs die Identität (2) stattfindet, und haben damit folgenden Satz gewonnen:

„Ist ϱ eine willkürlich gewählte, nicht identisch verschwindende Funktion der $2m+1$ Variabeln $z x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m$, so erfordert die Bestimmung eines Funktionensystems $Z X_i P_i$, welches der Identität:

$$dZ - \sum_1^m {}^i P_i dX_i \equiv \varrho\left(dz - \sum_1^m p_i dx_i\right)$$

genügt, aufser Differentiationen und Eliminationen noch je eine Operation

$$2m,\ 2m-2,\ \ldots\ 4,\ 2,\ 0.$$

Auch dieser Satz folgt unmittelbar aus der allgemeinen Theorie des Pfaff'schen Problems. Man verifizirt nämlich leicht, dafs für den bedingungslosen Pfaff'schen Ausdruck

$$\varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m)$$

das vollständige System V sich auf die einzige partielle Differentialgleichung:

$$[\varrho f] + \varrho \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

reduzirt, und dafs das vollständige System, das in Kap. IX mit V_ν bezeichnet wurde, in dem gegenwärtigen Falle mit (30) identisch ist.

289. Wir betrachten schliefslich noch diejenigen Berührungstransformationen, für welche die in (2) auftretende Funktion $\varrho \equiv 1$ ist. Aus (27) folgt jetzt:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} \equiv 1; \quad \frac{\partial X_i}{\partial z} \equiv 0; \quad \frac{\partial P_i}{\partial z} \equiv 0.$$

Also mufs Z die Form haben:

$$(34) \qquad Z \equiv z - U(x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m),$$

während die X_i, P_i von z unabhängig sind, was wir aus Art. 201 bereits wissen. Wählt man nun dementsprechend für X_1 eine arbiträre Funktion der $2m$ Variabeln $x_1 \dots x_m p_1 \dots p_m$ und legt auch den übrigen X_i die Bedingung auf, von z unabhängig zu sein, so verwandeln sich die Bedingungen $[X_i X_k] \equiv 0$ in die folgenden:

$$(35) \qquad (X_i X_k) \equiv 0,$$

und wir wissen aus Art. 275, dafs für jede Zahl ν der Reihe $1 \dots m$ die partiellen Differentialgleichungen:

$$(36) \qquad (X_1 f) = 0 \dots (X_\nu f) = 0$$

ein ν-gliedriges vollständiges (Jacobi'sches) System bilden, wenn die $X_1 \dots X_\nu$ unabhängig und bereits so bestimmt sind, dafs die Bedingungen (35) für $i, k = 1 \dots \nu$ gelten. Für $X_{\nu+1}$ mufs dann eine von $X_1 \dots X_\nu$ Lösung des Systems (36) genommen werden, was eine Operation $2m - 2\nu$ erfordet. Hat man so die $X_1 \dots X_m$ der Reihe nach bestimmt, so bilden nach Art. 282 die Gleichungen:

$$(37) \qquad [X_i f] \equiv (X_i f) + \left(\sum_1^m{}^s p_s \frac{\partial X_i}{\partial p_s} \right) \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (i = 1 \dots m)$$

für sich ein m-gliedriges vollständiges System mit den Independenten $z, x_1 \dots x_m p_1 \dots p_m$; da nun die Variable z in den Koeffizienten desselben nicht auftritt, und die m Gleichungen $(X_i f) = 0$ für sich ein vollständiges System bilden, so besitzt das System (37), wie man mittels der Schlufsweise des Art. 145 leicht erkennt, aufser den Lösungen $X_1 \dots X_m$ noch ein $m + 1^{\text{tes}}$ Integral der Form (34), das durch Eliminationen und eine einzige Quadratur erhalten wird, wenn $X_1 \dots X_m$ bekannt sind. Aus Satz (3) schliefsen wir nunmehr, dafs die linearen Gleichungen:

$$\sum_1^m{}^s P_s \frac{\partial X_s}{\partial x_i} = - \frac{\partial U}{\partial x_i} + p_i$$

$$\sum_1^m{}^s P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_i} = - \frac{\partial U}{\partial p_i}$$

eine und nur eine Auflösung $P_1 \dots P_m$ gestatten. Die Identitäten:

$$[P_k Z] \equiv \varrho P_k; \; [X_i P_k] \equiv - \varrho \delta_{ik}; \; [P_i P_k] \equiv 0$$

nehmen hier folgende Gestalt an:

$$-(P_k U) + \sum p_s \frac{\partial P_k}{\partial p_s} \equiv P_k; \; (P_k X_i) \equiv \delta_{ik}; \; (P_i P_k) \equiv 0.$$

Die letzten beiden dieser Identitäten zeigen, daſs das vollständige System (36) die Integrale

$$X_1 \,.\,.\, X_m P_{\nu+1} \,.\,.\, P_m$$

besitzt.

290. Überträgt man die in Art. 218 entwickelte Reduktionsmethode auf den bedingungslosen Pfaff'schen Ausdruck

$$\nabla \equiv dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m,$$

so erhält man genau das in der vorigen Nr. auseinandergesetzte Verfahren. Man erkennt dies sofort, wenn man bedenkt, daſs das vollständige System V, das zu ∇ gehört, sich auf die einzige partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{38}$$

reduzirt, und daſs die Gleichungen (36) mit (38) zusammen in dem vorliegenden Falle dasjenige vollständige System bilden, welches in Art. 218 mit V_ν bezeichnet wurde.

Derselbe Sachverhalt läſst sich auch so aussprechen:

Die Reduktion der vorigen Nr. kommt darauf hinaus, den Pfaff'schen Ausdruck

$$\nabla' \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m$$

auf die Form

$$d\,U(x_1 p) + \Sigma P_\iota(x_1 p)\, dX_i(xp)$$

zu reduziren, worin die Funktion X_1 willkürlich vorgeschrieben ist, und wird, wie man leicht sieht, auch dadurch erhalten, daſs man auf ∇' das in Art. 162 skizzirte Verfahren anwendet.

291. Nach Nr. 289 können wir schlieſslich folgenden Satz aufstellen:

„*Befriedigen* $2m+1$ *Funktionen* $U, X_1 \,.\,.\, X_m P_1 \,.\,.\, P_m$ *der Variabeln* $x_1 \,.\,.\, x_m p_1 \,.\,.\, p_m$ *die Identität:*

$$dU + P_1 dX_1 + \cdots + P_m dX_m \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m, \tag{39}$$

so sind die Funktionen $P_1 \,.\,.\, P_m$, $X_1 \,.\,.\, X_m$ *von einander unabhängig, und es bestehen folgende identische Beziehungen:*

$$\begin{cases} (X_i X_k) \equiv 0, \; (P_i X_k) \equiv \delta_{ik}, \; (P_i P_k) \equiv 0 \\ (X_\iota\, U) \equiv \sum_1^m {}^s\, p_s \dfrac{\partial X_\iota}{\partial p_s} \\ (P_k\, U) \equiv - P_k + \sum_1^m {}^s\, p_s \dfrac{\partial P_k}{\partial p_s} \\ \qquad (i, k = 1, 2, \,.\,.\, m). \end{cases} \tag{40}$$

Dieser Satz gestattet mehrere Umkehrungen, von denen wir folgende hervorheben:

a) *Kennt man m unabhängige Funktionen* $X_1 \ldots X_m$, *welche die Identitäten* $(X_i X_k) \equiv 0$ *erfüllen, so kann man durch eine Quadratur eine Funktion U, hierauf durch Auflösung linearer Gleichungen m Funktionen* $P_1 \ldots P_m$ *so bestimmen, dafs die Identität* (39) *stattfindet.*

b) *Befriedigen* $2m + 1$ *Funktionen* $U, P_i X_i$ *der Variabeln* $x_k p_k$ *alle Relationen* (40), *so sind die* $2m$ *Funktionen* $P_i X_i$ *unabhängig, und es besteht die Identität* (39).

Wir können noch hinzufügen:

Die Bestimmung der allgemeinsten Berührungstransformation der Gestalt:

$$z' = z - U(x, p);\ x_i' = X_i(x, p);\ p_i' = P_i(x, p)$$

erfordert, falls X_1 *willkürlich vorgeschrieben wird, je eine Operation*

$$2m - 2,\ 2m - 4,\ \ldots\ 2,\ 0.$$

Es sei schliefslich hervorgehoben, dafs mit Rücksicht auf (40) die Funktion U nur dann, aber auch stets dann eine Konstante oder eine Funktion von $X_1 \ldots X_m$ allein wird, wenn *alle* X_i in den p_i homogen nullter Ordnung sind. Wir kommen damit auf die Theorie des vorigen § zurück.

292. *Man kann im Vorigen auch die Funktion U willkürlich annehmen, und hinterher die* P_i, X_i *so bestimmen, dafs die Identität* (39) *stattfindet.* Es gilt nämlich der Satz:

Ist ν *ein Index* $< m$, *bedeutet ferner U eine beliebige Funktion der Variabeln* $x_i p_i$, *und sind* $X_1 \ldots X_\nu$ *unabhängige Funktionen dieser Variabeln, die den Bedingungen:*

$$(41)\qquad \begin{aligned} (X_i U) &\equiv \sum_1^m {}_s\, p_s \frac{\partial X_i}{\partial p_s} \qquad && (i = 1, \ldots \nu) \\ (X_i X_k) &\equiv 0 && (i, k = 1 \ldots \nu) \end{aligned}$$

genügen, so bilden die partiellen Differentialgleichungen:

$$(42)\qquad (Uf) + \sum_1^m {}_s\, p_s \frac{\partial f}{\partial p_s} = 0,\ (X_i f) = 0 \qquad (i = 1 \ldots \nu)$$

ein $\nu + 1$-*gliedriges vollständiges System.*

Die lineare Unabhängigkeit dieser Gleichungen ist leicht zu beweisen. Setzt man ferner:

$$Y_0 f \equiv (Uf) + \sum p_s \frac{\partial f}{\partial p_s};\ Y_i f \equiv (X_i f),$$

so hat man:

$$Y_0(Y_i f) \equiv (U(X_i f)) + \sum p_s \frac{\partial}{\partial p_s}(X_i f)$$

$$Y_i(Y_0 f) \equiv (X_i(Uf)) + \left(X_i, \sum p_s \frac{\partial f}{\partial p_s}\right),$$

woraus mittels der Jacobi'schen Identität und mit Rücksicht auf die Beziehung:

$$\left(X_i, \sum p_s \frac{\partial f}{\partial p_s}\right) \equiv \sum p_s \left(X_i, \frac{\partial f}{\partial p_s}\right) - \sum \frac{\partial f}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_s}$$

leicht folgt:

$$Y_0(Y_i f) - Y_i(Y_0 f) \equiv - Y_i f.$$

Da die ν letzten Gleichungen (42) für sich ein vollständiges System bilden, so ist unsere Behauptung erwiesen.

Die Funktion $X_{\nu+1}$ ist jetzt ein beliebiges, von $X_1 \,.\,.\, X_\nu$ unabhängiges Integral des Systems (42), wird also durch eine Operation $2m - 2\nu - 1$ gefunden. Sind solcherweise die X_i der Reihe nach bestimmt, so folgen die P_i aus (39) durch Auflösung linearer Gleichungen. Daraus folgt:

Ist $U(x_1 \,.\,.\, p_m)$ eine arbiträr gewählte Funktion, so erfordert die Bestimmung eines Funktionensystems $P_i X_i$, welches die Identität:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m \equiv dU + P_1 dX_1 + \cdots + P_m dX_m$$

erfüllt, je eine Operation:

$$2m - 1,\ 2m - 3,\ .\,.\ 3,\ 1.$$

Auch dieser Satz erweist sich als Korollar der allgemeinen Theorie von Kap. IX, § 1 und 2, wenn man bedenkt, dafs die vollständigen Systeme V und V_ν, die nach den zitirten Paragraphen zu dem bedingungslosen[1]) Pfaff'schen Ausdruck:

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m - dU$$

gehören, mit der ersten Gleichung (42) bezw. dem System (42) identisch werden.

293. Aus den Identitäten (27) folgt noch beiläufig der Beweis für die in Art. 201 aufgestellte Behauptung, wonach die allgemeinste Berührungstransformation, deren rechte Seiten $X_i P_i$ von z frei sind, die Form:

$$z = Az + U(x_1 \,.\,.\, p_m);\ x_i' = X_i(xp);\ p_i' = P_i(xp)$$

1) Vgl. Art. 102.

besitzt, unter A eine Konstante verstanden. In der That, sollen die X_i, P_i von z nicht abhängen, so folgt aus (27):

$$[X_i\varrho] \equiv 0,\ [P_i\varrho] \equiv 0.$$

Also ist ϱ eine Funktion der X_i allein, da die m Gleichungen $[X_i f] = 0$ keine andere Lösung besitzen. Aber aus den Identitäten:

$$0 \equiv [P_i\varrho] \equiv \sum_1^n {}^k [P_i X_k] \frac{\partial \varrho}{\partial X_k} \equiv \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial X_i}$$

folgt, dafs ϱ einer Konstanten A gleich ist; die erste Identität (27) geht jetzt in die folgende über:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} \equiv A,$$

was zu zeigen war.

§ 3. Begründung der Theorie des Pfaff'schen Problems mittels der Theorie der Berührungstransformationen.

294. Die Resultate der letzten beiden Paragraphen wurden nicht nur aus der allgemeinen Theorie des Pfaff'schen Problems, sondern auch auf direktem Wege abgeleitet. Auf Grund dieser Thatsache wollen wir nun umgekehrt die Hauptsätze der Theorie des Pfaff'schen Problems mit Hülfe der Theorie der Berührungstransformationen wieder zu gewinnen suchen. Da uns jedoch alle Resultate, zu denen wir auf diesem Wege gelangen, bereits geläufig sind, so beschränken wir uns darauf, den erwähnten Gedankengang zu skizziren, indem wir die weitere Ausführung dem Leser überlassen.

Zunächst schicken wir die folgenden beiden Hülfssätze voraus:

1. *Sind die* $2r-1$ *Variabeln:*

$$y_1 y_2 \cdot\cdot y_r,\ q_1,\ q_2,\ \cdot\cdot q_{r-1} \tag{1}$$

an eine Relation:

$$\varphi(y_1 y_2 \cdot\cdot y_r q_1 \cdot\cdot q_{r-1}) = 0 \tag{2}$$

gebunden, so kann der Pfaff'sche Ausdruck:

$$dy_r + q_1 dy_1 + \cdot\cdot + q_{r-1} dy_{r-1} \tag{3}$$

auf die eine oder die andere der beiden Formen:

$$q_1' dy_1' + \cdot\cdot + q_{r-1}' dy_{r-1}';\ dy_r + \sum_1^{r-2} {}^s q_s' dy_s'$$

gebracht werden, je nachdem die Relation (2) *die Variabele* y_r *enthält oder nicht.*

Die Gröfsen $y_\iota' q_\iota'$ sind dabei Funktionen von gewissen $2r - 2$ unter den Variabeln (1).

2) *Sind die* $2r$ *Variabeln:*

(4) $$y_1 \cdot\cdot y_r q_1 \cdot\cdot q_r$$

an eine Relation:

(5) $$\varphi(y_1 \cdot\cdot y_r q_1 \cdot\cdot q_r) = 0$$

geknüpft, so kann der Pfaff'sche Ausdruck:

(6) $$q_1 dy_1 + \cdot\cdot + q_r dy_r$$

auf die eine oder die andere der beiden Formen:

$$\sum_1^{r-1}{}_s\, q_s' dy_s'; \; dy_r' + \sum_1^{r-1}{}_s\, q_s' dy_s'$$

gebracht werden, je nachdem die Relation (5) *in den* q_ι *homogen ist oder nicht.*

Die q_ι', y_ι' sind dabei Funktionen von gewissen $2r - 1$ der Variabeln (4). Der Hülfssatz 2) ist für $r = 1$ evident; wir nehmen an, dieser Hülfssatz sei für die Zahlen $1, 2, \ldots r - 1$ bereits bewiesen, und wollen zeigen, dafs unter dieser Annahme beide Hülfssätze auch für die Zahl r Geltung haben.

Enthält die Relation (2) die Variabeln y_r, so kann sie auf folgende Form gebracht werden:

$$y_r = U(y_1 \cdot\cdot y_{r-1} q_1 \cdot\cdot q_{r-1}).$$

Der Ausdruck (3) hat also die Gestalt:

$$d\,U(y_1 \cdot\cdot y_{r-1} q_1 \cdot\cdot q_{r-1}) + q_1 dy_1 + \cdot\cdot + q_{r-1} dy_{r-1}$$

und der Beweis für die Aussage 1) folgt jetzt unmittelbar aus Art. 292. Wenn dagegen die Gleichung (2) die Variable y_r nicht enthält, so ergiebt sich die Richtigkeit unseres Satzes aus Hülfssatz 2), der für die Zahl $r - 1$ als bewiesen gilt.

Ist andererseits die Gleichung (5) in den q_i nicht homogen, so können wir stets annehmen, dafs sie die Form habe:

$$q_r = \psi(y_1 \,..\, y_r,\; \varkappa_1 \,..\, \varkappa_{r-1}),$$

worin $\varkappa_i$ für $\dfrac{q_i}{q_r}$ geschrieben wurde. Der Ausdruck (6) nimmt jetzt folgende Gestalt an:

$$\psi(y_1 \cdot\cdot y_r \varkappa_1 \cdot\cdot \varkappa_{r-1})\,(dy_r + \varkappa_1 dy_1 + \cdot\cdot + \varkappa_{r-1} dy_{r-1}),$$

und die Behauptung 2) ergiebt sich aus Art. 288. Hat dagegen die Relation (5) die Form:

$$\varphi(y_1 \,.\,. \, y_r,\ \varkappa_1 \,.\,. \, \varkappa_{r-1}) = 0,$$

so ergiebt sich die Behauptung 2), wenn man den Satz 1), der für die Zahl r soeben bewiesen wurde, auf den Ausdruck:

$$dy_r + \varkappa_1 dy_1 + \cdots + \varkappa_{r-1} dy_{r-1}$$

anwendet.

Die beiden Hülfssätze sind damit allgemein als richtig nachgewiesen.

295. Es sei jetzt

$$\Delta \equiv \sum_1^n {}^i\, a_i(x_1 x_2 \,.\,. \, x_n)\, dx_i$$

ein beliebiger Pfaff'scher Ausdruck in den Variabeln $x_1 \,.\,. \, x_n$. Indem wir dann für den Augenblick die Gröſsen:

$$a_1,\ a_2,\ .\,.\ a_n,\ x_1,\ x_2,\ .\,.\ x_n$$

als $2n$ Variabeln betrachten, die durch die Relation

$$a_1 = a_1(x_1 x_2 \,.\,. \, x_n)$$

verknüpft sind, können wir den Ausdruck Δ nach Hülfssatz 2) auf die folgende Gestalt bringen:

$$dy_n + \sum_1^{n-1} {}^i\, q_i\, dy_i, \tag{7}$$

worin die $y_i q_i$ gewisse Funktionen der $2n-1$ Variabeln $a_2, a_3, \,.\,. \, a_n$, $x_1 \,.\,. \, x_n$ bedeuten. Ersetzen wir dann die a_i durch ihre Ausdrücke in den x_i, so verwandeln sich die $y_i q_i$ in Funktionen der x, die im Falle $n > 1$ stets durch gewisse identische Relationen aneinander geknüpft sind. Greifen wir irgend eine derselben heraus, so gestattet der Ausdruck (7) nach Hülfssatz 1) eine weitere Reduktion:

$$\sum_1^{n-1} {}^i\, q_i'\, dy_i'.$$

Die Gröſsen $q_i' y_i'$ sind dabei Funktionen von gewissen $2n-2$ unter den Variabeln y, q, also Funktionen von $x_1 \,.\,. \, x_n$. Durch geeignete Wiederholung dieses Verfahrens gelangen wir sofort zu dem Resultat, daſs jeder Pfaff'sche Ausdruck Δ auf eine der beiden nachstehenden Formen gebracht werden kann.

$$\sum_1^{\lambda} {}^i\, \pi_i(x_1 x_2 \,.\,. \, x_n)\, d\xi_i(x_1 \,.\,. \, x_n), \tag{8}$$

$$d\xi(x_1 x_2 \,.\,. \, x_n) - \sum_1^{\lambda-1} {}^i\, \pi_i(x_1 x_2 \,.\,. \, x_n)\, d\xi_i(x_1 x_2 \,.\,. \, x_n), \tag{9}$$

worin sämmtliche vorkommende Funktioneu π_ι, ξ_ι bezw. ζ, π_i, ξ_ι von einander unabhängig sind.

Indem man jetzt den Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ mit der einen oder der andern der beiden Formen (8), (9) vergleicht, und solcherweise die Koeffizienten a_ι durch die Funktionen $\pi_i \xi_i$ bezw. ζ, π_ι, ξ_i ausdrückt, erkennt man durch die Überlegungen von Kap. V, § 1 und 2 sofort, dafs der Ausdruck $\varDelta$ die Form (8), bezw. (9) nur dann erhalten kann, wenn der Rang $\varkappa$ der zu $\varDelta$ gehörigen Matrix (A) (Art. 96) gleich 2λ bezw. $2\lambda - 1$ ist.

Das Fundamentaltheorem ist damit aufs Neue nachgewiesen.

296. Im Falle $\varkappa = 2\lambda$ sei (8) eine bestimmte Normalform von $\varDelta$, während der Ausdruck:

$$\sum_1^\lambda {}^i \, \Pi_i \, d\,\Xi_\iota \tag{10}$$

eine beliebige andere Normalform von $\varDelta$ darstellen möge. Nach Art. 206 müssen dann die Funktionen Π_ι, Ξ_i durch die $\pi_i \xi_i$ allein ausdrückbar sein, und zwar kann man nach Art. 279 für Ξ_1 eine beliebige Funktion dieser 2λ Gröfsen nehmen, die in den π_i homogen nullter Ordnung ist. Für $\nu = 1, 2, \ldots \lambda - 1$ ist dann $\Xi_{\nu+1}$ ein beliebiges, von $\Xi_1 \ldots \Xi_\nu$ unabhängiges Integral des vollständigen Systems:

$$\text{(11)} \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^\lambda {}^i \, \pi_\iota \frac{\partial f}{\partial \pi_i} = 0 \\[2ex] \displaystyle(\Xi_i f) \equiv \sum_1^\lambda {}^s \left(\frac{\partial \Xi_i}{\partial \pi_s} \frac{\partial f}{\partial \xi_s} - \frac{\partial \Xi_i}{\partial \xi_s} \frac{\partial f}{\partial \pi_s} \right) = 0 \qquad (i = 1 \ldots \nu). \end{cases}$$

Die Π_i folgen hinterher durch Vergleichung der zwei Ausdrücke $\varDelta$ und (8).

Im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ sei (9) eine bestimmte Normalform von $\varDelta$. Verstehen wir dann unter dem Ausdruck:

$$\sigma \left(dZ - \sum_1^{\lambda-1} {}^s \, \Pi_s \, d\,\Xi_s \right) \tag{12}$$

eine beliebige reduzirte Form von $\varDelta$ mit λ Differentialelementen, so sind die Gröfsen σ, Z, Π_s, Ξ_s nach Art. 205 Funktionen der $\varkappa$ Gröfsen ζ, π_i, ξ_i allein, und für Z kann man nach Art. 287 eine beliebige Funktion dieser Gröfsen wählen. Dann ist für jeden Index ν der Reihe $1, 2, \ldots \lambda - 1$ die Funktion Ξ_ν ein beliebiges, von Z, $\Xi_1 \ldots \Xi_{\nu-1}$ unabhängiges Integral des vollständigen Systems:

$$(13)\quad \begin{cases} [Zf] \equiv \sum_{1}^{\lambda-1} s \left\{ \frac{\partial Z}{\partial \pi_s}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_s} + \pi_s \frac{\partial f}{\partial \zeta}\right) - \frac{\partial f}{\partial \pi_s}\left(\frac{\partial Z}{\partial \xi_s} + \pi_s \frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right)\right\} = 0 \\ [\Xi_i f] \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots \nu - 1). \end{cases}$$

Sind die Ξ_i bestimmt, so folgen die Funktionen ϱ und Π_s hinterher durch Auflösung linearer Gleichungen.

Verstehen wir endlich im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ unter dem Pfaff'schen Ausdruck:

$$(14)\qquad dZ - \sum_{1}^{\lambda-1} s\, \Pi_s \, d\Xi_s$$

eine beliebige Normalform von Δ, so kann für Ξ_1 eine arbiträre Funktion von $\xi_1 \ldots \xi_{\lambda-1} \pi_1 \ldots \pi_{\lambda-1}$ genommen werden; dann ist die Funktion $\Xi_{\nu+1}$ ein von $\Xi_1 \ldots \Xi_\nu$ unabhängiges Integral des vollständigen Systems:

$$(15)\qquad \{\Xi_i f\} \equiv \sum_{1}^{\lambda-1} s \left(\frac{\partial \Xi_i}{\partial \pi_s}\frac{\partial f}{\partial \xi_s} - \frac{\partial \Xi_i}{\partial \xi_s}\frac{\partial f}{\partial \pi_s}\right) = 0 \qquad (i = 1 \ldots \nu),$$

und Z folgt, wenn die Ξ_i bestimmt sind, durch eine Quadratur, worauf die Π_i wie vorhin ermittelt werden (Art. 289).

297. Die hiermit angedeuteten Methoden setzen zunächst die vorherige Ermittelung einer Normalform von Δ voraus. Die entscheidende Wendung in unserm Gedankengang besteht jetzt darin, dafs wir die successive Bestimmung der Differentialelemente in den reduzirten Formen (10) (12) (14) auf die Integration solcher Systeme partieller Differentialgleichungen zurückführen, in denen die ursprünglichen Variabeln $x_1 \ldots x_n$ als unabhängige Veränderliche figuriren. Dazu benötigen wir vor allem die Resultate von Kap. V, § 1 und 2, wonach die $\varkappa$ unabhängigen, in der Normalform von Δ auftretenden Funktionen ein gewisses System W linearer partieller Differentialgleichungen erfüllen, welches mit Hülfe der Funktionen a_i, a_{ik} nach den Regeln des zitirten Kapitels gebildet und hierbei gleichzeitig als vollständig erkannt wird. Ebenso wissen wir aus Kap. V, dafs im Falle $\varkappa = 2\lambda$ die Funktionen:

$$\xi_1 \ldots \xi_\lambda, \frac{\pi_1}{\pi_\lambda} \ldots \frac{\pi_{\lambda-1}}{\pi_\lambda},$$

im Falle $\varkappa = 2\lambda - 1$ die Funktionen:

$$\xi_1 \ldots \xi_{\lambda-1} \pi_1 \ldots \pi_{\lambda-1}$$

ein gewisses System V von $n - \varkappa + 1$ partiellen Differentialgleichungen befriedigen, das sonach ebenfalls vollständig ist.

Für die Funktion Ξ_1 *in dem Ausdruck* (10) *und* (14) *ist sonach ein beliebiges Integral des Systems* V, *für die Funktion* Z *in* (12) *dagegen ein beliebiges Integral von* W, *im Falle* $\varkappa = 2\lambda - 1 = n$ *eine arbiträre Funktion der* x *zu wählen.*

Aus diesen Thatsachen folgt nunmehr aufs leichteste der Satz des Art. 151 und damit die „implicite" Reduktionsmethode.

Mit Hülfe der Ergebnisse von Kap. X, § 3 kann man sodann die Gleichungensysteme (11) (13) (15) direkt in partielle Differentialgleichungensysteme mit den Independenten $x_1 \,.\,. x_n$ umsetzen. Dadurch gewinnen wir nicht nur abermals die in Kap. IX entwickelte „explicite" Reduktionsmethode, sondern gleichzeitig einen neuen Beweis für die Vollständigkeit der a. a. O. benutzten Gleichungensysteme V_ν und W_ν.

Aus der Theorie der Berührungstransformationen (Kap. VIII, XI) und dem daran sich anschliefsenden Beweis des Fundamentaltheorems (Art. 295) sowie aus den Ergebnissen von Kap. V, § 1, 2, und Kap. X, § 3 läfst sich somit eine vollständige, in sich abgeschlossene Theorie des Pfaff'schen Problems aufbauen.

Kapitel XII.

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 1. Die Integrale.

298. Gegeben sei eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit *einer* Unbekannten:

$$F\left(z, x_1, x_2, \,.\,. x_m, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \,\cdot\cdot\, \frac{\partial z}{\partial x_m}\right) = 0. \tag{1}$$

Die Funktion:

$$z = \varphi(x_1 x_2 \,.\,. x_n) \tag{2}$$

sei ein Integral derselben (s. die Einleitung).

Im Raume $R_{m+1}(z, x_1 \,.\,. x_m)$ stellt die Relation (2) eine Fläche dar; wir bezeichnen dieselbe als „Integralfläche" der partiellen Differentialgleichung, wenn φ eine Lösung derselben ist. Definirt also die Relation (2) eine Integralfläche von (1), dann und nur dann besitzt das $m + 1$-gliedrige Gleichungensystem:

$$z = \varphi(x_1 x_2 \,.\,. x_m);\; p_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot\cdot\, p_m = \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \tag{3}$$

die folgenden beiden Eigenschaften:

1) Es befriedigt die Pfaff'sche Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m = 0.$$

2) Die Relation:

$$F(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = 0$$

ist eine Folge des Gleichungensystems (3) (vgl. die Einleitung und Art. 41).

299. Wir werden so auf das Problem geführt, in den $2m + 1$ Variabeln:

(4) $$z, x_1 x_2 \ldots x_m p_1 \ldots p_m$$

überhaupt *alle* $m + 1$-gliedrigen Gleichungensysteme zu bestimmen, welche die genannten beiden Eigenschaften besitzen, und dementsprechend wollen wir den Integralbegriff folgendermafsen verallgemeinern:

Unter einem „Integral" der Gleichung:

(5) $$F(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = 0$$

verstehen wir jedes $m + 1$-*gliedrige Gleichungensystem der Form:*

(6) $$\Phi_i(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m + 1),$$

welches die Relation $F = 0$ *umfafst und die Pfaff'sche Gleichung:*

(7) $$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m = 0$$

befriedigt (vgl. Art. 82 und Kap. VII § 1).

Deuten wir die $2m + 1$ Variabeln (4) als Elementkoordinaten des R_{m+1}, so definirt jedes Gleichungensystem (6) der genannten Art eine Element-M_m, deren Flächenelemente $z x_i p_i$ alle die Relation $F = 0$ erfüllen, und die wir als eine *„Integral-M_m"* der Gleichung (5) bezeichnen wollen.

Eine Gleichung (5) *„integriren"* heifst also jetzt, alle ihre Integral-M_m bestimmen, und diese Aufgabe umfafst das im vor. Art. formulirte Integrationsproblem als Spezialfall, da ja durch ihre Lösung insbesondere auch alle Integral-M_m^m oder Integralflächen der gegebenen Gleichung miterhalten werden.

300. Eine Element-$M_{m-\mu}$ $(\mu > 0)$, deren $m + 1 + \mu$ Definitionsgleichungen (Art. 177) die Relation $F = 0$ umfassen, soll als eine *„Integral-$M_{m-\mu}$"* dieser Gleichung bezeichnet werden. Um die allgemeinste Integral-$M_{m-\mu}$ einer partiellen Differentialgleichung (5) zu bestimmen, braucht man nur zu den $m + 1$ Definitionsgleichungen einer *ganz beliebigen* Element-M_m, die keine Integral-M_m von $F = 0$ ist, die Gleichung $F = 0$ selbst und $\mu - 1$ beliebige andere Relationen

hinzuzufügen, derart, dafs die so erhaltenen $m + \mu + 1$ Gleichungen von einander unabhängig ausfallen.

Die allgemeinste Integral-$M_{m-\mu}$ läfst sich demnach, falls $\mu > 0$, ohne jede Integration ermitteln.

Insbesondere erkennt man, dafs die Punktmannigfaltigkeit, an die sich die Integral-$M_{m-\mu}$ anschliefst, ganz willkürlich gewählt werden kann.

Um z. B. die allgemeinste Integral-M_1 einer partiellen Differentialgleichung:

$$F(xyzpq) = 0 \tag{8}$$

zu bestimmen, wählen wir irgend eine Element-$M_2{}^2$ des Raumes $R_3(xyz)$:

$$z = \varphi(xy);\ p = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{9}$$

und fügen die Relation (8) hinzu, die jetzt vermöge (9) folgende Form annimmt:

$$\omega(xy) = 0.$$

Durch diese Gleichung wird auf der Fläche $z = \varphi$ eine gewisse Raumkurve ausgeschnitten, und diese Raumkurve bestimmt auf unserer Fläche einen *Streifen* (Art. 177) von Flächenelementen, die alle der Relation $F = 0$ genügen. Wir können ebenso eine $M_2{}^1$ des R_3 beliebig wählen:

$$z = \psi(x);\ y = \varphi(x);\ p = \psi' - q\varphi'.$$

Diese Relationen definiren dann zusammen mit:

$$F(x, y, z, \psi' - q\varphi', q) = 0$$

einen oder mehrere Streifen, die sich an die Raumkurve $z = \psi$, $y = \varphi$ anschliefsen und deren Flächenelemente die Gleichung $F = 0$ erfüllen.

Man erkennt leicht, dafs jede Integral-M_1 von (8) ebensowohl auf die eine als auf die andere Weise erhalten werden kann.

301. Es giebt einen Fall, in dem auch die Bestimmung aller Integral-M_m ohne Integration gelingt, wenn nämlich die Gleichung (5) die Variabeln $p_1 \dots p_m$ überhaupt nicht enthält, also die Form besitzt:

$$\varphi(z, x_1, x_2, \dots x_m) = 0. \tag{10}$$

Diese Gleichung stellt im Sinne von Art. 298 überhaupt keine partielle Differentialgleichung dar, während der Integralbegriff des Art. 299 unverändert bestehen bleibt. In der That, um die allgemeinste Integral-M_m der Gleichung (10) zu finden, verstehen wir unter μ eine Zahl der Reihe $0, 1, \dots m$, wählen μ Funktionen $\varphi_1 \dots \varphi_\mu$ derart, dafs die Gleichungen:

$$\varphi = 0,\ \varphi_1 = 0,\ \dots\ \varphi_\mu = 0$$

nach z und nach μ von den Variabeln $x_1 \dots x_m$ auflösbar sind, und fügen die Relationen hinzu, die durch Elimination der λ aus dem System:

$$-p_i = \frac{\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i}}{\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \dots + \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z}} \qquad (i = 1, 2, \dots m)$$

hervorgehen (Art. 174). Darnach giebt es z. B. dreierlei Arten von Integral-M_2 der Gleichung:

$$\varphi(xyz) = 0. \tag{11}$$

Die eine Kategorie wird durch die Fläche (11) selbst, bezw. durch die ∞^2 sich an sie anschliefsenden Flächenelemente $xyzpq$ repräsentirt. Die zweite besteht aus den Element-M_2, die sich an je eine beliebige, auf der Fläche (11) gelegene Raumkurve anschliefsen; zu der dritten gehört jede M_2, deren Elemente denselben Pnnkt xyz der Fläche (11) enthalten.

302. Hat die gegebene partielle Differentialgleichung (5) folgende Form:

$$F\left(x_1 \dots x_m \frac{p_1}{p_m}, \frac{p_2}{p_m} \dots \frac{p_{m-1}}{p_m}\right) = 0, \tag{12}$$

d. h. ist sie von z frei und in den p_i homogen, so läfst das Integrationsproblem eine doppelte Auffassung zu. Einmal können wir wie vorhin nach allen $m+1$-gliedrigen Gleichungensystemen in $z\,x_i\,p_i$ fragen, welche die Pfaff'sche Gleichung (7) erfüllen und die Relation (12) enthalten. Zweitens aber können wir die $2m$ Variabeln $x_i p_i$ als homogene Elementkoordinaten des Raums $R_m(x_1 \dots x_m)$ interpretiren, und dementsprechend alle m-gliedrigen, in den p_i homogenen Gleichungensysteme in $x_1 \dots x_m p_1 \dots p_m$ zu ermitteln suchen, welche die Pfaff'sche Gleichung:

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_m dx_m = 0$$

befriedigen und die Relation (12) umfassen. Ein solches Gleichungensystem definirt uns dann eine Element-M_{m-1} des R_m, deren Flächenelemente der Relation (12) genügen, und die wir als ein „Integral" oder eine „Integral-M_{m-1}" von (12) bezeichnen wollen.

Das zweite Problem ist scheinbar spezieller als das erste. Durch die Lösung der ersteren Aufgabe ist die zweite offenbar miterledigt; denn die m Definitionsgleichungen einer Element-M_{m-1} des R_m geben mit $z = 0$ zusammen die $m+1$ Definitionsgleichungen einer Element-M_m des R_{m+1} (Art. 180, 182). Dagegen liefert die Lösung des zweiten Problems nicht *alle* Element-M_m des R_{m+1}, die der Gleichung (12) genügen, sondern nur diejenigen, deren zugehörige Punktmannigfaltigkeiten in der Ebene $z = 0$ des R_{m+1} gelegen sind; insbesondere wird auf diesem Wege keine Integralfläche $z = \varphi(x_1 \,.\,.\, x_m)$ der Gleichung (12) gewonnen. Gleichwohl werden wir später erkennen, dafs aus der Lösung des zweiten Problems sich die des ersten mit Leichtigkeit ergiebt.

303. Eine partielle Differentialgleichung der Form:

$$\Phi(z, x_1 \,.\,.\, x_{m-1}, p_1 \,.\,.\, p_{m-1}), \tag{13}$$

kann einfach dadurch auf die Form (12) gebracht werden, dafs man x_m statt z, und $-\dfrac{p_i}{p_m}$ statt p_i schreibt, also im $R_m(z, x_1 \,.\,.\, x_{m-1})$ statt der nicht homogenen Elementkoordinaten $z x_i p_i$ homogene einführt. Ist so (13) auf die Form (12) gebracht, so wird man bei der Integration dieser letzteren Gleichung von den beiden obigen Formulirungen des Integrationsproblems der zweiten den Vorzug geben. Umgekehrt kann man natürlich durch die inverse Substitution von der Gleichung (12) sofort zu (13) übergehen.

Vermöge dieser Transformation können nunmehr auch solche Integral-M_{m-1} der partiellen Differentialgleichung (13) in Betracht gezogen werden, deren zugehörige Punktmannigfaltigkeit eine zur z-Axe parallele cylindrische Mannigfaltigkeit darstellt (Art. 183), deren Definitionsgleichungen also, in den homogenen Koordinaten geschrieben, die Relation $p_m = 0$ enthalten.

304. Wir werden im Folgenden meist partielle Differentialgleichungen der Form:

$$F(z, x_1 \,.\,.\, x_m p_1 \,.\,.\, p_m) = c \tag{14}$$

betrachten, worin c eine willkürliche Konstante ist. Jede Gleichung:

$$\Phi(z, x_1 \,.\,.\, x_m p_1 \,.\,.\, p_m) = 0, \tag{15}$$

die keine willkürliche Konstante enthält, kann auf die Form (14) gebracht werden. Enthält nämlich Φ die Gröfse z, so führe man statt z die neue Variable $z' + c$ ein, und löse (15) nach $z' + c$ auf. Durch den Übergang von z zu $z' + c$ geht offenbar jede Integral-M_m von (15) in eine solche der transformirten Gleichung über; umgekehrt, jede Integral-M_m der letzteren liefert eine solche von (15), wenn man in deren $m + 1$ Definitionsgleichungen c durch 0 und z' durch z ersetzt.

Wenn aber Φ die Funktion z nicht enthält, so möge die Gleichung (15) auf die Form:

$$p_1 = \psi(x_1 \,.\,.\, x_m p_2 \,.\,.\, p_m)$$

gebracht sein. Diese Gleichung erhält dann vermöge der erweiterten Punkttransformation:

$$
(16) \qquad \begin{gathered} z' = z - c x_1; \quad x_1' = x_1; \quad p_1' = p_1 - c \\ x_i' = x_i; \quad p_i' = p_i \qquad (i = 2 \,..\, m) \end{gathered}
$$

die gewünschte Form:

$$
(17) \qquad - p_1' + \psi(x_1' \,..\, x_m' p_2' \,..\, p_m') = c,
$$

und es ist klar, dafs jede Integral-M_m von (17) sich vermöge der Berührungstransformation (16) in eine Integral-M_m von (15) verwandelt und umgekehrt.

§ 2. Methode von Pfaff, vervollständigt von Jacobi und Mayer.

305. Um alle $m+1$-gliedrigen Gleichungensysteme in $z x_i p_i$ zu finden, welche die Relation:

$$
(1) \qquad F(z, x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m) = c
$$

umfassen, und die Pfaff'sche Gleichung:

$$
\nabla \equiv dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m = 0
$$

erfüllen, denken wir uns die Relation (1) in der Form:

$$
(2) \qquad p_1 = \psi(z, x_1 \,..\, x_m, p_2 \,..\, p_m, c)
$$

aufgelöst. Dafs dies möglich sei, darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, da der Fall einer von den p_i unabhängigen Gleichung (1) bereits in Art. 301 erledigt wurde.

Wir haben jetzt alle m-gliedrigen Gleichungensysteme in den $2m$ Variabeln:

$$
(3) \qquad z, x_1 \,..\, x_m p_2 \,..\, p_m
$$

zu bestimmen, welche die Pfaff'sche Gleichung:

$$
\nabla_0 \equiv dz - \psi dx_1 - p_2 dx_2 - \cdots - p_m dx_m = 0
$$

befriedigen.

Wir unterscheiden nun die nachstehenden drei Möglichkeiten, die wir fortan immer als „die Fälle α), β), γ)" zitiren werden:

α) Die Funktion F, und infolgedessen auch ψ, ist von z nicht unabhängig.

β) F ist von z frei, und in den p_i nicht homogen nullter Ordnung, oder, was dasselbe besagt: ψ ist von z unabhängig, aber in den p_i nicht homogen erster Ordnung.

γ) F ist von z frei und in den p_i homogen nullter Ordnung, d. h. ψ ist von z frei und in den p_i homogen erster Ordnung.

Der Pfaff'sche Ausdruck ∇ besitzt, wenn darin die $2m+1$ Gröfsen

$z, x_i p_i$ als Variable betrachtet werden, die Klasse $2m+1$; ferner ist die Klasse des Ausdrucks:

$$\nabla' \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m,$$

wenn die $2m$ Gröfsen $x_i p_i$ als Variable gelten, gleich $2m$. Die zu ∇ bezw. ∇' gehörigen vollständigen Systeme V reduziren sich auf die partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \text{bezw.} \quad p_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \cdots + p_m \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

(Kap. X, § 3). Aus dem Satz des Art. 152 folgt jetzt unmittelbar, dafs ∇_0, als Pfaff'scher Ausdruck in den $2m$ Independenten (3) betrachtet, im Falle α) die Klasse $2m$, in den Fällen β) und γ) dagegen die Klasse $2m-1$ besitzt. Ferner ist die Klasse des Ausdrucks:

$$\nabla_0' \equiv \psi(x_1 \cdots x_m p_2 \cdots p_m) dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_m dx_m,$$

wenn darin

$$x_1 \ldots x_m p_2 \ldots p_m \tag{4}$$

als unabhängige Variable gelten, im Falle β) gleich $2m-1$, im Falle γ) gleich $2m-2$. Alle diese Resultate fliefsen natürlich auch unmittelbar aus der Betrachtung der zu dem Pfaff'schen Ausdruck ∇_0 gehörigen Matrix (B) (Art. 96), welche folgende Form besitzt:

$$\begin{Vmatrix}
0, & -\frac{\partial \psi}{\partial z}, & 0, & \ldots & 0, & 0, & \ldots & \ldots & 0, & -1 \\
\frac{\partial \psi}{\partial z}, & 0, & \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial \psi}{\partial x_m}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_2}, & \ldots & \ldots & \frac{\partial \psi}{\partial p_m}, & \psi \\
0, & -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, & 0, & \ldots & 0, & 1, & 0, & \ldots & 0, & p_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & -\frac{\partial \psi}{\partial x_m}, & 0, & \ldots & 0, & 0, & \ldots & \ldots & 1, & p_m \\
0, & -\frac{\partial \psi}{\partial p_2}, & -1, & \ldots & 0, & 0, & \ldots & \ldots & 0, & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & -\frac{\partial \psi}{\partial p_m}, & 0, & \ldots & -1, & 0, & \ldots & \ldots & 0, & 0 \\
1, & -\psi, & -p_2 & \ldots & -p_m & 0, & \ldots & \ldots & 0, & 0
\end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Die $2m$-reihige Determinante, die hieraus durch Weglassung der letzten Zeile und Spalte entsteht, hat den Wert $\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2$; also ist die Klasse von ∇_0 gleich $2m$, wenn ψ von z nicht frei ist. Ist aber $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$, so hat die Matrix (5) immer noch den Rang $2m$; denn die $2m$-zeilige Determinante, die aus (5) durch Streichung der zweiten Zeile und Spalte entsteht, ist gleich 1. Aber die Determinante, die aus (5) durch Streichung der letzten Zeile und Spalte entsteht, ist jetzt null, also ist $2m-2$ der Rang der zu ∇_0 gehörigen Matrix (C), d. h. ∇_0 besitzt die Klasse $\frac{1}{2}(2m+2m-2)=2m-1$.

Die zu ∇_0' gehörige Matrix (B) entsteht aus (5) durch Streichung der ersten Zeile und Kolonne; die zurückbleibende Determinante ist aber gleich dem Quadrat des Ausdrucks:

$$p_2\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial\psi}{\partial p_m}-\psi,$$

und die Determinante, die aus (5) durch Streichung der ersten, zweiten und letzten Spalte und Zeile entsteht, hat den Wert 1, woraus auch unsere übrigen Behauptungen sofort folgen.

Nach Kap. IV läfst sich die Gleichung $\nabla_0=0$ in allen drei Fällen auf eine reduzirte Form mit m Differentialelementen bringen:

$$(6)\qquad df_m-F_1\,df_1-\cdots-F_{m-1}df_{m-1}=0,$$

worin $f_1\,..\,f_mF_1\,..\,F_{m-1}$ ein System von $2m-1$ unabhängigen Funktionen der $2m$ Variabeln (3) bedeuten. Ist diese Reduktion ausgeführt, so ergiebt sich nach Kap. VII sofort die Gesamtheit aller m-gliedrigen Gleichungensysteme, welche die Pfaff'sche Gleichung $\nabla_0=0$ befriedigen.

306. Die Herstellung der reduzirten Form (6) beginnt nach der Pfaff-Grassmann'schen Theorie (Kap. IV) in allen Fällen damit, dafs man die Pfaff'sche Gleichung $\nabla_0=0$ durch Einführung neuer Variabeln $y_1\,..\,y_{2m-1}t$ auf die Gestalt:

$$\sum_1^{2m-1}{}_i\, b_i(y_1y_2\,..\,y_{2m-1})\,dy_i=0$$

bringt. Die y_i sind dabei die $2m-1$ unabhängigen Integrale einer gewissen linearen partiellen Differentialgleichung mit den Independenten (3), die im Falle α) in dem zu ∇_0 gehörigen vollständigen System V, in den Fällen β) und γ) dagegen in dem zu ∇_0 gehörigen vollständigen System W enthalten sein mufs.

Das System V reduzirt sich im Falle α) auf die folgende lineare partielle Gleichung:

$$(7)\quad -\frac{\partial f}{\partial x_1}+\sum_2^m{}_i\left[\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_i}\right]+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\sum_2^m{}_i\, p_i\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\psi\right)=0.$$

Im Falle β) wird das zu ∇_0 gehörige System W durch die eine Gleichung:

$$(8)\quad -\frac{\partial f}{\partial x_1}+\sum_2^m{}^i\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\sum_2^m{}^i p_i\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\psi\right)=0,$$

im Falle γ) also durch die Gleichung:

$$(9)\qquad -\frac{\partial f}{\partial x_1}+\sum_2^m{}^i\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)=0$$

repräsentirt.

Diese drei Gleichungen lassen sich bezw. durch die folgenden ersetzen:

$$(7')\quad [Ff]\equiv\sum_1^m{}^i\left[\frac{\partial F}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right]=0,$$

$$(8')\qquad \sum_1^m{}^i\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\sum_1^m{}^i p_i\frac{\partial F}{\partial p_i}=0,$$

$$(9')\quad (Ff)\equiv\sum_1^m{}^i\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)=0.$$

In der That, die Gleichung (7′) besitzt das Integral F, wobei F die linke Seite der gegebenen partiellen Differentialgleichung (1) bedeutet. Um die $2m-1$ übrigen Integrale zu finden, können wir vermöge der Formel (1) oder (2) die Gröfse c statt p_1 in die Gleichung (7′) als neue Independente einführen, wodurch diese Gleichung, wie man leicht verifizirt, gerade die Form (7) annimmt. Ist also

$$\omega(z, x_1 \,.\,. x_m p_2 \,.\,. p_m c)$$

irgend ein Integral von (7), so erhält man daraus eine Lösung von (7′)!, wenn c durch F ersetzt wird, und umgekehrt verwandelt sich jede Lösung der letzteren Gleichung in eine solche von (7), wenn man darin ψ für p_1 substituirt. Die Integrationsprobleme (7) und (7′) sind daher völlig äquivalent, und dasselbe gilt für (8) und (8′), sowie für (9) und (9′).

Die erste Pfaff'sche Reduktion, welche auf den Ausdruck ∇_0 auszuüben ist, verlangt also die Integration einer der Gleichungen (7) (8) (9), oder, was dasselbe ist, die Ermittelung der $2m-1$ von F unabhängigen Lösungen einer der Gleichungen (7′) (8′) (9′). Dabei ist zu bemerken, dafs im Falle γ) eines dieser $2m-1$ Integrale, nämlich z, von vorneherein bekannt ist.

Man hätte jetzt die Integrale $y_1 \ldots y_{2m-1}$ der Gleichung (7) (bezw. (8), (9)) nebst einer beliebigen andern Funktion t statt der Variabeln (3) in den Pfaff'schen Ausdruck ∇_0, als neue Independente einzuführen, und den so erhaltenen Ausdruck nach der Vorschrift von Kap. IV weiter zu behandeln.

307. Es gilt nun aber die äufserst wichtige Thatsache:

Die erste, auf die Gleichung $\nabla_0 = 0$ anzuwendende Pfaff-Grassmann'sche Reduktion läfst sich so einrichten, dafs die transformirte Gleichung bereits in der reduzirten Form mit m Differentialelementen erscheint, eine weitere Reduktion also nicht mehr erforderlich ist.

Es sei nämlich

$$z^0, x_1^0 \ldots x_m^0 p_2^0 \ldots p_m^0 \tag{10}$$

ein Wertsystem, in dessen Umgebung die Funktion ψ regulär ist. Dann besitzt jede der linearen partiellen Differentialgleichungen (7) (8) (9) ein System von $2m - 1$ Hauptintegralen hinsichtlich $x_1 = x_1{}^0$. Diese Integrale bezeichnen wir in allen drei Fällen mit:

$$\zeta, \xi_2, \ldots \xi_m, \pi_2 \ldots \pi_m. \tag{11}$$

Diese Funktionen der $2m$ Variabeln (3) und der Konstanten c sind alle in der Umgebung der Stelle (10) regulär und reduziren sich vermöge $x_1 = x_1{}^0$ bezw. auf:

$$z, x_2 \ldots x_m, p_2 \ldots p_m.$$

Wenn man jetzt diese $2m - 1$ Funktionen neben x_1 statt der Variabeln (3) als neue Veränderliche einführt, so erhält man die transformirte Gleichung $\nabla_0 = 0$ nach Art. 114 und 115 dadurch, dafs man in ∇_0 die Variable x_1 überall durch $x_1{}^0$, die übrigen Variabeln $z, x_2 \ldots x_m, p_2 \ldots p_m$ dagegen durch die entsprechenden Gröfsen (11) ersetzt. Die transformirte Gleichung ist also die folgende:

$$d\zeta - \pi_2 d\xi_2 - \cdots - \pi_m d\xi_m = 0,$$

mithin hat man identisch:

$$\nabla_0 \equiv \varrho(d\zeta - \pi_2 d\xi_2 - \cdots - \pi_m d\xi_m), \tag{12}$$

und da im Falle α) der Ausdruck ∇_0 die Klasse $2m$ besitzt, so sind die $2m$ Funktionen $\varrho, \zeta, \pi_i, \xi_i$ von einander unabhängig; in diesem Falle haben wir also für ∇_0 durch unser Verfahren ohne weiteres eine *Normalform* erhalten.

308. Im Falle β) sind die $2m - 2$ von z unabhängigen Lösungen der partiellen Differentialgleichung (9) zugleich auch Integrale von (8); sind diese Lösungen bekannt, so ergiebt sich das noch fehlende

$2m - 1^{te}$ Integral von (8) durch eine Quadratur, was ähnlich wie in Art. 143 erkannt wird.

Um dies etwas näher auszuführen, seien

$$\xi_2 \,.\,.\, \xi_m \pi_2 \,.\,.\, \pi_m \tag{13}$$

die (von z freien) Hauptintegrale der Gleichung (9) hinsichtlich $x_1 = x_1^0$; sie sind dann offenbar auch Hauptintegrale von (8). Dann können wir die $2m$ Gröfsen (13) statt $x_2 \,.\,.\, x_m p_2 \,.\,.\, p_m$ als neue Independente in (8) einführen. Die Funktion:

$$p_2 \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdot\cdot + p_m \frac{\partial \psi}{\partial p_m} - \psi,$$

die im gegenwärtigen Falle von z nicht abhängt, nehme hierdurch die Form:

$$u(x_1, \xi_2 \,.\,.\, \xi_m, \pi_2 \,.\,.\, \pi_m, c)$$

an. In den neuen Independenten schreibt sich jetzt die Gleichung (8) folgendermafsen:

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1} + u \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

und diese Gleichung besitzt die Lösung:

$$\zeta \equiv z + \int_{x_1^0}^{x_1} u dx_1.$$

Bei der rechts auszuführenden Quadratur sind die $\xi_i \pi_i$ als Konstante zu behandeln. Es sei jetzt:

$$U(x_1 x_2 \,.\,.\, x_m p_2 \,.\,.\, p_m)$$

der Ausdruck, in den sich $\int_{x_0}^{x} u dx_1$ verwandelt, wenn man nach ausgeführter Quadratur die $\xi_i \pi_i$ wieder durch ihre Ausdrücke in den x und p ersetzt. Da U für $x_1 = x_1^0$ verschwindet, stellen die Funktionen:

$$z + U, \; \xi_2 \,.\,.\, \xi_m \pi_2 \,.\,.\, \pi_m$$

die Hauptintegrale von (8) hinsichtlich $x_1 = x_1^0$ dar. Demnach ist in der Identität (12) die Funktion $\varrho \equiv 1$, und man erhält im Falle β) für ∇_0 folgende *Normalform:*

$$\nabla_0 \equiv d(z + U) - \pi_2 d\xi_2 - \cdot\cdot - \pi_m d\xi_m. \tag{14}$$

Im Falle γ) ist $U \equiv 0$ und man hat:

$$\nabla_0 \equiv dz - \pi_2 d\xi_2 - \cdot\cdot - \pi_m d\xi_m \tag{15}$$

oder, was dasselbe besagt:

(16) $$\nabla_0' \equiv \psi dx_1 + \sum_2^m p_i dx_i \equiv \pi_2 d\xi_2 + \cdots + \pi_m d\xi_m.$$

Damit ist für den Ausdruck ∇_0 in allen Fällen die Normalform hergestellt.

309. Unter den m-gliedrigen Gleichungensystemen, welche den Ausdruck ∇_0 zum Verschwinden bringen, greifen wir insbesondere folgendes heraus:

(17) $$\zeta = c_1;\ \xi_2 = c_2 \,.\,.\, \xi_m = c_m,$$

worin ζ im Falle β) durch $z + U$, im Falle γ) durch z zu ersetzen ist. Es ist dies nach der Bezeichnungsweise des Art. 189 ein *„vollständiges Integraläquivalent"* der Pfaff'schen Gleichung $\nabla_0 = 0$. Indem wir in den Funktionen ζ, ξ_i die Konstante c durch $F(zx_1 \,.\,.\, p_m)$ ersetzen, und dem System (17) die Relation $F = c$ hinzufügen, erhalten wir ein Relationensystem der Form:

(18) $$F(z, x_1 \,.\,.\, p_m) = c;\ F_i(z, x_1 \,.\,.\, p_m) = c_i \qquad (i = 1, 2 \,.\,.\, m).$$

Die Funktionen $F, F_1, \,.\,.\, F_m$ sind augenscheinlich von einander unabhängig, und die Gleichungen (18) definiren, wie aus ihrer Entstehung folgt, für jedes beliebige Wertsystem der arbiträren Konstanten $c, c_1 \,.\,.\, c_m$ eine Element-M_m des Raums $R_{m+1}(z, x_1 \,.\,.\, x_m)$ und zwar eine *Integral-M_m* der gegebenen partiellen Differentialgleichung $F = c$.

Wir verstehen nun unter einem *„vollständigen Integral"* der partiellen Differentialgleichung:

(1) $$F(z, x_1 \,.\,.\, x_m p_1 \,.\,.\, p_m) = c$$

jedes $m+1$-gliedrige Gleichungensystem der Gestalt:

(19) $$\Omega_i(z, x_1 \,.\,.\, x_m, p_1 \,.\,.\, p_m, c, c_1 \,.\,.\, c_m) = 0 \quad (i = 1, 2, \,.\,.\, m+1),$$

welches sich nach den c_i in der Form (18) auflösen läſst, also insbesondere die Relation $F = c$ umfaſst, und welches für jedes beliebige Wertsystem der arbiträren Konstanten c, c_i eine Element-M_m des Raumes R_{m+1}, d. h. also ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m = 0$$

definirt. Verstehen wir unter c keine arbiträre Konstante, sondern einen bestimmten numerischen Wert, etwa die Null, so nennen wir *„vollständiges Integral"* der Gleichung (1) jedes $m+1$-gliedrige Gleichungensystem (19), das für beliebige Werte von $c_1 \,.\,.\, c_m$ eine Element-M_m definirt, und nach Elimination der $c_1 \,.\,.\, c_m$ eine und nur eine Relation in $zx_1 \ldots p_m$, nämlich die Gleichung $F = c$ ergiebt, m. a. W. in der Form (18) aufgelöst werden kann.

Ein vollständiges Integral von (1) besteht demnach aus ∞^m m-fach ausgedehnten Elementvereinen, die alle der Gleichung (1) genügen; und zwar giebt es unter diesen Elementvereinen einen und nur einen, welcher ein bestimmt ausgewähltes Flächenelement $z^0 \ldots p_m^0$, das (1) erfüllt, in sich enthält; es ist dies derjenige durch (19) definirte Elementverein, der den Konstantenwerten:

$$c_i = F_i(z^0, x_1^0 \ldots x_m^0 p_1^0 \ldots p_m^0)$$

entspricht.

Aus der Definition des vollständigen Integrals und aus Art. 189 folgt auch ohne weiteres:

Damit ein Gleichungensystem der Form:

$$\zeta(z, x_1 \ldots x_m p_2 \ldots p_m c) = c_1; \; \xi_i(z, \ldots p_m c) = c_i \qquad (i = 2 \ldots m)$$

für beliebige Werte $c_1 \ldots c_m$ mit $F = c$ zusammen eine Integral-M_m dieser partiellen Differentialgleichung darstelle, ist nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, daſs der Pfaff'sche Ausdruck ∇_0 sich in der Form (12) darstellen lasse.

Ferner erkennt man, daſs eine partielle Differentialgleichung durch Angabe eines vollständigen Integrals eindeutig bestimmt ist.

310. Soll das vollständige Integral (19) aus lauter *Flächen* des Raums R_{m+1} bestehen, so darf sich durch Elimination der Gröſsen $p_1 \ldots p_m$ aus (19) nur eine einzige Relation:

$$V(z, x_1 x_2 \ldots x_m, c, c_1 \ldots c_m) = 0 \tag{20}$$

ergeben. Die übrigen m Relationen (19) können jetzt nach Kap. VII, § 1 die Form:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m), \tag{21}$$

erhalten und die Elimination der $c_1 \ldots c_m$ aus (20) und (21) muſs die Relation $F = c$ und nur diese ergeben. Man pflegt dann die Gleichung (20) für sich als ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung $F = c$ zu bezeichnen.

Ein vollständiges Integral (20) muſs jedenfalls auf die Form:

$$z = \Phi(x_1 x_2 \ldots x_m c c_1 \ldots c_m) \tag{22}$$

gebracht werden können; denn Elementvereine, deren zugehörige Punktmannigfaltigkeiten cylindrisch und zur z-Axe parallel sind, bleiben beim Gebrauch der Elementkoordinaten $z x_i p_i$ überhaupt auſser Betracht.

Die Gleichungen (21) werden jetzt:

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots m). \tag{23}$$

Damit sich dann durch Elimination von $c_1 \ldots c_m$ aus (22) (23) nur *eine* Gleichung $F = c$ ergebe, ist offenbar notwendig und hinreichend, dafs einer der beiden folgenden Fälle stattfinde:

1) Die Determinante:

$$\left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial c_k} \right| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots m)$$

ist nicht identisch null. Dann lassen sich die c_i als Funktionen von $x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m$ mittels (23) ausdrücken und in (22) substituiren, wodurch eine partielle Differentialgleichung vom Typus α) entsteht.

2) Die obige Determinante ist identisch null, nicht aber alle ihre $m - 1$-zeiligen Unterdeterminanten. Ist insbesondere etwa die Determinante:

$$\left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial c_k} \right| \qquad (i, k = 2, 3, \ldots m)$$

nicht identisch null, so kann man aus den letzten $m - 1$ Gleichungen (23) die $c_2 c_3 \ldots c_m$ berechnen, und in die erste Gleichung (23) substituiren, wodurch c_1 aus dieser Gleichung von selbst fortfällt und eine nach p_1 aufgelöste partielle Differentialgleichung vom Typus β) oder γ) entsteht.

Ist $\varphi(x_1 \ldots x_m)$ eine Integralfunktion der gegebenen partiellen Differentialgleichung $F = c$, so ist im Falle β) auch $\varphi + C$, im Falle γ) auch $C\varphi + C'$ eine Integralfunktion, wenn C, C' arbiträre Konstante bedeuten. Daraus folgt sofort, dafs im Falle β) jedes aus Flächen bestehende vollständige Integral in der Form:

$$z = \psi(x_1 x_2 \ldots x_m c, c_2 \ldots c_m) + c_1, \tag{24}$$

im Falle γ) in der Form:

$$z = c_2 \psi(x_1 \ldots x_m c, c_3 \ldots c_m) + c_1 \tag{25}$$

vorausgesetzt werden darf; diese Formen des vollständigen Integrals sind überdies für die Gleichungen vom Typus β) bezw. γ) charakteristisch.

Damit die Gleichung (24) das vollständige Integral einer Gleichung vom Typus β) darstelle, ist nach dem Obigen notwendig und hinreichend, dafs in dem Schema:

$$\left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial c_k} \right\| \qquad (i = 1 \ldots m;\ k = 2 \ldots m),$$

nicht alle $m - 1$-reihigen Determinanten identisch verschwinden. Damit die Relation (25) das vollständige Integral einer Gleichung γ)

sei, ist notwendig und hinreichend, daſs in der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} & .. & \dfrac{\partial \psi}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial c_3} & .. & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_m \partial c_3} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial c_m} & .. & \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_m \partial c_m} \end{Vmatrix}$$

nicht alle $m - 1$-reihigen Determinanten verschwinden.

311. Ist die gegebene partielle Differentialgleichung *linear*, hat sie also die Form:

$$(26) \qquad p_1 = A_2 p_2 + \cdot\cdot + A_m p_m - B,$$

worin $A_2 .. A_m, B$ Funktionen von $z, x_1 .. x_m$ bedeuten, so nimmt die Gleichung (7) folgende Form an:

$$(27) \quad -\frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdot\cdot + A_m \frac{\partial f}{\partial x_m} + B \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_2^m {}^i\, C_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0,$$

wobei wir für die Koeffizienten der Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial p_i}$ eine abkürzende Bezeichnung gewählt haben. Die Hauptintegrale der Gleichung:

$$(28) \qquad -\frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdot\cdot + A_m \frac{\partial f}{\partial x_m} + B \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

welche sich für $x_1 = x_1^0$ bezw. auf $z, x_2 .. x_m$ reduziren, mögen $\zeta, \xi_2 .. \xi_m$ genannt werden. Diese Funktionen, die von den p_i nicht abhängen, sind offenbar auch Hauptintegrale der Gleichung (27) hinsichtlich $x_1 = x_1^0$. Die Relationen:

$$(29) \qquad \zeta = c_1;\ \xi_2 = c_2\ ..\ \xi_m = c_m$$

definiren nun nach Art. 53 die „charakteristischen Kurven" der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung (28), oder auch der nicht homogenen Gleichung (26). Darnach ist jede Element-M_m^1 des R_{m+1}, die sich an irgend eine charakteristische Kurve der Gleichung (28) anschlieſst, d. h. also durch die $m + 1$ Relationen (26) (29) definirt wird, von unserm gegenwärtigen Standpunkt aus als ein Integral der partiellen Differentialgleichung (26) zu betrachten, und die Gesamtheit dieser Element-M_m^1 bildet ein vollständiges Integral dieser Gleichung.

312. Im Falle γ) nimmt das in Art. 309 erhaltene vollständige Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung (1) folgende Form an:

$$(30) \qquad p_1 = \psi;\ z = c_1;\ \xi_2 = c_2\ ..\ \xi_m = c_m.$$

Da im gegenwärtigen Falle der Pfaff'sche Ausdruck:

$$\nabla_0' \equiv \psi(x_1 \cdot\cdot x_m p_2 \cdot\cdot p_m c) dx_1 + p_2 dx_2 + \cdot\cdot + p_m dx_m$$

die Klasse $2m - 2$ besitzt, so ist das zugehörige vollständige System V zweigliedrig und besteht aus der partiellen Differentialgleichung (9) und der folgenden:

$$p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + p_3 \frac{\partial f}{\partial p_3} + \cdot\cdot + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m} = 0.$$

Aus der Identität (16) folgt jetzt sofort, dafs die Funktionen ξ_i diesem vollständigen System V genügen müssen, also in den Variabeln $p_2 \cdot\cdot p_m$ homogen nullter Ordnung sind. Aus den letzten $m-1$ Gleichungen (30) ergiebt sich demnach durch Elimination der p_i mindestens *eine* Relation in $x_1 \,..\, x_m$ allein, und das vollständige Integral (30) besteht daher nicht aus Flächen des R_{m+1}, sondern aus solchen Elementvereinen, deren zugehörige Punktmannigfaltigkeiten weniger als m-fach ausgedehnt sind. Aber auch für partielle Differentialgleichungen vom Typus α) oder β) kann es eintreten, dafs sich durch Elimination der Variabeln $p_2 \,..\, p_m$ aus (17) mehr als eine Relation in $z, x_1 \,..\, x_m$ ergiebt.

313. Durch eine einfache Modifikation[1]) der Methode des Art. 307 gelingt es aber in allen Fällen, ein aus Flächen bestehendes vollständiges Integral herzustellen. In der That läfst sich die Identität (12) so schreiben:

$$\nabla_0 \equiv \varrho[d(\zeta - \pi_2 \xi_2 - \cdot\cdot - \pi_m \xi_m) + \xi_2 d\pi_2 + \cdot\cdot + \xi_m d\pi_m].$$

Mithin liefern die Relationen:

$$(31) \qquad \zeta - \pi_2 \xi_2 - \cdot\cdot - \pi_m \xi_m = \gamma; \; \pi_2 = \gamma_2 \cdot\cdot \pi_m = \gamma_m$$

mit $p_1 = \psi$ zusammen ein vollständiges Integral dieser Gleichung, das offenbar aus Flächen besteht. Denn die $m-1$ letzten Gleichungen (31) lassen sich nach $p_2, \,..\, p_m$ auflösen, da sich ja die π_i für $x_1 = x_1^0$ bezw. auf p_i reduziren, also die nach $p_2 \,..\, p_m$ genommene Funktionaldeterminante der Funktionen $\pi_2 \,..\, \pi_m$ für $x_1 = x_1^0$ den Wert 1 annimmt, und demnach nicht identisch verschwindet.

Wir können jetzt folgendes Theorem aussprechen:

Um ein vollständiges, aus ∞^m Flächen bestehendes Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$(1) \qquad p_1 = \psi(z, x_1 \,..\, x_m p_2 \,..\, p_m c)$$

zu erhalten, bestimme man im Falle α) *die hinsichtlich* $x_1 = x_1^0$ *genommenen Hauptintegrale* ζ, ξ_i, π_i *der linearen partiellen Differentialgleichung:*

1) Mayer IV.

$$(7) -\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_2^m {}^i \left[\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_i}\right] + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\sum_2^m {}^i p_i \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \psi\right) = 0.$$

Drückt man dann die Variabeln $p_2 \,.\,. p_m$ mittels der Relationen:

$$\pi_2 = \gamma_2 \,.\,. \pi_m = \gamma_m$$

als Funktionen von $x_1 \,.\,. x_m \gamma_2 \,.\,. \gamma_m$ aus, und substituirt die so erhaltenen Werte in die Gleichung:

$$\zeta - \pi_2 \xi_2 - \cdots - \pi_m \xi_m = \gamma_1,$$

so erhält man das gesuchte vollständige Integral in der Form:

$$\Phi(z, x_1 \,.\,. x_m,\ c, \gamma_2 \,.\,. \gamma_m) = \gamma_1.$$

Ist ψ von z frei, so bestimme man die Hauptintegrale $\xi_2 \,.\,. \xi_m \pi_2 \,.\,. \pi_m$ der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(9) \qquad -\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_2^m {}^i \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = 0$$

hinsichtlich $x_1 = x_1^0$. Sodann berechne man die Gröſsen $x_2 \,.\,. x_m p_2 \,.\,. p_m$ mittels der Gleichungen:

$$\xi_2 = c_2 \,.\,. \xi_m = c_m;\ \pi_2 = \gamma_2 \,.\,. \pi_m = \gamma_m$$

als Funktionen von x_1, $c_2 \,.\,. c_m\, \gamma_2 \,.\,. \gamma_m$ und substituire die erhaltenen Werte in den Ausdruck:

$$p_2 \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial \psi}{\partial p_m} - \psi,$$

der hierdurch in $u(x_1,\ c_2 \,.\,. c_m,\ \gamma_2 \,.\,. \gamma_m,\ c)$ übergehe. Hierauf berechne man das Integral:

$$\int_{x_1^0}^{x_1} u\,dx_1 = \Omega(x_1,\ c_2 \,.\,. c_m \gamma_2 \,.\,. \gamma_m,\ c)$$

und bezeichne mit

$$\Phi(x_1 x_2 \,.\,. x_m,\ \gamma_2 \,.\,. \gamma_m,\ c)$$

diejenige Funktion, die entsteht, wenn man aus dem Ausdruck:

$$-\Omega(x_1, \xi_2, \cdots \xi_m, \gamma_2 \cdots \gamma_m, c) + \pi_2 \xi_2 + \cdots + \pi_m \xi_m$$

die Variabeln $p_2 \,.\,. p_m$ mittels der Gleichungen:

$$(32) \qquad \pi_2 = \gamma_2 \,.\,. \pi_m = \gamma_m$$

eliminirt. Das gesuchte vollständige Integral hat dann die Form:

$$(33) \qquad z = \gamma_1 + \Phi(x_1 x_2 \,.\,. x_m, \gamma_2 \,.\,. \gamma_m, c).$$

Der Fall γ) unterscheidet sich von dem Falle β) nur dadurch, dafs $\Omega \equiv 0$ wird.

314. Die Funktion Φ hat in dem zuletzt genannten Falle die Form:

$$\gamma_2 \bar{\xi}_2 + \cdots + \gamma_m \bar{\xi}_m,$$

wobei $\bar{\xi}_i$ aus ξ_i dadurch entsteht, dafs man darin die p_k durch ihre aus $\pi_i = \gamma_i$ entnommenen Ausdrücke ersetzt. Nun sind aber die Funktionen ξ_i in den Variabeln $p_2 \ldots p_m$ homogen nullter Ordnung; die π_i sind ferner in den p homogen erster Ordnung, wie man leicht aus der Identität (16) des Art. 308 erkennt. Daraus folgt sofort, dafs die Funktionen $\bar{\xi}_i$ nur von den Verhältnissen der arbiträren Konstanten $\gamma_2 \ldots \gamma_m$ abhängen. Schreibt man also statt $\frac{\gamma_3}{\gamma_2} \cdots \frac{\gamma_m}{\gamma_2}$ einfach $\gamma_2 \ldots \gamma_m$, so nimmt das Integral (33) im Falle γ) folgende Gestalt an:

$$(34) \qquad z = \gamma_2 \varphi(x_1 x_2 \ldots x_m, c, \gamma_3 \ldots \gamma_m) + \gamma_1,$$

was mit einer Bemerkung des Art. 310 übereinstimmt. Wenn wir nun im Falle γ) die zweite der in Art. 302 gegebenen Definitionen des Integralbegriffs bevorzugen wollen, so werden wir unter einem „*vollständigen Integral*" der partiellen Differentialgleichung:

$$(1) \; F\left(x_1 \ldots x_m, \frac{p_1}{p_m} \cdots \frac{p_{m-1}}{p_m}\right) = c, \quad \text{oder} \quad p_1 = \psi(x_1 \ldots x_m p_2 \ldots p_m, c),$$

jedes m-gliedrige Gleichungensystem:

$$(35) \qquad F = c, \; \Omega_i\left(x_1 \ldots x_m, \frac{p_1}{p_m} \cdots \frac{p_{m-1}}{p_m}\right) = \gamma_i \quad (i = 1 \ldots m - 1)$$

verstehen, welches für jedes beliebige Wertsystem c, γ_i eine Element-M_{m-1} des Raums $R_m(x_1 \ldots x_m)$ definirt, d. h. also die Pfaff'sche Gleichung:

$$\nabla' \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m = 0$$

befriedigt. Aus dieser Definition folgt dann ohne weiteres:

Sollen die Gleichungen:

$$\xi_i\left(x_1 \ldots x_m, \frac{p_1}{p_m} \cdots \frac{p_{m-1}}{p_m}, c\right) = \gamma_i \qquad (i = 2, 3, \ldots m)$$

mit $F = c$ zusammen ein vollständiges Integral dieser Gleichung bilden, so ist dazu notwendig und hinreichend, dafs der Pfaff'sche Ausdruck:

$$\psi dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_m dx_m$$

sich in der Form:

$$\pi_2 d\xi_2 + \cdots + \pi_m d\xi_m$$

darstellen lasse.

Soll ein vollständiges Integral (35) aus lauter Flächen des R_m bestehen, so mufs die Elimination der Verhältnisse $\frac{p_i}{p_m}$ aus (35) eine und nur eine Relation in $x_1 \dots x_m$ und den Konstanten ergeben.

Ist dies der Fall, und denken wir uns diese eine Relation in der Form:

$$\varphi(x_1 \dots x_m, c, \gamma_3 \dots \gamma_m) + \gamma_2 = 0 \tag{36}$$

geschrieben, so können die $m - 1$ übrigen Relationen (35) auf die Gestalt:

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_m = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} : \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} : \cdots : \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \tag{37}$$

gebracht werden (Art. 181), und die partielle Differentialgleichung $F = c$ ergiebt sich, indem man aus den $m - 1$ Relationen (37) die $m - 2$ Konstanten $\gamma_2 \dots \gamma_m$ eliminirt. Umgekehrt, liefert diese Elimination nur die eine Gleichung $F = c$, so ist (36) ein vollständiges Integral von (1) in der gegenwärtigen Bedeutung dieses Begriffs.

Hat man im Falle γ) nach der Methode der vorigen Nr. ein vollständiges Integral (34) im früheren Sinne bestimmt, so liefert die Relation (36) ein vollständiges Integral nach der zweiten Definition. In der That ergiebt sich ja der Annahme nach durch Elimination von $\gamma_2 \dots \gamma_m$ aus den Gleichungen:

$$p_i = \gamma_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2 \dots m),$$

oder, was dasselbe besagt, durch Elimination von $\gamma_3 \dots \gamma_m$ aus den Relationen (37) nur die *eine* Gleichung $F = c$. Umgekehrt, kennt man ein vollständiges Integral (36) in der zweiten Bedeutung dieses Begriffs, so ist (34) ein vollständiges Integral im ursprünglichen Sinne, da ja der Annahme nach φ und infolge dessen überhaupt jede Funktion $f(\varphi)$ eine Integralfunktion der partiellen Differentialgleichung $F = c$ ist (Art. 298, 310).

§ 3. Variation der Konstanten.

315. Indem wir alle Bezeichnungen des vorigen § beibehalten, denken wir uns den Pfaff'schen Ausdruck:

$$\nabla_0 \equiv dz - \psi(z, x_1 \cdots x_m p_2 \cdots p_m) dx_1 - p_2 dx_2 - \cdots - p_m dx_m$$

nach der Methode des Art. 307 auf die Normalform:

$$\nabla_0 \equiv \varrho(d\zeta - \pi_2 d\xi_2 - \cdots - \pi_m d\xi_m) \tag{1}$$

gebracht, worin die Funktionen ζ, π_i, ξ_i an der Stelle

$$(2) \qquad z^0 x_1^0 \dots x_m^0 p_2^0 \dots p_m^0$$

regulär sind, und die Hauptintegrale der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(3) \quad -\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_2^m{}_i \left[\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_i}\right] + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\sum_2^m{}_i p_i \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \psi\right) = 0$$

hinsichtlich $x_1 = x_1^0$ bedeuten. Über die Stelle (2) wird dabei nur vorausgesetzt, dafs ψ an derselben regulär ist.

Um jetzt in den $2m$ Variabeln $z, x_1 \dots x_m p_2 \dots p_m$ alle m-gliedrigen Gleichungensysteme zu erhalten, welche die Pfaff'sche Gleichung $\nabla_0 = 0$ erfüllen, verstehe man unter r eine beliebige Zahl der Reihe $1, 2, \dots m$, wähle die Relationen:

$$(4) \qquad \varphi_i(\zeta, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots r)$$

beliebig, aber so, dafs sie nach ζ und nach $r - 1$ von den Gröfsen ξ_i auflösbar sind, und füge die $m - r$ Gleichungen hinzu, die sich durch Nullsetzen aller $r + 1$-reihigen Determinanten der Matrix:

$$(5) \qquad \left\| \begin{matrix} -1, & \pi_2, & \pi_3 & \dots & \pi_m \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_3} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial \zeta} & \frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi_3} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi_m} \end{matrix} \right\|$$

ergeben. Damit dieses m-gliedrige Gleichungensystem im Sinne von Art. 40 an der Stelle (2) regulär sei, wenn man darin $z x_1 \dots x_m p_2 \dots p_m$ als Variabeln betrachtet, ist nach Art. 45 notwendig und hinreichend, dafs es, als System mit den Variabeln ζ, ξ_i, π_i aufgefafst, an der Stelle

$$\zeta = z^0, \ \xi_i = x_i^0, \ \pi_i = p_i^0$$

regulär sei. Wir haben daher den Funktionen φ_i folgende Bedingungen aufzuerlegen: sie müssen an der Stelle $\zeta = z^0$, $\xi_i = x_i^0$ regulär sein und verschwinden, ferner dürfen in der Matrix:

$$(6) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_3} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial \zeta} & \frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi_3} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi_m} \end{matrix} \right\|$$

an der genannten Stelle nicht alle diejenigen r-reihigen Determinanten null sein, welche die erste Kolonne enthalten; es sei z. B. die aus den

r ersten Spalten von (6) bestehende Determinante daselbst von Null verschieden. Endlich müssen alle $r+1$-reihigen Determinanten des Schemas (5) verschwinden, wenn man die ζ, ξ_i, π_i bezw. durch z^0, x_i^0, p_i^0 ersetzt. Unter diesen Voraussetzungen läſst sich in der That unser m-gliedriges Gleichungensystem auf folgende Form bringen:

$$(7)\quad \begin{cases} \zeta = Z(\xi_{r+1}\,..\,\xi_m);\ \xi_i = \Xi_i(\xi_{r+1}\,..\,\xi_m) & (i = 2, 3\,..\,r) \\ \pi_{r+k} = A_{k1} + A_{k2}\pi_2 + \cdot\cdot + A_{kr}\pi_r & (k = 1, 2\cdots m - r), \end{cases}$$

worin die Funktionen Z, Ξ_i, A_{ki} gewöhnliche Potenzreihen der Gröſsen

$$\xi_{r+1} - x^0_{r+1}, \,..\, \xi_m - x^0_m$$

bedeuten. Daſs das System (7) nun seinerseits die Variabeln

$$z, x_2\,..\,x_r p_{r+1}\,..\,p_m$$

als gewöhnliche Potenzreihen der Gröſsen:

$$p_2 - p^0_2\,..\,p_r - p^0_r,\ x_1 - x^0_1,\ x_{r+1} - x^0_{r+1}\,..\,x_m - x^0_m$$

darzustellen erlaubt, folgt aufs Leichteste aus den Eigenschaften der Hauptintegrale und den Sätzen von Art. 38 und 40.

316. Die Konstante p_1^0 werde durch die Gleichung:

$$(8)\qquad p^0_1 = \psi(z^0 x^0_1\,..\,x^0_m\, p^0_2\,..\,p^0_m, c)$$

definirt. Wir behaupten nun: *die vorige Methode liefert überhaupt alle Integrale:*

$$(9)\qquad F = c, \Omega_i(z, x_1\,..\,x_m p_1\,..\,p_m) = 0 \qquad (i = 1, 2\,..\,m)$$

der gegebenen Gleichung $F = c$, welche im Sinne von Art. 40 an der Stelle:

$$(10)\qquad z^0 x^0_1\,..\,x^0_m\, p^0_1\,..\,p^0_m$$

regulär sind.

In der That, ist das System (9) an der Stelle (10) regulär, und eliminirt man p_1 mittels $F = c$ oder $p_1 = \psi$ aus den letzten m Gleichungen (9), so verwandeln sich diese in ein Relationensystem:

$$(11)\qquad \psi_i(z, x_1\,..\,x_m p_2\,..\,p_m, c) = 0 \qquad (i = 1\,..\,m),$$

welches an der Stelle (2) regulär ist und die Pfaff'sche Gleichung $\nabla_0 = 0$ befriedigt. Bringen wir jetzt ∇_0 wie vorhin auf die Normalform (1), *so kann die Funktion ϱ vermöge* (11) *nicht null sein;* denn man hat:

$$1 \equiv \varrho\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \pi_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial z} - \cdot\cdot - \pi_m \frac{\partial \xi_m}{\partial z}\right),$$

und aus den Eigenschaften der Hauptintegrale folgt, daſs $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ vermöge $x_1 = x_1^0$ den Wert 1 annimmt, wärend die Ableitungen $\frac{\partial \xi_2}{\partial z} \ldots \frac{\partial \xi_m}{\partial z}$ vermöge dieser Substitution alle verschwinden; ϱ nimmt also für $x_1 = x_1^0$ den Wert 1 an, ist somit an der Stelle (10) von Null verschieden.

Darnach muſs das Gleichungensystem (11) die Pfaff'sche Gleichung:

$$d\zeta - \pi_2 d\xi_2 - \cdots - \pi_m d\xi_m = 0 \tag{12}$$

befriedigen, und läſst sich daher (Kap. VII) in ein Gleichungensystem zwischen den $2m-1$ Variabeln $\zeta, \pi_i \xi_i$ umsetzen, was zu zeigen war.

Bei allen unseren Untersuchungen ziehen wir natürlich nur solche Wertsysteme (10) in Betracht, in deren Umgebung die linke Seite der gegebenen partiellen Differentialgleichung:

$$F(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = c \tag{13}$$

regulär ist. Ist jetzt (10) ein solches Wertsystem, welches überdies die Gleichung (13) für einen bestimmten numerischen Wert von c erfüllt, und sind an der Stelle (10) nicht alle m Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial p_i}$ gleich null, so dürfen wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, daſs insbesondere $\frac{\partial F}{\partial p_1}$ daselbst nicht verschwinde. Dann läſst sich die Gleichung (13) in der Form $p_1 = \psi$ auflösen, und ψ ist an der Stelle (2) regulär. Jedes Integral (9), das an einer solchen Stelle (10) regulär ist, kann also durch die Methode der vorigen Nr. ermittelt werden. Damit ist der folgende wichtige Satz gewonnen:

Jedes Integral der gegebenen Gleichung (13), *welches nicht nach der Methode des Art. 315 erhalten werden kann, befriedigt notwendig die* $m+1$ *partiellen Differentialgleichungen:*

$$F = c,\ \frac{\partial F}{\partial p_1} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial p_2} = 0,\ \cdots \frac{\partial F}{\partial p_m} = 0. \tag{14}$$

Wenn c nicht eine arbiträre, sondern eine bestimmte numerische Konstante, etwa die Null, bedeutet, so wird vorausgesetzt, daſs die m Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial p_i} = 0$ nicht *eine Folge* von $F = c$ sind, daſs also die gegebene Gleichung (13) hinsichtlich der Variabeln p_i den Anforderungen genügt, die wir in Art. 40 an jedes von uns zu betrachtende Relationensystem gestellt haben.

Eine Integral-M_m der Gleichung (13), welche die partiellen Differentialgleichungen (14) und auſserdem noch die folgenden:

$$(15) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, m),$$

erfüllt, heifst „*singulär*". Ebenso bezeichnen wir ein Flächenelement $z x_i p_i$, welches die Gleichungen (14) (15) erfüllt, als ein *singuläres Flächenelement* der partiellen Differentialgleichung $F = c$. Eine singuläre Integral-M_m besteht darnach aus lauter singulären Flächenelementen. Es braucht nicht notwendig singuläre Integrale, ja nicht einmal singuläre Flächenelemente zu geben, wie schon die Annahme $F \equiv p_1$ zeigt. Allgemein erkennt man folgendes:

Es sei F beliebig, aber so gewählt, dafs die hinsichtlich $z, p_1, .. p_m$ genommene Funktionaldeterminante der linken Seiten von (14) nicht vermöge $F = c$ verschwinde. Dann kann man $z, p_1 .. p_m$ aus (14) als Funktionen von $x_1 .. x_m$ berechnen, und die so erhaltene Gleichung:

$$z = \varphi(x_1 \,.\,.\, x_m\, c)$$

stellt das singuläre Integral dar, falls ein solches überhaupt existirt. Dieselbe Gleichung ergiebt sich aber auch durch Elimination der p_i aus den Relationen:

$$F_1 = c, \; \frac{\partial F_1}{\partial p_1} = 0, \,.\,.\, \frac{\partial F_1}{\partial p_m} = 0,$$

worin

$$F_1 \equiv F(z, x_1 \,.\,.\, x_m, p_1 + \gamma_1 \,.\,.\, p_m + \gamma_m)$$

gesetzt ist, und die γ_i arbiträre Konstante bedeuten. Es ist aber klar, dafs die Fläche $z = \varphi$ die partielle Differentialgleichung $F_1 = c$ nicht für beliebige γ erfüllen kann, da sonst F die Variabeln p_i überhaupt nicht enthielte. Mit Hülfe jeder Gleichung $F = c$, welche die obigen Bedingungen erfüllt, lassen sich sonach unbegrenzt viele partielle Differentialgleichungen aufstellen, die kein singuläres Integral besitzen.

Die etwa vorhandenen Integrale, welche die Gleichungen (14), nicht aber alle Gleichungen (15) erfüllen, werden im nächsten § gelegentlich zur Sprache kommen. Wir bemerken gleich hier, dafs ein solches Integral sicher keine Fläche

$$z = \varphi(x_1 \,.\,.\, x_n)$$

sein kann; denn $F = c$ wird zur Identität, wenn darin z durch φ und die p_i durch $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ ersetzt werden, und durch Differentiation dieser Identität folgen die Relationen:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} + \sum \frac{\partial F}{\partial p_s} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_s} = 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, m),$$

also bestehen mit Rücksicht auf (14) in der That die Beziehungen (15), was zu zeigen war.

317. Unter den m-gliedrigen Integraläquivalenten der Pfaff'schen Gleichung (12) betrachten wir insbesondere das folgende:

$$(16) \qquad \zeta = \varphi(\xi_2 \xi_3 \,.\,.\, \xi_m); \; \pi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \qquad (i = 2, 3 \,.\,.\, m).$$

Dabei soll φ an der Stelle $\xi_2 = x_2^0 \,.\,.\, \xi_m = x_m^0$ regulär sein und den Wert z^0 annehmen; ferner sollen die Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}$ daselbst bezw. die Werte p_i^0 besitzen. Ersetzt man nunmehr die Gröfsen $\zeta \xi_i \pi_i$ durch ihre Ausdrücke in den Variabeln:

$$(2) \qquad z x_1 \,.\,.\, x_m p_2 \,.\,.\, p_m,$$

so folgt aus der Natur der Hauptintegrale sofort, dafs die nach $z, p_2 \,.\,.\, p_m$ genommene Funktionaldeterminante der m Funktionen:

$$\zeta - \varphi; \; \pi_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \,.\,.\, \pi_m - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_m}$$

sich vermöge $x_1 = x_1^0$ auf die Einheit reduzirt. Darnach läfst sich das Gleichungensystem (16) folgendermafsen auflösen:

$$(17) \qquad z = \chi(x_1 \,.\,.\, x_m); \; p_i = \chi_i(x_1 \,.\,.\, x_m) \qquad (i = 2, 3 \,.\,.\, m).$$

Die χ, χ_i sind an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_m^0$ regulär und besitzen daselbst die Werte z^0, p_i^0; χ reduzirt sich vermöge $x_1 = x_1^0$ auf $\varphi(x_2 \,.\,.\, x_m)$, χ_i auf $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Die Gleichungen (17) bilden zusammen mit der folgenden:

$$(18) \qquad p_1 = \chi_1(x_1 x_2 \,.\,.\, x_n),$$

die aus der gegebenen partiellen Differentialgleichung $p_1 = \psi$ durch Elimination von $z p_2 \,.\,.\, p_m$ entsteht, ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung:

$$\nabla \equiv dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m = 0,$$

also hat man:

$$\chi_i \equiv \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, m).$$

Es sei jetzt umgekehrt von der partiellen Differentialgleichung $p_1 = \psi$ ein Integral (17) (18) bekannt, das die soeben aufgezählten Eigenschaften besitzt. Die Gröfsen $z, x_2 \,.\,.\, x_m p_2 \,.\,.\, p_m$ lassen sich nun folgendermafsen durch die Hauptintegrale von (3) darstellen:

$$z = \mathfrak{P}(x_1, \zeta, \xi_2 \,..\, \xi_m, \pi_2 \,..\, \pi_m);$$
$$p_i = \mathfrak{P}_i(x_1, \zeta, \xi_2 \,..\, \xi_m, \pi_2 \,..\, \pi_m) \qquad (i = 2, 3, \,..\, m);$$
$$x_i = \mathfrak{Q}_i(x_1, \zeta, \xi_2 \,..\, \xi_m, \pi_2 \,..\, \pi_m).$$

Die $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_i \mathfrak{Q}_i$ sind gewöhnliche Potenzreihen der Gröfsen:

$$x_1 - x_1^0, \; \zeta - z^0, \; \xi_i - x_i^0, \; \pi_i - p_i^0$$

und reduziren sich vermöge $x_1 = x_1^0$ bezw. auf ζ, π_i, ξ_i. Substituirt man diese Ausdrücke in (17) und beachtet, dafs die entstehenden Gleichungen ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung (12) bilden, also von x_1 ganz unabhängig sein müssen, so kann man in dem Resultat unserer Substitution, ohne dasselbe zu ändern, x_1 durch x_1^0 ersetzen, und erhält so:

$$\zeta = \chi(x_1^0, \xi_2 \,..\, \xi_m); \; \pi_i = \frac{\partial \chi(x_1^0, \xi_2 \,..\, \xi_m)}{\partial \xi_i},$$

also wiederum das System (16). Damit ist der nachstehende fundamentale Satz bewiesen:

Ist $\varphi(x_2 x_3 \,..\, x_m)$ eine arbiträre, an der Stelle $x_2^0 \,..\, x_m^0$ reguläre Funktion, schreibt man ferner:

$$z^0 = \varphi(x_2^0 \,..\, x_m^0); \; p_i^0 = \frac{\partial \varphi(x_2^0 \,..\, x_m^0)}{\partial x_i^0}; \qquad (i = 2, 3, \,..\, m),$$

und ist die Funktion $\psi(z, x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m, c)$ an der Stelle:

$$z^0, x_1^0 \,..\, x_m^0 \, p_2^0 \,..\, p_m^0$$

regulär, so besitzt die partielle Differentialgleichung:

$$(19) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_1} = \psi\left(z, x_1 \,..\, x_m \frac{\partial z}{\partial x_2} \,..\, \frac{\partial z}{\partial x_m} c\right)$$

eine und nur eine Integralfunktion $z = \chi(x_1 \,..\, x_m)$, die an der Stelle $x_1^0 \,..\, x_m^0$ regulär ist und vermöge $x_1 = x_1^0$ in die vorgeschriebene Funktion $\varphi(x_2 \,..\, x_m)$ übergeht.

Dafs es nur *ein* Integral z der im Satze geforderten Eigenschaft geben kann, erkennt man auch durch eine ähnliche Überlegung wie am Schlusse des Art. 62. Mit Hülfe der Relationen nämlich, die sich ergeben, wenn die Gleichung (19) unbegrenzt oft nach $x_1 \,..\, x_m$ differentirt und dabei z und seine Ableitungen als Funktionen der x betrachtet, lassen sich die Werte, welche die Differentialquotienten:

$$(20) \qquad \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \quad + \alpha_m} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \,..\, \partial x_m^{\alpha_m}} \qquad (\alpha_1 \geqq 1)$$

an der Stelle $x_1^0 \,..\, x_m^0$ annehmen, der Reihe nach berechnen, wenn z^0

und die Anfangswerte aller Ableitungen (20), für die $\alpha_1 = 0$ ist, als bekannt vorausgesetzt werden. Darnach ist die nach Potenzen von $x_1 - x_1^0 \ldots x_m - x_m^0$ fortschreitende Taylor'sche Entwickelung der gesuchten Integralfunktion $z = \chi$ durch die aufgestellten Bedingungen eindeutig bestimmt. Der Beweis für die Konvergenz dieser Reihe folgt aus obigem Satze, läſst sich aber auch direkt führen, und liefert dann eine von der Theorie des Pfaff'schen Problems unabhängige Begründung unseres Satzes.

Aus diesem Satze folgt ferner die Thatsache:

Wird bei der Methode des Art. 315 die Anzahl der willkürlichen Relationen (4) *gröſser als eins* gewählt, so ist das so gewonnene Integral entweder eine Element-M_m^ϱ $(\varrho < m)$, oder eine Integralfläche:

$$z = \chi(x_1 \ldots x_m),$$

wobei aber dann χ an der Stelle $x_1^0 \ldots x_m^0$ *sicher nicht regulär* ist. Dies hindert natürlich nicht, daſs die $m+1$ Definitionsgleichungen der betreffenden Integral-M_m^m an der Stelle $z^0\, x_1^0 \ldots x_m^0\, p_1^0 \ldots p_m^0$ im Sinne von Art. 40 regulär sind, wie in Art. 315 gezeigt wurde.

Schlieſslich ergiebt sich aus unserem Satze noch folgendes Korollar:

Es bedeute $\varphi(x_2 \ldots x_m c_1 c_2 \ldots c_m)$ *eine gewöhnliche Potenzreihe der* $2m-1$ *Gröſsen:*

$$x_2 - x_2^0, \ldots x_m - x_m^0, \; c_1 - c_1^0, \ldots c_m - c_m^0,$$

und die Determinante:

$$\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial c_k} \right| \qquad (i, k = 2, \ldots m)$$

sei an der Stelle

$$x_2^0 \ldots x_m^0\, c_1^0 \ldots c_m^0$$

nicht null; ferner werde gesetzt:

$$z^0 = \varphi(x_2^0 \ldots c_m^0); \; p_i^0 = \frac{\partial \varphi(x_2^0 \ldots c_m^0)}{\partial x_i^0}, \; p_1^0 = \psi(z^0, x_1^0 \ldots p_m^0 c)$$

und es sei die Funktion ψ *an der Stelle:*

$$z^0 x_1^0 \ldots x_m^0\, p_1^0 \ldots p_m^0$$

regulär. Dann besitzt die partielle Differentialgleichung (19) *ein und nur ein vollständiges Integral:*

$$z = \Phi(x_1 \ldots x_m c_1 \ldots c_m),$$

worin Φ *an der Stelle:*

$$x_1^0 \ldots x_m^0\, c_1^0 \ldots c_m^0$$

regulär ist und vermöge $x_1 = x_1^0$ *in die vorgeschriebene Funktion* φ *übergeht.*

Setzt man z. B. $\varphi \equiv \gamma_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_m x_m$, so kommt man auf das in Art. 313 bestimmte vollständige Integral zurück.

Unser Korollar ergiebt sich unmittelbar aus dem vorigen Satze, wenn man (19) als eine partielle Differentialgleichung mit den $2m$ Independenten

$$x_1 \,.\,.\, x_m c_1 c_2 \,.\,.\, c_m$$

betrachtet.

318. Ist durch das Gleichungensystem:

$$(21) \quad F(z x_1 \,.\,.\, x_m p_1 \,.\,.\, p_m) = c, \quad \Omega_i(z x_1 \,.\,.\, x_m p_1 \,.\,.\, p_m) = c_i \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, m)$$

ein vollständiges Integral der Gleichung $F = c$ definirt, und werden mit $Z, \Xi_2 \,.\,.\, \Xi_m$ diejenigen Funktionen von $z, x_1 \,.\,.\, x_m p_2 \,.\,.\, p_m c$ bezeichnet, in die sich $\Omega_1 \,.\,.\, \Omega_m$ vermöge der Substitution $p_1 = \psi$ verwandeln, so bilden die Gleichungen:

$$(22) \qquad Z = c_1; \; \Xi_2 = c_2 \,.\,.\, \Xi_m = c_m$$

für beliebige c_i ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung $\nabla_0 = 0$, d. h. es besteht eine Identität:

$$(23) \qquad \nabla_0 \equiv \sigma(dZ - \Pi_2 d\Xi_2 - \cdots - \Pi_m d\Xi_m).$$

Darnach sind die $Z, \Xi_i \Pi_i$ Funktionen der Gröfsen $\zeta \xi_i \pi_i$, und die Gleichungen:

$$\zeta' = Z(\zeta, \xi_2 \,.\,.\, \xi_m \pi_2 \,.\,.\, \pi_m); \; \xi_i' = \Xi_i; \; \pi_i = \Pi_i \qquad (i = 2 \,.\,.\, m),$$

definiren eine Berührungstransformation der $2m - 1$ Variabeln $\zeta \xi_i \pi_i$. So bilden z. B. die Gleichungen:

$$\zeta' = \zeta - \pi_2 \xi_2 - \,.\,.\, - \pi_m \xi_m; \; \xi_i' = \pi_i; \; \pi_i' = \xi_i \quad (i = 2 \,.\,.\, m)$$

eine Berührungstransformation, und wir gelangen hierdurch abermals zu dem in Art. 313 bestimmten vollständigen Integral.

Aus dem speziellen, in Art. 309 definirten vollständigen Integral erhält man demnach das allgemeinste vollständige Integral durch blofse Differentiationen und Eliminationen.

Will man, dafs in der Identität (23) die Funktion σ in den Fällen β) und γ) den Wert 1 besitze, also die Funktionen Π_i, Ξ_i von z frei werden, so hat man im Falle β) auf die Variabeln $\zeta \pi_i \xi_i$ eine Berührungstransformation von der besondern, in Art. 201 besprochenen Art, im Falle γ) dagegen auf die $2m - 2$ Variabeln $\pi_i \xi_i$ eine homogene Berührungstransformation anzuwenden.

319. Umgekehrt läfst sich aber auch aus einem beliebigen vollständigen Integral (21) das spezielle vollständige Integral des Art. 309, also das System der Funktionen $\zeta \xi_i \pi_i$ gewinnen. Zu diesem Zwecke

leiten wir aus (21) zunächst die Gleichungen (22) ab, und bestimmen sodann mit Hülfe der Identität (23) die Funktionen $\varrho, \Pi_2 \,..\, \Pi_m$ durch Auflösung eines linearen Gleichungensystems. Die Funktionen:

$$Z, \Xi_2 \,..\, \Xi_m, \Pi_2 \,..\, \Pi_m$$

sind dann $2m - 1$ unabhängige Integrale der linearen partiellen Differentialgleichung (3), und die Hauptintegrale dieser Gleichung hinsichtlich $x_1 = x_1^0$ ergeben sich jetzt durch Auflösung der Relationen:

$$Z(z, x_1 \,..\, x_m p_2 \,..\, p_m, c) = Z(\zeta, x_1^0, \xi_2 \,..\, \xi_m \pi_2 \,..\, \pi_m, c)$$
$$\Xi_i(z, x_1 \,..\, x_m p_2 \,..\, p_m, c) = \Xi_i(\zeta, x_1^0, \xi_2 \,..\, \xi_m \pi_2 \,..\, \pi_m, c)$$
$$\Pi_i(z, x_1 \,..\, x_m p_2 \,..\, p_m, c) = \Pi_i(\zeta, x_1^0, \xi_2 \,..\, \xi_m \pi_2 \,..\, \pi_m, c)$$

nach den Unbekannten ζ, ξ_i, π_i.

Um aber aus einem bestimmten vollständigen Integral (21) das allgemeinste vollständige Integral, bezw. die allgemeinste nicht singuläre Integral-M_m zu erhalten, ist es nicht nötig die Funktionen $\zeta \xi_i \pi_i$ zu bestimmen. Denn hat man aus (21) das System (22) und sodann mittels (23) die Funktionen Π_i bestimmt, so liefert eine beliebige Berührungstransformation der $2m - 1$ Variabeln $Z \Xi_i \Pi_i$:

$$Z' = \Phi(Z, \Xi_k \Pi_k); \; \Xi_i' = \Phi_i(Z, \Xi_k \Pi_k); \; \Pi_i' = \Psi_i(Z, \Xi_k \Pi_k)$$

ohne weiteres das allgemeinste vollständige Integral:

$$F = c, \; Z' = c_1, \; \Xi_2' = c_2, \,..\, \Xi_m' = c_m,$$

und die allgemeinste Integral-M_m wird erhalten, indem man in den Relationen des Art. 315 die $\zeta \xi_i \pi_i$ durch die grofsen griechischen Buchstaben ersetzt.

320. Wenn man im Falle γ) die zweite, in Art. 302 gegebene Definition des Integralbegriffs anwendet, und unter den $\pi_i \xi_i$ wie früher die Hauptintegrale hinsichtlich $x_1 = x_1^0$ von der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$-\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_2^m {}_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = 0$$

versteht, so hat man, um alle Integrale der Gleichung $p_1 = \psi$ zu finden, alle $m - 1$-gliedrigen Integraläquivalente der Pfaff'schen Gleichung:

$$\nabla_0' \equiv \pi_2 d\xi_2 + \cdots + \pi_m d\xi_m$$

zu bestimmen; d. h. man wähle r ($< m$) beliebige Relationen:

$$\omega_i(\xi_2 \xi_3 \,..\, \xi_m) = 0 \qquad (i = 1, 2 \,..\, r)$$

und füge die $m - 1 - r$ Gleichungen hinzu, die sich durch Elimination der λ_i aus dem System:

$$\pi_i = \sum_1^r{}_s \lambda_s \frac{\partial \omega_s}{\partial \xi_i} \qquad (i = 2, 3 \,.\,. m)$$

ergeben; es ist darnach leicht, alle an der Stelle $x_1^0 \,.\,. x_m^0 p_2^0 \,.\,. p_m^0$ regulären Integral-M_{m-1} zu finden. Da die Pfaff'sche Gleichung:

$$\nabla_0' \equiv \psi dx_1 + p_2 dx_2 + \cdot \cdot + p_m dx_m = 0$$

singuläre Integraläquivalente im Sinne von Art. 190 überhaupt nicht besitzt, andererseits die Relationen $\pi_2 = 0, \,.\,. \pi_m = 0$ auf das unbrauchbare Gleichungensystem $p_1 = 0 \,.\,. p_m = 0$ führen, so folgt, dafs aufser den genannten keine andern Integraläquivalente der Pfaff'schen Gleichung $\nabla_0' = 0$ existiren.

Definiren die Gleichungen:

$$\Xi_i \left(x_1 \,.\,. x_m \frac{p_2}{p_m} \,.\,. \frac{p_{m-1}}{p_m} \right) = c_i \qquad (i = 2, 3, \,.\,. m)$$

ein vollständiges Integral in der gegenwärtigen Bedeutung dieses Wortes, und bestimmt man mit Hülfe der Identität:

$$\psi(x_1 \,.\,. x_m p_2 \,.\,. p_m) dx_1 + p_2 dx_2 + \cdot \cdot + p_m dx_m \equiv \sum_2^m{}_i \Pi_i d\Xi_i$$

die Funktionen $\Pi_2 \,.\,. \Pi_m$ durch Auflösung eines linearen Gleichungensystems, so erhält man die allgemeinste Integral-M_{m-1} der gegebenen Gleichung $p_1 = \psi$ durch Elimination der λ_i aus einem Relationensystem der Form:

$$\varphi_i(\Xi_2 \,.\,. \Xi_m) = 0, \; \Pi_k = \sum_1^r{}_s \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial \Xi_k} \qquad (i = 1 \,.\,. r; \; k = 2 \,.\,. m),$$

und das allgemeinste vollständige Integral wird gefunden, indem man auf die $2m - 2$ Variabeln $\Xi_i \Pi_i$ eine beliebige homogene Berührungstransformation ausübt.

321. Wenn ein aus Flächen bestehendes vollständiges Integral:

$$(24) \qquad z = \Phi(x_1 \,.\,. x_m c, c_1 \,.\,. c_m)$$

der partiellen Differentialgleichung:

$$(25) \qquad F(z, x_1 \,.\,. p_m) = c; \quad p_1 = \psi(z, x_1 \,.\,. x_m p_2 \,.\,. p_m \, c)$$

gegeben ist, so nimmt die im Vorigen auseinandergesetzte Methode zur Herleitung des allgemeinsten Integrals folgende Gestalt an:

Damit (24) ein vollständiges Integral der Gleichung (25) sei, ist notwendig und hinreichend, dafs die sich mittels der m Relationen:

$$z = \Phi,\ p_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \cdot\cdot\ p_m = \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} \tag{26}$$

die Gröfsen $c_1 \,..\, c_m$ als Funktionen der $2m$ Variabeln $z x_1 \,..\, x_m p_2 \,..\, p_m$ ausdrücken lassen, und dafs sich durch Substitution der so erhaltenen Werte die Gleichung:

$$p_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \tag{27}$$

in die Gleichung (25) verwandelt. *Darnach geht durch unsere Substitution der Pfaff'sche Ausdruck:*

$$dz - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 - \cdot\cdot - \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} dx_m \tag{28}$$

direkt in den Ausdruck:

$$\nabla_0 \equiv dz - \psi\, dx_1 - p_2\, dx_2 - \cdot\cdot - p_m dx_m$$

über, und der Ausdruck:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial c_2} dc_2 + \cdot\cdot + \frac{\partial \Phi}{\partial c_m} dc_m \tag{29}$$

verwandelt sich vermöge derselben Substitution in eine Normalform von ∇_0.

In der That, ersetzt man die c_i durch ihre aus (26) folgenden Ausdrücke, so wird die Gleichung $z = \Phi$ zu einer identischen Relation in den Variabeln $z x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m$, und durch totale Differentiation derselben folgt:

$$dz - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 - \cdot\cdot - \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} dx_m = \frac{\partial \Phi}{\partial c_1} dc_1 + \cdot\cdot + \frac{\partial \Phi}{\partial c_m} dc_m.$$

Auch in den Fällen β) und γ) ist der Ausdruck (29) eine Normalform von ∇_0, da jetzt Φ die Form:

$$\varphi(x_1 \,..\, x_m c_1 c_2 \,..\, c_m) + c_1$$

besitzt, also $\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} \equiv 1$ wird.

Ist also ein vollständiges Integral (24) gegeben, so erhält man die Definitionsgleichungen der allgemeinsten Integral-M_m in folgender Weise:

Man verstehe unter r eine Zahl der Reihe $1, 2, .. m$ *und füge zu einem beliebigen r-gliedrigen Gleichungensystem der Form:*

$$\varphi_i(c_1 c_2 \,..\, c_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, .. r) \tag{30}$$

diejenigen $m-r$ Relationen hinzu, die durch Elimination der λ aus den Gleichungen:

$$\text{(31)} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_i} + \cdot\cdot + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial c_i} \qquad (i = 1, 2, .. m)$$

folgen. Durch Elimination der Gröfsen $c_1 c_2 .. c_m$ aus den so erhaltenen m Gleichungen und den $m+1$ Relationen (26) (27) entsteht ein $m+1$-gliedriges Gleichungensystem in $z x_1 .. x_m p_1 .. p_m$ von der gesuchten Beschaffenheit.

Die Annahme $r = m$ führt auf konstante c_i, d. h. auf eine in dem vollständigen Integral (24) enthaltenen Integralfläche.

322. Das soeben geschilderte Verfahren, mit Hülfe eines vollständigen Integrals (24) alle übrigen Integrale zu finden, ist von Lagrange die „*Methode der Variation der Konstanten*" genannt worden. Dieser Bezeichnung liegt folgende Überlegung zu Grunde.

Sind die c_i Konstante, so ist $z = \Phi$ eine Integralfunktion der Gleichung (25); dasselbe gilt aber auch, wenn man die c_i „*variirt*" d. h. als Funktionen von $x_1 x_2 .. x_m$ betrachtet, vorausgesetzt, dafs die $m+1$ Relationen:

$$\text{(32)} \qquad \frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, .. m)$$

für jedes beliebige Wertsystem $x_1 .. x_m$ erfüllt sind, wenn rechts die c_i durch ihre Ausdrücke in den x_i ersetzt werden, und z die Funktion:

$$\text{(33)} \qquad \Phi[x_1 x_2 .. x_m c, c_1(x_1 .. x_m) .. c_m(x_1 .. x_m)]$$

bedeutet. Umgekehrt, soll z eine Integralfunktion von (25) sein, so müssen sich m Funktionen $c_i(x_1 x_2 .. x_m)$ so bestimmen lassen, dafs die Relationen (32) für jedes Wertsystem $x_1 .. x_m$ erfüllt sind und z mit der Funktion (33) identisch wird. Beide Behauptungen folgen unmittelbar aus der Thatsache, dafs die Gleichung (25) das Resultat der Elimination der c_i aus dem System (26) (27) ist. Durch totale Differentiation der Identität:

$$\text{(34)} \qquad z \equiv \Phi(x_1 .. x_m, c, c_1(x_1 .. x_m) .. c_m(x_1 .. x_m))$$

findet man aber: die gesuchten Funktionen $z, c_1 .. c_m$ müssen so beschaffen sein, dafs die beiden Pfaff'schen Ausdrücke (28) und (29) identisch werden. Ersetzt man in (28) das Differential dz durch seinen Wert $\sum \frac{\partial z}{\partial x_i} dx_i$, so folgt mit Rücksicht auf (32), dafs die Funktionen c_i, in (29) substituirt, diesen Pfaff'schen Ausdruck zum Verschwinden bringen müssen; die Gleichungen:

$$c_i = c_i(x_1 x_2 .. x_m) \qquad (i = 1 .. m)$$

bilden also ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung:

$$(35)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial c_1}\,dc_1 + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial c_m}\,dc_m = 0,$$

wenn darin $x_1 \ldots x_m\, c_1 \ldots c_m$ als Independente betrachtet werden, und ergeben sich sonach aus einem Gleichungensystem der Form (30) (31) durch Elimination der λ. Sind umgekehrt die Gröfsen c_i durch ein derartiges Gleichungensystem als Funktionen der x definirt, so folgt z aus der Identität (34), und die Identitäten (32) sind jetzt von selbst erfüllt, wenn rechts die c_i durch ihre Ausdrücke ersetzt werden, da ja der Pfaff'sche Ausdruck (29), also auch die Ausdrücke $\sum \frac{\partial \Phi}{\partial c_s}\frac{\partial c_s}{\partial x_i}$ nunmehr identisch verschwinden. Damit ist dann das allgemeinste Funktionensystem $z, c_1 \ldots c_m$ der verlangten Beschaffenheit, d. h. die allgemeinste Integralfunktion z gefunden.

323. Der Pfaff'schen Gleichung (35) wird auch durch die Relationen:

$$(36)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c_2} = 0 \quad \ldots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c_m} = 0$$

formal genügt. Zunächst aber braucht es überhaupt kein Funktionensystem $c_1 c_2 \ldots c_m$ zu geben, welches diese Relationen identisch befriedigt; ein Beispiel liefert der Fall, dafs Φ eine der Konstanten c_i additiv enthält, dafs also eine partielle Differentialgleichung vom Typus β) oder γ) vorliegt. Nehmen wir aber an, es gebe ein Funktionensystem $c_i(x_1 x_2 \ldots x_m)$ der verlangten Beschaffenheit; es braucht dann nicht notwendig ein Wertsystem $x_1^0 \ldots x_m^0$ zu geben, derart, dafs gleichzeitig die c_i an der Stelle $x_1^0 \ldots x_m^0$ und die Funktion Φ an der Stelle $x_1^0 \ldots x_m^0$ $c_1^0 \ldots c_m^0$ regulär sind, wenn

$$c_i^0 = c_i(x_1^0 \ldots x_m^0)$$

gesetzt wird; d. h. es kann der Fall eintreten, dafs die Funktion Φ jede Bedeutung verliert, wenn man darin für die c_i die aus (36) berechneten Funktionen der x_i substituirt denkt.

Es möge nun ein Wertsystem $x_1^0 \ldots x_m^0$ der soeben genannten Beschaffenheit wirklich existiren, und es werde überdies angenommen, dafs die Determinante:

$$(37)\qquad \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial c_k} \right| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots m)$$

an der Stelle $x_1^0 \ldots x_m^0\, c_1^0 \ldots c_m^0$ nicht verschwinde. Die Funktion:

$$(38)\qquad z = \Psi(x_1 x_2 \ldots x_m),$$

welche aus Φ entsteht, wenn man darin die c_i durch die aus (36) entnommenen Funktionen $c_i(x_1 \ldots x_m)$ ersetzt, ist an der Stelle $x_1^0 \ldots x_m^0$

regulär, und ein Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung:

$$F(z, x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m) = c.$$

Ferner genügt die Funktion Ψ den Identitäten:

$$\Psi \equiv \Phi(x_1 \,..\, x_m c_1 \,..\, c_m)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x_i},$$

wenn auf den rechten Seiten für die c_i die $c_i(x_1 \,..\, x_m)$ substituirt werden.

Dieses Integral (38) ist *singulär*. In der That, für jedes Wertsystem der $2m$ Variabeln $x_i c_i$ hat man die Identität:

$$F\left(\Phi, x_1 \,..\, x_m, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \,..\, \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}\right) \equiv c,$$

und durch Differentiation derselben nach c_i folgt:

$$(39) \qquad \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial c_i} + \sum_1^m {}_s \frac{\partial F}{\partial p_s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_s \partial c_i} \equiv 0 \qquad (i = 1 \,..\, m).$$

In den Ausdrücken $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial p_s}$ hat man die Gröfsen z und p bezw. durch Φ und $\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$ zu ersetzen. Die Identitäten (39) gelten natürlich auch noch, wenn man für die c_i ihre aus (36) entnommenen Werte in den x einsetzt. Vermöge dieser Substitution aber verwandeln sich die Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$ in $\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}$ und Φ in Ψ, ferner die Identitäten (39) in die folgenden:

$$\sum_1^m {}_s \frac{\partial F}{\partial p_s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_s \partial c_i} = 0 \qquad (i = 1 \,..\, m),$$

und da die Determinante (37) infolge unserer Substitution nicht identisch null ist, so genügt die Funktion Ψ in der That den m partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = 0, \,..\, \frac{\partial F}{\partial p_m} = 0,$$

was zu zeigen war (vgl. die Schlufsbemerkung des Art. 316).

Die Annahme, dafs die Determinante (37) vermöge der Gleichungen (36) verschwindet, führt zu sehr verwickelten Betrachtungen, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

324. Die Methode der Variation der Konstanten gestattet eine geometrische Interpretation, die sich auf den Begriff: „Enveloppe einer

Flächenschar" gründet. Ist eine r-gliedrige Flächenschar:

$$(40)\qquad z = \Phi(x_1 x_2 \,..\, x_m \alpha_1 \alpha_2 \,..\, \alpha_r)$$

gegeben, worin die Gröfsen $\alpha_1 \,..\, \alpha_r$ $(r \leqq m)$ willkürliche Konstante bedeuten, so versteht man unter ihrer „Enveloppe" oder „einhüllenden Fläche" diejenige Fläche, deren Gleichung:

$$(41)\qquad z = \Psi(x_1 x_2 \,..\, x_m)$$

sich ergiebt, indem man die α_i mittels der Relationen:

$$(42)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} = 0 \quad .. \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_r} = 0$$

als Funktionen von $x_1 \,..\, x_m$ berechnet und in (40) einsetzt. Dabei wird natürlich eine solche Beschaffenheit der Funktion Φ vorausgesetzt, dafs die genannten Operationen einen funktionentheoretischen Sinn haben.

Die Gleichungen (40) (42) definiren für jedes Wertsystem der Konstanten α_i eine gewisse $m - r$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit des Raums $R_{m+1}(z x_1 \,..\, x_m)$, die der betreffenden Fläche (40) und allen dazu unendlich benachbarten Flächen der Schar gemeinsam ist. Die Enveloppe (41) enthält alle diese r-fach unendlich vielen Punkt-μ_{m-r}, d. h. sie wird von ihnen „erzeugt". Jede einzelne Fläche (40) unserer Schar enthält *eine* solche μ_{m-r} und *berührt in allen Punkten der letzteren die Umhüllungsfläche.*

In der That, betrachtet man eine bestimmte Fläche der Schar (40):

$$(43)\qquad z = \Phi(x_1 x_2 \,..\, x_m \alpha_1^0 \alpha_2^0 \,..\, \alpha_r^0)$$

und ist $z^0 x_1^0 \,..\, x_m^0$ ein Punkt der auf ihr gelegenen Punkt-μ_{m-r}, d. h. befriedigen die Konstanten $z^0 x_1^0 \,..\, x_m^0 \alpha_1^0 \,..\, \alpha_r^0$ sämtliche $r + 1$ Gleichungen (40) (42), so reduziren sich die r Funktionen $\alpha_i(x_1 \,..\, x_m)$, welche durch die Relationen (42) definirt werden, bezw. auf α_i^0, wenn darin die x_k durch x_k^0 ersetzt werden. Man hat nun:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right)_{x_i = x_i^0} \equiv \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right)_{x_i = x_i^0} + \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_s}\right)_{x_i = x_i^0,\ \alpha_h = \alpha_h^0} \cdot \left(\frac{\partial \alpha_s}{\partial x_k}\right)_{x_i = x_i^0}$$
$$\equiv \left(\frac{\partial \Phi(x_1 \,..\, x_m \alpha_1^0 \,..\, \alpha_r^0)}{\partial x_k}\right)_{x_i = x_i^0}.$$

Demnach besitzen die beiden Flächen (41) und (43) in ihrem gemeinsamen Punkte $z^0 x_1^0 \,..\, x_m^0$ dieselbe Tangentialebene, was zu zeigen war.

Betrachten wir beispielsweise im Raum $R_3(xyz)$ eine eingliedrige Flächenschar:

$$V(xyza) = 0,$$

so definirt diese Gleichung zusammen mit der folgenden:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0$$

einfach unendlich viele Raumkurven, welche die Umhüllungsfläche der Schar erzeugen. Jede einzelne Fläche der Schar enthält eine dieser Raumkurven, und berührt längs derselben die einhüllende Fläche.

Ist andererseits eine zweigliedrige Flächenschar gegeben:

$$V(xyzab) = 0 \tag{44}$$

und eliminirt man aus dieser Gleichung die a, b mittels der Relationen:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial b} = 0, \tag{45}$$

so entsteht die Gleichung einer Fläche, und diese wird von jeder einzelnen Fläche (44) in denjenigen Punkten berührt, die auf der letzteren durch die Gleichungen (45) bestimmt werden.

Wir interpretiren nun das vollständige Integral (24) der gegebenen partiellen Differentialgleichung $F = c$ als eine m-gliedrige Flächenschar mit den arbiträren Konstanten $c_1 c_2 \ldots c_m$, und greifen aus dieser Schar diejenigen $m - r$-fach unendlich vielen Flächen heraus, deren Parameter c_i die r beliebig gewählten Relationen (30) erfüllen. Als arbiträre Parameter dieser Schar können die Gröſsen $c_{r+1} \ldots c_m$ genommen werden, wenn die Gleichungen (30) nach $c_1 \ldots c_r$ auflösbar sind. Man erhält nun offenbar die Enveloppe dieser $m - r$-gliedrigen Schar, indem man die Gröſsen λ und c aus den Relationen (24) (30) (31) eliminirt, und diese Fläche befriedigt offenbar die gegebene partielle Differentialgleichung $F = c$, wie aus der vorhin bewiesenen Eigenschaft der Umhüllungsfläche unmittelbar hervorgeht. Umgekehrt, ist eine beliebige Integralfläche J der partiellen Differentialgleichung $F = c$ gegeben, und betrachten wir ein beliebiges Flächenelement E der Fläche J, so giebt es im allgemeinen eine und nur eine Fläche der Schar (24), welche das Element E enthält. Denken wir uns solcherweise zu jedem Flächenelement von J die zugehörige Fläche der Schar (24) bestimmt, so erscheint J als Enveloppe einer aus (24) herausgegriffenen Flächenschar; *mithin kann jede Integralfläche der Gleichung $F = c$ auf dem vorhin angegebenen Wege durch Enveloppenbildung gewonnen werden.*

Eine *beliebig vorgeschriebene Flächenschar* (24) besitzt natürlich im Allgemeinen selbst eine Enveloppe, deren Gleichung durch Elimination der c_i aus (24) (36) entsteht, und die jede Fläche der Schar (24) in einem oder einigen Punkten berührt; die zugehörige partielle Differentialgleichung besitzt dann eine (und nur eine) singuläre Integralfläche. Ist dagegen *die partielle Differentialgleichung* $F = c$ *beliebig gegeben*, und ermittelt man nach dem Verfahren des § 2 ein vollständiges Integral (24), so tritt im Allgemeinen einer der beiden in Art. 323 erwähnten Umstände ein, welche die Enveloppentheorie illusorisch machen.

Ein genaueres Eingehen auf die Theorie der singulären Lösungen liegt nicht im Plane dieses Werkes; wir müssen in dieser Beziehung auf die Originalabhandlungen verweisen.[1])

§ 4. Cauchy's Methode; die Charakteristiken.

325. Wie in § 2 denken wir uns mittels der Hauptintegrale $\zeta \xi_i \pi_i$ der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(1)\quad -\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_2^m{}_i \left[\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_i}\right] + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\sum_2^m{}_i p_i \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \psi\right) = 0$$

den Pfaff'schen Ausdruck:

$$\nabla_0 \equiv dz - \psi\, dx_1 - p_2 dx_2 - \cdots - p_m dx_m$$

auf die Normalform:

$$\varrho(d\zeta - \pi_2 d\xi_2 - \cdots - \pi_m d\xi_m)$$

gebracht. Ist jetzt $z^0 x_1^0 \ldots x_m^0 p_2^0 \ldots p_m^0$ eine Stelle, an der die Funktion ψ und infolge dessen auch die $\zeta \xi_i \pi_i$ regulär sind, so definiren die $2m - 1$ Relationen:

$$(2)\qquad \zeta = z^0;\ \xi_i = x_i^0;\ \pi_i = p_i^0 \qquad (i = 2, 3, \ldots m)$$

ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung $\nabla_0 = 0$. Setzen wir wiederum:

$$p_1^0 = \psi(z^0 x_1^0 \ldots x_m^0 p_2^0 \ldots p_m^0\, c),$$

und beachten, dafs die Funktionen $\zeta \xi_i \pi_i$ für $x_1 = x_1^0$ bezw. in $z, x_i p_i$ übergehen, so erkennen wir, dafs die Relationen (2) zusammen mit der gegebenen partiellen Differentialgleichung:

$$(3)\qquad F(z x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = c \text{ oder } p_1 = \psi(z x_1 \ldots x_m p_2 \ldots p_m\, c)$$

eine Integral-M_1 dieser Gleichung definiren, d. h. also einen Streifen

1) Insbesondere auf die Abhandlung Darboux I.

von Flächenelementen, die alle die Gleichung (3) erfüllen, ferner, daſs dieser Streifen das Flächenelement:

(4) $$z^0 x_1^0 \ldots x_m^0 p_1^0 \ldots p_m^0$$

enthält und durch Angabe desselben eindeutig bestimmt ist. Wir bezeichnen einen solchen Streifen als einen „*charakteristischen Streifen*“ oder eine „*Charakteristik*“ der partiellen Differentialgleichung (3). Das Flächenelement (4) nennen wir das „*Ausgangselement*“ dieses Streifens, und sagen wohl auch: der durch (2) und (3) definirte Streifen „läuft von dem Flächenelement (4) aus“ oder „geht durch dasselbe hindurch“; jedes von den ∞^1 Flächenelementen einer Charakteristik kann natürlich als Ausgangselement derselben betrachtet werden, sofern es obigen Bedingungen genügt.

Die ∞^{2m} Flächenelemente, welche die Relation (3) für einen bestimmten Wert von c befriedigen, lassen sich darnach zu ∞^{2m-1} charakteristischen Streifen derart zusammenordnen, daſs durch jedes Flächenelement, dessen Koordinaten die Relation $p_1 = \psi$ befriedigen, ein und nur ein solcher Streifen hindurchgeht.

326. Ist eine beliebige andere Normalform:

$$\nabla_0 \equiv \sigma(dZ - \Pi_2 d\Xi_2 - \cdots - \Pi_m d\Xi_m)$$

des Pfaff'schen Ausdrucks ∇_0 gegeben, so stellen die Relationen:

(5) $$Z = \gamma, \ \Xi_i = \gamma_i, \ \Pi_i = \gamma_i' \qquad (i = 2, 3, \cdots m)$$

worin die γ, γ' arbiträre Konstante bedeuten, mit (3) zusammen ebenfalls die ∞^{2m-1} charakteristischen Streifen unserer partiellen Differentialgleichung dar.

Denn die linken Seiten der Gleichungen (5) bilden ebenfalls ein System von $2m - 1$ unabhängigen Integralen der linearen homogenen Gleichung (1); m. a. W. die Relationen (5) sind, ebenso wie die Gleichungen (2), die allgemeinen Integralgleichungen des simultanen Systems:

(6) $$\frac{dx_i}{dx_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial p_i}; \ \frac{dp_i}{dx_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \psi}{\partial z}; \ \frac{dz}{dx_1} = \psi - \sum_2^m {}_s\, p_s \frac{\partial \psi}{\partial p_s}.$$

$$(i = 2, 3, \ldots m).$$

Ist nun insbesondere ein aus Flächen bestehendes vollständiges Integral:

$$z = \Phi(x_1 \ldots x_m\, c, c_1 c_2 \ldots c_m)$$

der partiellen Differentialgleichung (3) gegeben, so ist nach dem vorigen § der Ausdruck:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} dc_1 + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial c_m} dc_m$$

eine Normalform von ∇_0, wenn man darin die Gröfsen c_i mittels der Relationen:

(7) $$z = \Phi, p_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \cdots p_m = \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}$$

als Funktionen von z, $x_1 \ldots x_m p_2 \ldots p_m$ ausdrückt. Mithin bilden die Relationen:

(8) $$\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} + b_i \frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 0 \qquad (i = 2, 3 \ldots m)$$

mit (7) zusammen die allgemeinen Integralgleichungen des simultanen Systems (6), wenn $b_2 \ldots b_m c_1 \ldots c_m$ arbiträre Konstante bedeuten; m. a. W., die Relationen (3) (7) (8) stellen ebenfalls die ∞^{2m-1} charakteristischen Streifen der gegebenen partiellen Differentialgleichung dar.

Indem wir obigen Satz für die Fälle β) und γ) besonders formuliren, erhalten wir unmittelbar folgendes Theorem:

Es sei gegeben ein simultanes System gewöhnlicher Differentialgleichungen von folgender Gestalt:

(9) $$\frac{dx_i}{dx_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dx_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \qquad (i = 2, 3, \ldots m),$$

worin $x_2 \ldots x_m p_2 \ldots p_m$ die unbekannten Funktionen, x_1 die unabhängige Variable und ψ eine ganz beliebige Funktion der $2m - 1$ Variabeln $x_1 x_2 \ldots x_m p_2 \ldots p_m$ bedeuten.

Ist dann:

$$z = \Psi(x_1 x_2 \ldots x_m c_2 c_3 \ldots c_m) + c_1$$

ein beliebiges vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung:

(10) $$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \psi\left(x_1 x_2 \ldots x_m \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial z}{\partial x_m}\right),$$

so erhält man die allgemeinen Integralgleichungen des simultanen Systems (9), indem man die $2m - 2$ Relationen:

$$p_i = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}; \quad b_i = \frac{\partial \Psi}{\partial c_i} \qquad (i = 2, 3, \ldots m)$$

nach den arbiträren Konstanten $b_2 \ldots b_m c_2 \ldots c_m$ auflöst.

Die beiden Integrationsprobleme (9) und (10) sind daher vollständig äquivalent, da ja auch umgekehrt die Herstellung des allgemeinsten, nicht singulären Integrals von (10) auf die Integration des simultanen Systems (9) und eine Quadratur zurückgeführt werden kann (vgl. den vorigen §).

327. Zu einer andern analytischen Darstellung der charakteristischen Streifen der Gleichung (3) gelangt man folgendermaſsen. Es sei:

$$(11) \qquad z' x_1' \ldots x_m' p_1' \ldots p_m'$$

ein *nicht singuläres* Flächenelement der partiellen Differentialgleichung $F = c$ (Art. 316), d. h. eine Stelle, an der F regulär ist und den Wert c annimmt, und an der nicht alle Ausdrücke:

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \ldots \frac{\partial F}{\partial p_m}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} \ldots \frac{\partial F}{\partial x_m} + p_m \frac{\partial F}{\partial z}$$

verschwinden. Ferner sei ϱ eine beliebige, an der Stelle (11) reguläre und nicht verschwindende Funktion der $2m+1$ Variabeln $z x_i p_i$, endlich τ eine beliebige Konstante. Dann besitzt die partielle Differentialgleichung:

$$(12) \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \varrho [Ff] = 0 \text{ [1]}$$

$2m+1$ Hauptintegrale:

$$(13) \qquad \varphi(t, z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m); \quad \varphi_i(t, z, \ldots p_m); \quad \omega_i(t, z, \ldots p_m)$$
$$(i = 1, 2, \ldots m)$$

welche als gewöhnliche Potenzreihen der Gröſsen:

$$t - \tau, \; z - z', \; x_i - x_i', \; p_i - p_i' \qquad (i = 1 \ldots m)$$

darstellbar sind, und für $t = \tau$ bezw. in z, x_i, p_i übergehen. Ist jetzt:

$$(14) \qquad z^0 x_1^0 \ldots x_m^0 p_1^0 \ldots p_m^0$$

ebenfalls ein nicht singuläres Flächenelement der Gleichung $F = c$, für welches die Funktion ϱ von Null verschieden ist, und für welches die Potenzreihen (13) konvergiren, so lassen sich die Relationen:

$$\begin{aligned} \varphi(t, z, x_1 \ldots p_m) &= \varphi(\tau, z^0, x_1^0 \ldots p_m^0) \\ \left.\begin{aligned} \varphi_i(t, z, x_1 \ldots p_m) &= \varphi_i(\tau, z^0, x_1^0 \ldots p_m^0) \\ \omega_i(t, z, x_1 \ldots p_m) &= \omega_i(\tau, z^0, x_1^0 \ldots p_m^0) \end{aligned}\right\} & \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \end{aligned}$$

in folgender Weise auflösen:

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} z &= \chi(t, z^0, x_1^0 \ldots x_m^0 p_1^0 \ldots p_m^0) \\ x_i &= \lambda_i(t, z^0, x_1^0 \ldots x_m^0 p_1^0 \ldots p_m^0) \\ p_i &= \mu_i(t, z^0, x_1^0 \ldots p_m^0 p_1^0 \ldots p_m^0) \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots m),$$

1) $[Ff] = \sum_1^m s \left\{ \frac{\partial F}{\partial p_s} \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial p_s} \right\},$

worin die rechten Seiten gewöhnliche Potenzreihen der $2m+2$ Gröfsen:

$$t-\tau,\ z^0-z',\ x_i^0-x_i',\ p_i^0-p_i'$$

bedeuten, also nach Art. 52 durch eine einfache Änderung der Argumente aus den Potenzreihen (13) erhalten werden können.

Die Funktionen χ, λ_i, μ_i sind nach Art. 52 diejenigen Integralfunktionen des simultanen Systems:

$$(16)\qquad \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \varrho \sum p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ \frac{dx_i}{dt} &= \varrho \frac{\partial F}{\partial p_i};\ \frac{dp_i}{dt} = -\varrho\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}\right) \qquad (i=1,2,..m), \end{aligned}$$

die vermöge $t=\tau$ bezw. die Werte $z^0 x_i^0 p_i^0$ annehmen.

Die Relationen (15) definiren augenscheinlich den charakteristischen Streifen von (3) mit dem Ausgangselement $z^0 x_i^0 p_i^0$. Diese analytische Darstellung ist insofern etwas allgemeiner als diejenige des Art. 325, als sie auch solche Charakteristiken umfafst, deren Ausgangselement (14) zwar nicht singulär ist, aber alle Relationen $\frac{\partial F}{\partial p_1}=0, ..\frac{\partial F}{\partial p_m}=0$ befriedigt; in diesem Falle werden aber die Funktionen χ, $\lambda_1 .. \lambda_m$, die auf den rechten Seiten von (15) auftreten, alle von t ganz unabhängig, reduziren sich also auf die Konstanten $z^0 x_1^0 .. x_m^0$ resp.; die Punktmannigfaltigkeit, an die sich unsere Charakteristik anschliefst, ist sonach in diesem Falle keine Raumkurve, sondern besteht aus dem einzigen Punkte $z^0 x_1^0 .. x_m^0$.

Ist das Flächenelement (14) singulär, so stellen die Gleichungen (16) überhaupt keinen Streifen dar, da sich ihre rechten Seiten alle auf Konstante reduziren (Art. 52, Schlufsbemerkung).

Wählt man in der Gleichung (12) für ϱ die Funktion $1:\frac{\partial F}{\partial p_1}$, und ist dementsprechend die Ableitung $\frac{\partial F}{\partial p_1}$ an der Stelle (14) nicht null, so erhält die Funktion λ_1 die Form $t-\tau+x_1^0$; ersetzt man in den übrigen Funktionen, die auf den rechten Seiten von (15) auftreten, $t-\tau$ überall durch $x_1-x_1^0$, so gewinnt man folgende Darstellung der Charakteristik mit dem Ausgangselement (14):

$$\begin{aligned} z &= \Phi(x_1, z^0, x_1^0 .. x_m^0, p_1^0 .. p_m^0) \\ x_i &= \Phi_i(x_1, z^0, x_1^0 .. x_m^0, p_1^0 .. p_m^0) \qquad (i=2,..m), \\ p_k &= \Psi_k(x_1, z^0, x_1^0 .. x_m^0, p_1^0 .. p_m^0) \qquad (k=1..m), \end{aligned}$$

wo die rechten Seiten gewöhnliche Potenzreihen der Gröfsen:

$$x_1 - x_1^0,\ z^0 - z',\ x_i^0 - x_i',\ p_i^0 - p_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

bedeuten. Man erhält diese Gleichungen auch, wenn man unter den Ausdrücken:

$$(17) \qquad Z(z, x_1 \ldots x_m\, p_1 \ldots p_m), \quad \Xi_i(z, \ldots p_m), \quad \Pi_k(z, \ldots p_m)$$
$$(i = 2, 3, \ldots m;\ k = 1 \ldots m)$$

die Hauptintegrale der partiellen Differentialgleichung:

$$[Ff] = 0$$

hinsichtlich $x_1 = x_1^0$ versteht, und die Relationen:

$$Z = z^0,\ \Xi_i = x_i^0,\ \Pi_k = p_k^0 \qquad (i = 2 \ldots m;\ k = 1 \ldots m)$$

nach $z x_i p_i$ auflöst. Eliminirt man mittels der gegebenen partiellen Differentialgleichung $p_1 = \psi$ die Variabele p_1 aus den Funktionen:

$$Z, \Xi_2 \ldots \Xi_m, \Pi_2 \ldots \Pi_m,$$

so erhält man die Funktionen $\zeta, \xi_i \pi_i$ des Art. 325 und damit die frühere analytische Darstellung der Charakteristiken wieder.

328. Wir lassen im Folgenden diejenigen Integrale der Gleichung $F = c$, die aufserdem noch die Relation $\frac{\partial F}{\partial p_1} = 0$ erfüllen, aufser Betracht. Jede andere Integral-M_m unserer Gleichung wird dann nach Art. 315 und 316 durch ein m-gliedriges Gleichungensystem der Form:

$$(18) \qquad p_1 = \psi;\ \Omega_i(\zeta, \xi_2 \ldots \xi_m, \zeta_2 \ldots \zeta_m) = 0 \qquad (i = 1 \ldots m)$$

dargestellt werden. *Jede Integral-M_m wird also von $m - 1$-fach unendlich vielen Charakteristiken erzeugt*, d. h. sie entsteht dadurch, dafs man aus der Gesamtheit der ∞^{2m-1} charakteristischen Streifen $m - 1$-fach unendlich viele in geeigneter Weise herausgreift. *Umgekehrt ist jeder Elementverein, der von ∞^{m-1} charakteristischen Streifen der Gleichung $p_1 = \psi$ erzeugt wird, eine Integral-M_m dieser Gleichung.* Derselbe Sachverhalt läfst sich auch so ausdrücken:

Enthält eine Integral-M_m der gegebenen partiellen Differentialgleichung ein nicht singuläres Flächenelement:

$$(19) \qquad z^0 x_1^0 \ldots x_m^0 p_1^0 \ldots p_m^0$$

dieser Gleichung, so enthält sie den ganzen, von diesem Flächenelement auslaufenden charakteristischen Streifen.

In der That, wenn die Integral-M_m das Flächenelement (19) enthält, und wenn die Funktion ψ an der Stelle $z^0 x_1^0 \ldots x_m^0 p_2^0 \ldots p_m^0$ regulär ist, so kann unsere Integral-M_m durch ein Gleichungensystem der Form (18) dargestellt werden, worin die $\zeta \xi_i \pi_i$ die bisherige Bedeutung haben; sie enthält also thatsächlich sämtliche Flächenelemente des Streifens:

$$p_1 = \psi,\ \zeta = z^0,\ \xi_i = x_i^0,\ \pi_i = \pi_i^0 \qquad (i = 2, 3, \ldots m).$$

Unser Satz ist zunächst nur für solche nicht-singuläre Flächenelemente (19) bewiesen, die nicht alle m Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial p_1} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial p_2} = 0 \ldots$ erfüllen; später wird sich zeigen, dafs diese Einschränkung nicht nötig ist.

Enthalten demnach zwei verschiedene Integral-M_m der partiellen Differentialgleichung $F = c$ dasselbe nicht singuläre Flächenelement (19), so enthalten sie die ganze, von ihm auslaufende Charakteristik: berühren sich insbesondere zwei Integralflächen in einem Punkt $z^0 x_1^0 \ldots x_m^0$ und sind $p_1^0 \ldots p_m^0$ die übrigen Koordinaten ihres gemeinsamen Flächenelements, so berühren sie sich längs der ganzen Charakteristik, die durch das Flächenelement (19) hindurchgeht, vorausgesetzt, dafs letzteres nicht singulär ist.

329. Das Theorem der vorigen Nr. ist auch eine unmittelbare Folge des Satzes, den wir am Schlusse des Art. 245 ausgesprochen haben, und den wir für den vorliegenden Zweck so formuliren wollen:

Befriedigt ein $m+1$-gliedriges Relationensystem:

$$\Omega_i(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m c) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m+1) \tag{20}$$

die Pfaff'sche Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m = 0,$$

und umfafst es die Relation:

$$F(z x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = c,$$

so gestattet es die infinitesimale Transformation $[Ff]$, d. h. alle Ausdrücke $[F\Omega_i]$ verschwinden vermöge (20) identisch.

Ist nun (19) ein Wertsystem, für welches F regulär und $\frac{\partial F}{\partial p_1}$ von null verschieden ist, und bedeuten die Funktionen (17) die Hauptintegrale hinsichtlich $x_1 = x_1^0$ der linearen homogenen Gleichung $[Ff] = 0$, so kann man diese Funktionen neben x_1 als neue Variable in das Relationensystem (20) einführen. Enthielte dann das transformirte System eine Gleichung der Form:

$$x_1 = \Phi(Z, \Xi_2 \ldots \Xi_m \Pi_1 \ldots \Pi_m)$$

so müfste man vermöge (20) identisch haben:

$$0 \equiv [F, x_1 - \Phi] \equiv \frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial Z}[FZ] - \sum \frac{\partial \Phi}{\partial \Xi_i}[F\Xi_i] - \sum^k \frac{\partial \Phi}{\partial \Pi_k}[F\Pi_k].$$

Da aber auf der rechten Seite dieser Identität alle Terme bis auf den ersten null sind, so müfste $\frac{\partial F}{\partial p_1}$ vermöge (20) verschwinden. Ist also letzteres nicht der Fall, so verwandelt sich das System (20) vermöge unserer Variabelntransformation in ein Gleichungensystem, das nur die Variabeln $Z, \Xi_i \Pi_k$ enthält. Ersetzt man eine dieser Relationen durch die gegebene Gleichung $p_1 = \psi$ und eliminirt mittels derselben die Gröfse p_1 aus den übrigen, so entsteht ein System der Form (18).

330. Um die allgemeinste nicht singuläre Integral-M_m der Gleichung $F = c$ zu finden, mufs man aus der Gesamtheit der ∞^{2m-1} charakteristischen Streifen eine Schar von $m-1$-fach unendlich vielen derart herausgreifen, dafs dieselben einen Elementverein bilden. Auf welche Weise dies zu geschehen hat, ergiebt sich aus Art. 315 ohne weiteres. Durch eine leichte Modifikation der dort gebrauchten Bezeichnungen erhält man folgende Regel:

Man bestimme das allgemeinste m-gliedrige Gleichungensystem:

$$\Phi_i(z, x_2 \ldots x_m p_2 \ldots p_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \tag{21}$$

welches die Pfaff'sche Gleichung:

$$dz - p_2 dx_2 - p_3 dx_3 - \cdots - p_m dx_m = 0$$

erfüllt, und ersetze darin die $z x_i p_i$ bezw. durch die Funktionen $\zeta \xi_i \pi_i$. Die so entstehenden m Relationen definiren dann mit $p_1 = \psi$ zusammen die allgemeinste Integral-M_m dieser Gleichung.

Die Relationen (21) müssen also zusammen mit den Gleichungen $x_1 = x_1^0$; $p_1 = \psi$ eine Integral-M_{m-1} der gegebenen partiellen Differentialgleichung $p_1 = \psi$ definiren; mit Rücksicht darauf können wir die vorige Regel auch so aussprechen:

„Man bestimme eine beliebige Integral-M_{m-1} der partiellen Differentialgleichung $p_1 = \psi$, deren zugehörige Punktmannigfaltigkeit in der Ebene $x_1 = x_1^0$ gelegen ist. Die ∞^{m-1} charakteristischen Streifen, die bezw. von den Flächenelementen dieser M_{m-1} auslaufen, erzeugen die allgemeinste Integral-M_m der gegebenen Gleichung; und es giebt auch nur **eine** *Integral-M_m, welche die gegebene Integral-M_{m-1} enthält."*

Der Satz gilt zunächst nur unter der Annahme, dafs die betrachtete „Ausgangs-M_{m-1}" nicht alle m Relationen $\frac{\partial F}{\partial p_i} = 0$ befriedigt; später wird er unter der allgemeineren Voraussetzung bewiesen, dafs die Ausgangs-M_{m-1} nicht lauter singuläre Flächenelemente enthält.

331. Eine Integral-M_{m-1} von der im vorigen Satze geforderten Beschaffenheit wird z. B. gebildet von allen Flächenelementen, welche sich an die Punktmannigfaltigkeit:

$$x_1 = x_1^0,\ z = \varphi(x_2 x_3 \ldots x_m)$$

anschliefsen. Wir kommen so auf das im Artikel 317 genannte Integral zurück.

Eine andere Kategorie von Integral-M_{m-1} der vorhin genannten Eigenschaft wird erhalten, wenn man alle diejenigen ∞^{m-1} Flächenelemente betrachtet, welche zu einem bestimmten Punkt P mit den Koordinaten $z^0 x_1^0 \ldots x_m^0$ gehören und der Gleichung $p_1 = \psi$ genügen. Die $m+2$ Definitionsgleichungen einer derartigen Integral-M_{m-1} lauten daher:

$$p_1 = \psi;\ z = z^0;\ x_1 = x_1^0 \ldots x_m = x_m^0.$$

Wir bezeichnen ein solches Gebilde als einen „*Elementarkegel*“ der partiellen Differentialgleichung $p_1 = \psi$, und den Punkt $P(z^0 x_1^0 \ldots x_m^0)$ als dessen „Spitze“.

Betrachten wir z. B. den Fall $m = 2$, so giebt es ∞^1 Flächenelemente $xyzpq$ des $R_3(xyz)$, die eine partielle Differentialgleichung:

$$p = \psi(xyzq)$$

befriedigen und einen bestimmten Raumpunkt $P(xyz)$ enthalten. Die Ebenen dieser ∞^1 Flächenelemente umhüllen im allgemeinen einen Kegel mit der Spitze P, dessen Gleichung, in laufenden Koordinaten $\xi\eta\zeta$ geschrieben, durch Elimination der Gröfse q aus den beiden Gleichungen:

$$\zeta - z = \psi(\xi - x) + q(\eta - y);\quad \frac{\partial\psi}{\partial q}(\xi - x) + \eta - y = 0,$$

in der Gestalt:

$$f\left(x, y, z, \frac{\zeta - z}{\xi - x};\ \frac{\eta - y}{\xi - x}\right) = 0$$

erhalten wird. Der Elementarkegel kann auch in einen Ebenenbüschel ausarten, wenn nämlich die gegebene Gleichung die Form:

$$p = A(xyz)q + B(xyz)$$

besitzt, also *linear* ist. Eine ähnliche geometrische Interpretation ist auch im Fall $m > 2$ anwendbar. (Vgl. auch Art. 178.)

Die charakteristischen Streifen, welche bezw. von den Flächenelementen des Elementarkegels mit der Spitze P auslaufen, erzeugen eine Integral-M_m, deren analytische Darstellung durch die $m+1$ Gleichungen:

$$(22)\qquad p_1 = \psi;\ \zeta = z^0,\ \xi_2 = x_2^0 \ldots \xi_m = x_m^0$$

gegeben ist. Dieser Elementverein wird als „*das zu dem Punkte P* *gehörige Integralconoid*" oder auch als „*das Integralconoid mit der Spitze P*" bezeichnet, und zwar deshalb, weil er in der Umgebung des Punktes P in erster Annäherung mit dem zu P gehörigen Elementarkegel zusammenfällt. Ist dies Integralconoid eine *Fläche*, die durch die Gleichung:

$$z = \varphi(x_1 \,.\,.\, x_m)$$

definirt wird, so ist die Funktion φ an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_m^0$ offenbar nicht regulär, was mit einer Bemerkung des Art. 317 übereinstimmt.

Das vollständige Integral (22), das durch die Methode des Art. 309 in erster Linie erhalten wurde, besteht demnach aus den ∞^m Integralconoiden, deren Spitzen in der Ebene $x_1 = x_1{}^0$ gelegen sind.

Ist ein aus Flächen bestehendes vollständiges Integral:

$$z = \Phi(x_1 \,.\,.\, x_m\, c_1 \,.\,.\, c_m)$$

der Gleichung $p_1 = \psi$ gegeben, so erhält man das Integralconoid mit der Spitze P offenbar auch als Enveloppe aller derjenigen ∞^{m-1} Flächen obiger Schar, die den Punkt P enthalten, d. h. durch Elimination der Gröfsen $c_1 \,.\,.\, c_m$, λ aus den Gleichungen:

$$z = \Phi;\; z_0 = \Phi_0;\; \frac{\partial \Phi}{\partial c_i} + \lambda \frac{\partial \Phi_0}{\partial c_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, m),$$

worin:

$$\Phi_0 = \Phi(x_1^0 \,.\,.\, x_m^0\, c_1 \,.\,.\, c_m)$$

gesetzt ist.

Es giebt im allgemeinen, den ∞^{m+1} Punkten des Raums $R_{m+1}(z, x_1 \,.\,.\, x_m)$ entsprechend, auch $m+1$-fach unendlich viele Integralconoide der gegebenen Gleichung $p_1 = \psi$. Ist diese aber linear, so stellen die Relationen:

$$\mathfrak{z} = z^0,\; \mathfrak{x}_2 = x_2^0 \,.\,.\, \mathfrak{x}_m = x_m^0$$

∞^m Raumkurven dar (Art. 311); die Integralconoide degeneriren also in diesem Falle in die Elementvereine, welche sich bezw. an gewisse ∞^m Kurven anschliefsen. Diese Kurven sind nichts anderes als die Charakteristiken der jetzt linearen partiellen Differentialgleichung $p_1 = \psi$ (Art. 311 und 53).

Umgekehrt erkennt man leicht, dafs die gegebene partielle Differentialgleichung $p_1 = \psi$ notwendig linear sein mufs, wenn es nur m-fach unendlich viele Integralconoide geben soll. In diesem Falle gehört nämlich immer zu je ∞^1 Punkten des R_{m+1} dasselbe Integralconoid; dadurch ist eine „*Zerlegung*" des R_{m+1} in m-fach unendlich viele Raumkurven gegeben, derart, dafs zu allen Punkten derselben

Raumkurve dasselbe Integralconoid gehört, und dafs durch jeden Punkt eine und nur eine derartige Kurve C hindurchgeht. Es sei C eine solche Kurve, P ein bestimmter, P' ein beliebiger Punkt derselben. Da nun die zu P, bezw. P' gehörigen Integralconoide identisch sind, so müssen auch alle ∞^{m-1} charakteristischen Streifen, die den Punkt P enthalten, identisch sein mit den ∞^{m-1} Charakteristiken, welche von P' (bezw. von den Flächenelementen des zu P' gehörigen Elementarkegels) auslaufen, da ja das genannte Integralconoid nur von ∞^{m-1}, nicht von ∞^m Charakteristiken erzeugt sein kann. Zu allen Charakteristiken also, deren Ausgangselemente den Punkt P enthalten, gehört dieselbe eindimensionale Punktmannigfaltigkeit C, und die Element-M_m, die sich an die Kurve C anschliefst, ist also nach Art. 328 eine Integral-M_m der gegebenen partiellen Differentialgleichung, da sie von ∞^{m-1} charakteristischen Streifen erzeugt wird. Sind also die Raumkurven C durch die Gleichungen:

$$f_i(z, x_1 \,..\, x_m) = c_i \qquad (i = 1, 2, \,..\, m)$$

definirt, so hat nach Kap. VII unsere partielle Differentialgleichung notwendig die Form:

$$\begin{vmatrix} -1, & p_1 & p_2 & \cdot\cdot & p_m \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial z} & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = 0,$$

was zu zeigen war.

Die Integralconoide können auch im Falle einer nicht linearen Gleichung $p_1 = \psi$ degeneriren, d. h. die zugehörigen Punktmannigfaltigkeiten können ϱ-fach ausgedehnt sein, wo ϱ eine Zahl der Reihe $2, 3, \,..\, m-1$ bedeutet. So hat man z. B. $\varrho \leqq m-1$, wenn die gegebene partielle Differentialgleichung dem Typus $\gamma)$ angehört. Auf eine genauere Diskussion der hier auftretenden Möglichkeiten können wir indessen nicht eingehen.

332. Hat man die Pfaff'sche Gleichung $\nabla_0 = 0$ auf eine reduzirte Form:

$$(23) \qquad dZ - \Pi_2 d\Xi_2 - \cdot\cdot - \Pi_m d\Xi_m = 0,$$

worin die Funktionen:

$$(24) \qquad Z, \Pi_i, \Xi_i \qquad (i = 2, 3, \,..\, m)$$

von den Variabeln $z, x_1 \,..\, x_m\, p_2 \,..\, p_m$ abhängen, so bestehen die $m+1$

Definitionsgleichungen für die allgemeinste Integral-M_m der Gleichung $p_1 = \psi$ aus dieser Relation selbst und einem beliebigen m-gliedrigen Gleichungensystem:

$$\Omega_i'(Z, \Xi_2 \,.\,.\, \Xi_m \Pi_2 \,.\,.\, \Pi_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, m),$$

das die Pfaff'sche Gleichung (23) befriedigt. Interpretiren wir nun die $2m - 1$ Gröfsen (24) als die Koordinaten der Flächenelemente eines Raums R_m mit den Punktkoordinaten $Z, \Xi_2 \,.\,.\, \Xi_m$, so können wir dieser Thatsache folgenden Ausdruck geben:

Durch die $2m - 1$ Funktionen (24) wird eine „Abbildung" der partiellen Differentialgleichung $p_1 = \psi$ auf den Raum R_m vermittelt, in dem Sinne, dafs jeder Integral-M_m der partiellen Differentialgleichung eine ganz bestimmte Element-M_{m-1} des R_m, und umgekehrt jeder Element-M_{m-1} des R_m eine ganz bestimmte Integral-M_m der Gleichung $p_1 = \psi$ entspricht.

Setzen wir die Funktionen (24) beliebigen Konstanten gleich, so erhalten wir ein Relationensystem, das mit $p_1 = \psi$ zusammen eine Charakteristik dieser Gleichung darstellt; demnach können wir hinzufügen:

Bei der genannten Abbildung entspricht jedem Flächenelemente des R_m eine Charakteristik der partiellen Differentialgleichung und umgekehrt.

333. Benutzt man statt der Funktionen (24) die in Art. 325 gebrauchten Hauptintegrale ζ, ξ_i, π_i so gewinnt der soeben geschilderte Abbildungsprozefs eine besonders einfache Bedeutung.

Den Raum $R_m(\zeta, \xi_2 \,.\,.\, \xi_m)$, in welchem wir die $2m - 1$ Gröfsen:

$$\zeta, \xi_2 \,.\,.\, \xi_m \pi_2 \,.\,.\, \pi_m$$

als Elementkoordinaten interpretiren, können wir jetzt mit derjenigen m-dimensionalen ebenen Punktmannigfaltigkeit identifiziren, welche durch die Relation $x_1 = x_1^0$ aus dem Raum $R_{m+1}(z x_1 \,.\,.\, x_m)$ ausgeschnitten wird. Durch jedes Flächenelement des Raums R_{m+1}:

$$z^0 x_1^0 \,.\,.\, x_m^0 p_1^0 \,.\,.\, p_m^0 \tag{25}$$

dessen Koordinaten durch die Relation:

$$p_1^0 = \psi(z^0 x_1^0 \,.\,.\, x_m^0 p_2^0 \,.\,.\, p_m^0 c) \tag{26}$$

aneinander geknüpft sind, ist dann ein Flächenelement:

$$z^0 x_2^0 \,.\,.\, x_m^0 p_2^0 \,.\,.\, p_m^0 \tag{27}$$

des R_m bestimmt, in dem Sinne, dafs die zu dem Element (25) gehörige Ebene des R_{m+1}:

$$z - z^0 = p_1^0 (x_1 - x_1^0) + \cdots + p_m^0 (x_m - x_m^0)$$

den Raum R_m nach einer „Ebene“ dieses Raums schneidet, die durch die Gleichung:

$$\zeta - z^0 = p_2^0 (\xi_2 - x_2^0) + \cdots + p_m^0 (\xi_m - x_m^0)$$

definirt wird. Umgekehrt ist durch jedes Flächenelement (27) des R_m ein ganz bestimmtes Flächenelement (25) des R_{m+1} festgelegt, wenn man $p_1{}^0$ aus der Gleichung (26) berechnet.

Wir drücken diese Beziehung kurz dadurch aus, dafs wir sagen: das Flächenelement (25) *schneidet* aus dem Raum R_m das Flächenelement (27) *aus*, und umgekehrt *geht* durch jedes Flächenelement (27) dieses Raums ein und nur ein der Gleichung $p_1 = \psi$ genügendes Flächenelement des R_{m+1} *hindurch*.

Die Relationen:

(28) $\quad p_1 = \psi;\ \zeta = z^0,\ \xi_i = x_i{}^0,\ \pi_i = p_i{}^0 \qquad (i = 2, 3, \ldots m)$

definiren nun den charakteristischen Streifen, der das Ausgangselement (25) enthält; wir können daher sagen: die Charakteristik (28) schneidet aus dem R_m das Flächenelement (27) aus, und ist durch Angabe des letzteren eindeutig festgelegt.

Eine beliebige Integral-M_m der Gleichung $p_1 = \psi$ wird erzeugt von ∞^{m-1} Charakteristiken, von denen jede aus dem R_m ein Flächenelement dieses Raums ausschneidet; alle so erhaltenen Flächenelemente bilden eine Element-M_{m-1} des R_m, welche, wie wir sagen können, von der betrachteten Integral-M_m aus dem R_m ausgeschnitten wird.

Bedeuten also ζ, ξ_i, π_i die $2m - 1$ Hauptintegrale der linearen homogenen Gleichung (1) *hinsichtlich $x_1 = x_1{}^0$, und deuten wir diese Gröfsen als Koordinaten der Flächenelemente desjenigen Raums R_m, der innerhalb des Raums $R_{m+1}(zx_1 \ldots x_m)$ durch die Relation $x_1 = x_1{}^0$ definirt ist, so erhalten wir eine Abbildung der Gleichung $p_1 = \psi$, bei der jeder Charakteristik dasjenige Flächenelement, nach dem sie den R_m schneidet, ferner jeder Integral-M_m diejenige Element-M_{m-1} entspricht, die sie aus dem R_m ausschneidet.*

Umgekehrt entspricht bei dieser Abbildung jedem Flächenelement, bezw. jeder Element-M_{m-1} des R_m eine und nur eine Charakteristik, bezw. Integral-M_m der partiellen Differentialgleichung $p_1 = \psi$.

Insbesondere entspricht bei dieser Abbildung jedem Integralconoid der Gleichung $p_1 = \psi$, dessen Spitze P im R_m gelegen ist, diejenige Element-M_{m-1} dieses Raums, welche von allen durch P gehenden Flächenelementen des R_m gebildet wird, und umgekehrt.

Ist z. B. die partielle Differentialgleichung:

(29) $$p = \psi(xyzq)$$

gegeben, und ist ψ an der Stelle $x_0 y_0 z_0 q_0$ regulär, bezeichnet man ferner mit:

$$\zeta(xyzq),\ \eta(xyzq),\ \varkappa(xyzq)$$

diejenigen Integrale der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$-\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y} + \left(q\frac{\partial \psi}{\partial q} - \psi\right)\frac{\partial f}{\partial z} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + q\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

die sich für $x = x_0$ bezw. auf z, y, q reduziren, und deuten wir ζ, η, $\varkappa$ als Koordinaten der Linienelemente in der Ebene $x_1 = x_1^0$ (Art. 179), so entspricht jedem Verein von ∞^1 Linienelementen dieser Ebene, d. h. jedem zweigliedrigen Gleichungensystem in ζ, η, $\varkappa$, das die Pfaff'sche Gleichung:

$$d\zeta - \varkappa d\eta = 0$$

erfüllt, eine Integral-M_2 der Gleichung (29). So giebt es z. B. eine und nur eine Integralfläche von (29), welche aus unserer Ebene die durch die Gleichung:

$$z = \varphi(y)$$

definirte Kurve ausschneidet; ihre Gleichung ergiebt sich durch Elimination von q aus den Relationen:

$$\zeta = \varphi(\eta); \quad \varkappa = \frac{d\varphi(\eta)}{d\eta},$$

nachdem man darin die ζ, η, $\varkappa$ durch ihre Ausdrücke in $xyzq$ ersetzt hat. Das Integralconoid mit der Spitze $x_0 y_0 z_0$ erhält man durch Elimination der Variabeln q aus den zwei Gleichungen:

$$\zeta = z_0,\ \eta = y_0,$$

eine Elimination, die immer ausführbar ist, wenn ψ nicht die Form $A(xyz)q + B(xyz)$ besitzt.

Ist (23) eine beliebige reduzirte Form der Pfaff'schen Gleichung $\nabla_0 = 0$, so sind die $Z \Xi_i \Pi_i$ Funktionen der $2m - 1$ Variabeln $\zeta \xi_i \pi_i$ allein, und zwar die rechten Seiten einer Berührungstransformation dieser Gröfsen. Darnach können wir sagen:

Aus der vorhin definirten speziellen Abbildung erhalten wir die allgemeinste, in Art. 332 charakterisirte Abbildung, indem wir auf die $2m - 1$ Veränderlichen ζ, ξ_i, π_i eine beliebige Berührungstransformation ausüben; ebenso gewinnen wir aus irgend einer bestimmten Abbildung der genannten Art die allgemeinste durch Ausübung einer Berührungstransformation.

334. Unter den mehr als m-gliedrigen Relationensystemen, welche die Pfaff'sche Gleichung $\nabla_0 = 0$ oder:

$$d\zeta - \pi_2 d\xi_2 - \cdots - \pi_m d\xi_m = 0$$

befriedigen, befinden sich nach Kap. VII auch solche, die sich nicht durch die Variabeln $\zeta\xi_i\pi_i$ allein ausdrücken lassen. Ist demnach ν eine Zahl $< m$, so bilden diejenigen Integral-M_ν der Gleichung $p_1 = \psi$, die sich durch ein Gleichungensystem der Form:

$$p_1 = \psi, \; \Omega_i(\zeta, \xi_2 \ldots \xi_m \pi_2 \ldots \pi_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots 2m - \nu)$$

darstellen lassen, eine besondere Kategorie von ν-fach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten; wir wollen dieselben als „*charakteristische* M_ν“ der Gleichung $p_1 = \psi$ bezeichnen; eine charakteristische M_1 ist darnach nichts anderes als ein charakteristischer Streifen. Bei der Abbildung der vorigen Nr. entspricht jeder charakteristischen M_ν die Element-$M_{\nu-1}$, die sie aus dem Raume R_m ausschneidet, und umgekehrt geht durch jede Element-$M_{\nu-1}$ dieses Raums eine ganz bestimmte charakteristische M_ν der partiellen Differentialgleichung hindurch.

Eine charakteristische M_ν ist offenbar dadurch gekennzeichnet, daſs sie von $\infty^{\nu-1}$ Charakteristiken erzeugt wird.

335. Wir betrachten ein Flächenelement E_0 mit den Koordinaten:

$$z^0 x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0 p_1^0 p_2^0 \ldots p_m^0, \tag{30}$$

das die gegebene partielle Differentialgleichung $p_1 = \psi$ erfüllt; ferner bedeute E_0' ein benachbartes Flächenelement, dessen Koordinaten die Werte:

$$z^0 + dz^0,\; x_1^0,\; x_2^0 + dx_2^0, \ldots x_m^0 + dx_m^0,\; p_1^0 + dp_1^0 \ldots p_m^0 + dp_m^0$$

besitzen. Wir nehmen an, daſs die Relationen:

$$\begin{gathered} dz^0 - p_2^0 dx_2^0 - \cdots - p_m^0 dx_m^0 = 0 \\ dp_1{}^0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial z^0} dz^0 + \sum_2^m{}_i \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x_i^0} dx_i{}^0 + \frac{\partial \psi_0}{\partial p_i^0} dp_i{}^0 \right) \end{gathered} \tag{31}$$

bestehen, wenn mit ψ_0 die rechte Seite der Gleichung (26) bezeichnet wird, daſs also E_0' mit E_0 vereinigt liegt und ebenfalls die gegebene Gleichung $p_1 = \psi$ befriedigt.

Durch die Ausgangselemente E_0 und E_0' sind zwei unendlich benachbarte charakteristische Streifen C bezw. C' festgelegt. Ist E ein bestimmtes Flächenelement des von E_0 auslaufenden Streifens C, und sind zx_ip_i dessen Koordinaten, so sind die Gröſsen:

$$z + dz,\; x_i + dx_i,\; p_i + dp_i$$

die Koordinaten eines zu E benachbarten Flächenelements E' des Nachbarstreifens C', falls die Inkremente dz, $dx_i\, dp_i$ den Relationen:

$$(32)\quad dp_1 = d\psi;\ d\zeta = dz^0;\ d\xi_i = dx_i^0;\ d\pi_i = dp_i^0 \quad (i = 2, 3 \ldots m)$$

genügen; die Differentiationssymbole auf den linken Seiten dieser Gleichungen, sowie das Symbol $d\psi$ beziehen sich auf alle $2m$ Variabeln $zx_1 \ldots x_m p_2 \ldots p_m$. Nun hat man aber die Identität:

$$dz - \psi dx_1 - p_2 dx_2 - \cdots - p_m dx_m \equiv \varrho(d\zeta - \pi_2 d\xi_2 - \cdots - \pi_m d\xi_m)$$

und die Koordinaten von E genügen den Relationen:

$$p_1 = \psi;\ \zeta = z^0;\ \xi_i = x_i^0;\ \pi_i = p_i^0 \qquad (i = 2, 3, \ldots m);$$

aus diesen Beziehungen folgt also mit Rücksicht auf (31) und (32):

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m = 0,$$

d. h. die beiden Flächenelemente E und E' befinden sich in vereinigter Lage.

Wenn zwei benachbarte Streifen C, C' die Eigenschaft besitzen, daſs ein beliebiges Element E von C mit allen benachbarten, auf C' gelegenen Elementen vereinigt liegt, so sagen wir: „*die beiden Nachbarstreifen CC' liegen ihrer ganzen Ausdehnung nach vereinigt.*

Demnach können wir folgenden Satz aussprechen:

Genügen zwei benachbarte, vereinigt liegende Flächenelemente E_0 und E_0' alle beide der gegebenen partiellen Differentialgleichung $p_1 = \psi$, und besitzen sie dieselbe Koordinate $x_1 = x_1^0$, so liegen die beiden von ihnen auslaufenden charakteristischen Streifen ihrer ganzen Ausdehnung nach vereinigt.

Dieser Satz ist, wie wir sogleich sehen werden, nur eine andere Ausdrucksform für die Resultate der Nr. 330.

336. Indem wir die in Art 327 gegebene analytische Darstellung der charakteristischen Streifen heranziehen, gelangen wir zu einer naheliegenden Verallgemeinerung des soeben formulirten Satzes.

Sind χ, λ_i, μ_i die in Art. 327 definirten Funktionen der $2m + 2$ Variabeln:

$$(33)\qquad t, z^0, x_1^0 \ldots x_m^0, p_1^0 \ldots p_m^0,$$

so bezeichnen wir mit (F) diejenige Funktion, die aus der linken Seite der gegebenen partiellen Differentialgleichung $F = c$ entsteht, wenn man darin die Variabeln zx_ip_i bezw. durch χ, λ_i, μ_i ersetzt. Da F eine Lösung der homogenen linearen Gleichung (12) oder auch des simultanen Systems (16) ist, so hat man identisch für jedes beliebige Wertsystem (33):

$$(34)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \chi}{\partial t} \equiv \varrho \displaystyle\sum_1^m \mu_i \dfrac{\partial (F)}{\partial \mu_i} \\ \dfrac{\partial \lambda_i}{\partial t} \equiv \varrho \dfrac{\partial (F)}{\partial \mu_i};\ \dfrac{\partial \mu_i}{\partial t} \equiv -\varrho\left(\dfrac{\partial (F)}{\partial \lambda_i} + \mu_i \dfrac{\partial (F)}{\partial \chi}\right), \end{cases}$$

wenn in ϱ die $z x_i p_i$ durch die χ, λ_i, μ_i ersetzt werden.

Wir bezeichnen nun mit U den Pfaff'schen Ausdruck:

$$d\chi - \mu_1 d\lambda_1 - \mu_2 d\lambda_2 - \cdots - \mu_m d\lambda_m$$

worin das Differentiationssymbol d sich auf alle $2m+2$ Variabeln (33) bezieht. Dann folgt mit Rücksicht auf (34):

$$\frac{\partial U}{\partial t} \equiv d\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \sum_1^m \frac{\partial \mu_i}{\partial t} d\lambda_i - \sum_1^m \mu_i d\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial t}\right)$$

$$(35)\qquad \begin{aligned} &\equiv d\left[\varrho \sum_1^m \frac{\partial (F)}{\partial \mu_i} \cdot \mu_i\right] + \\ &+ \varrho \sum_1^m \left[\frac{\partial (F)}{\partial \lambda_i} + \mu_i \frac{\partial (F)}{\partial \chi}\right] d\lambda_i - \sum_1^m \mu_i d\left[\varrho \frac{\partial (F)}{\partial \mu_i}\right] \\ &\equiv \varrho \sum_1^m \left[\left(\frac{\partial (F)}{\partial \lambda_i} + \mu_i \frac{\partial (F)}{\partial \chi}\right) d\lambda_i + \frac{\partial (F)}{\partial \mu_i} d\mu_i\right]. \end{aligned}$$

Nun ist F ein Integral von (12), also enthält (F) die Variabele t nur scheinbar, und wird somit nicht geändert, wenn man t durch τ ersetzt. Durch diese Substitution aber verwandeln sich die Funktionen χ, λ_i, μ_i bezw. in $z^0 x_i^0 p_i^0$, d. h. man hat für jedes beliebige Wertsystem (33) identisch:

$$(F) \equiv F(z^0 x_1^0 \ldots x_m^0 p_1^0 \ldots p_m^0).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung werde F_0 genannt; durch totale Differentiation folgt jetzt:

$$\sum \left[\frac{\partial (F)}{\partial \mu_i} d\mu_i + \frac{\partial (F)}{\partial \lambda_i} d\lambda_i\right] \equiv dF_0 - \frac{\partial (F)}{\partial \chi} d\chi.$$

Aus (35) erhalten wir nunmehr:

$$(36)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\equiv \varrho\left[dF_0 - \frac{\partial (F)}{\partial \chi} d\chi\right] + \varrho \frac{\partial (F)}{\partial \chi} \cdot \sum \mu_i d\lambda_i \\ &\equiv -\varrho \frac{\partial (F)}{\partial \chi} \cdot U + \varrho\, dF_0. \end{aligned}$$

Diese Relation kann als eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit der Unbekannten U und der unabhängigen Variabeln t gedeutet werden.

Wir schreiben nun:

$$\sigma \equiv e^{-\int_\tau^t \varrho \frac{\partial (F)}{\partial \chi} dt}\quad ; \quad \sigma' \equiv \int_\tau^t \frac{\varrho}{\sigma} dt,$$

wobei ϱ als Funkton der $2m+2$ Gröfsen (33) auszudrücken, und bei den Quadraturen die Gröfsen $z^0 x_i^0 p_i^0$ als Konstante zu behandeln sind. Verstehen wir daher unter U_0 den Ausdruck, in den U vermöge $t = \tau$ übergeht, so folgt aus (36):

$$U \equiv \sigma U_0 + \sigma' dF_0,$$

d. h. also:

$$(37) \qquad d\chi - \sum_1^m \mu_i d\lambda_i \equiv \sigma \left(dz^0 - \sum_1^m p_i^0 dx_i^0 \right) + \sigma' dF_0,$$

worin dF_0 für:

$$\frac{\partial F_0}{\partial z^0} dz^0 + \sum \frac{\partial F_0}{\partial x_i^0} dx_i^0 + \sum \frac{\partial F_0}{\partial p_i^0} dp_i^0$$

geschrieben wurde, und σ, σ' gewisse Funktionen der $2m+2$ Variabeln (33) bedeuten.

Sind nun z^0, x_i^0, p_i^0 die Koordinaten eines nicht singulären Flächenelements E_0, so sind χ, λ_i, μ_i, wenn t beliebig gewählt wird, die Koordinaten irgend eines Flächenelements E der von E_0 ausgehenden Charakteristik. Ist dann E_0' irgend ein zu E_0 benachbartes Flächenelement mit den Koordinaten

$$z^0 + dz^0,\ x_1^0 + dx_1^0,\ ..\ x_m^0 + dx_m^0,\ p_1^0 + dp_1^0\ ..\ p_m^0 + dp_m^0,$$

und setzt man beispielsweise:

$$d\chi \equiv \frac{\partial \chi}{\partial t} dt + \frac{\partial \chi}{\partial z^0} dz^0 + \sum \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_i^0} dx_i^0 + \frac{\partial \chi}{\partial p_i^0} dp_i^0 \right),$$

so sind $\chi + d\chi$, $\lambda_i + d\lambda_i$, $\mu_i + d\lambda_i$, wenn dt willkürlich gewählt wird, die Koordinaten des allgemeinsten, zu E benachbarten Flächenelements, das auf der durch E_0' gehenden Nachbarcharakteristik gelegen ist. Aus der Identität (37) folgt jetzt sofort:

Genügen zwei benachbarte, vereinigt liegende Flächenelemente $z^0 \,..\, p_m^0$ und $z^0 + dz^0, .. p_m^0 + dp_m^0$ alle beide der gegebenen partiellen Differentialgleichung $F = c$, d. h. sind die Relationen:

$$F_0 = c,\ dF_0 = 0$$

erfüllt, so liegen die von ihnen auslaufenden benachbarten charakteristischen Streifen ihrer ganzen Ausdehnung nach vereinigt.

337. Wir ersetzen in den vorhin gebrauchten Funktionen χ, λ_i, μ_i die Variabeln $z^0 x_i^0 p_i^0$ bezw. durch z, x_i, p_i, ferner τ durch null und t durch $-t$, und betrachten das Gleichungensystem:

$$(38)\qquad \begin{cases} z' = \chi\,(-t, z, x_1 \,.\,.\, x_m, p_1 \,.\,.\, p_m) \\ x_i' = \lambda_i(-t, z, x_1 \,.\,.\, x_m, p_1 \,.\,.\, p_m) \\ p_i' = \mu_i(-t, z, x_1 \,.\,.\, x_m, p_1 \,.\,.\, p_m) \end{cases} \qquad (i = 1, 2 \,.\,.\, m)$$

das eine eingliedrige Gruppe von Transformationen der $2m + 1$ Veränderlichen zxp darstellt, diejenige nämlich, die von der infinitesimalen Transformation:

$$(39)\qquad [Ff] \equiv \sum_1^m {}_s \left\{ \frac{\partial F}{\partial p_s}\left(\frac{\partial f}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_s} \right\}$$

erzeugt wird (Art. 54).

Übt man auf ein beliebiges Flächenelement (30), das nicht sämtliche $2m$ Relationen:

$$(40)\qquad \frac{\partial F}{\partial p_s} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (s = 1, 2, \,.\,.\, m)$$

befriedigt, alle ∞^1 Transformationen (38) aus, so durchläuft es die von ihm ausgehende Charakteristik der partiellen Differentialgleichung $F = F_0$. Die ∞^{2m} charakteristischen Streifen der Gleichung $F = c$ (worin c eine *arbiträre* Konstante bedeutet), können aus diesem Grunde auch als die „Bahnstreifen" der infinitesimalen Transformation $[Ff]$ bezeichnet werden.

Bezeichnet c eine bestimmte numerische Konstante, so ordnet die infinitesimale Berührungstransformation:

$$(39\text{a})\qquad [Ff] - (F - c)\frac{\partial f}{\partial z}$$

jedem Flächenelement, das die Relation $F = c$ erfüllt, genau dasselbe unendlich benachbarte (mit ihm vereinigt liegende) Flächenelement zu, wie die infinitesimale Transformation $[Ff]$; übt man also auf ein beliebiges nicht singuläres Flächenelement E_0 der partiellen Differentialgleichung $F = c$ die von der infinitesimalen Transformation (39a) erzeugte eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen aus, so durchläuft es gleichfalls die von ihm ausgehende Charakteristik dieser Gleichung.

Nach Art. 245 und 329 gestattet nun jedes $m + 1$-gliedrige Gleichungensystem:

(41) $\quad F = c; \ \Omega_i(z x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = 0 \qquad (i = 1 \ldots m),$
das eine Integral-M_m von $F = c$ darstellt, die infinitesimale Transformation $[Ff]$; sind also die Relationen (40) vermöge (41) nicht alle erfüllt, so wird unsere Integral-M_m von $m - 1$-fach unendlich vielen Charakteristiken erzeugt, d. h. ist E_0 ein nicht singuläres Flächenelement dieser M_m, so ist die ganze Charakteristik mit dem Ausgangselement E_0 auf der M_m enthalten.

Der Satz der vorigen Nr. läfst sich jetzt so aussprechen:

Zwei beliebige benachbarte Flächenelemente $z x_i p_i$ und $z + dz$, $x_i + dx_i$, $p_i + dp_i$, die sich in vereinigter Lage befinden und den Gleichungen:

$$F = c, \ dF = 0$$

genügen, werden durch jede Transformation der eingliedrigen Gruppe (38) wiederum in zwei benachbarte, vereinigt liegende Elemente $z' x_i' p_i'$ und $z' + dz'$, $x_i' + dx_i'$, $p_i' + dp_i'$ übergeführt, die den Relationen:

$$F(z' \ldots p_m') = c; \quad \frac{\partial F(z' \ldots p_m')}{\partial z'} dz' + \cdots + \frac{\partial F(z' \ldots p_m')}{\partial p_m'} dp_m' = 0$$

genügen.

338. *Um darnach die allgemeinste Integral-M_m der gegebenen Gleichung $F = c$ zu finden, wähle man eine Integral-M_{m-1} derselben beliebig, doch so, dafs sie keine charakteristische M_{m-1} ist, und nicht aus lauter singulären Flächenelementen besteht, und bestimme zu jedem Flächenelement dieser M_{m-1} die von ihm auslaufende Charakteristik; die so erhaltenen ∞^{m-1} Streifen erzeugen dann eine Integral-M_m; oder etwas anders ausgedrückt: Unterwirft man die gewählte Integral-M_{m-1} den ∞^1 Transformationen der eingliedrigen Gruppe* (38) (*oder auch: der von der infinitesimalen Transformation* (39a) *erzeugten eingliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen*), *so nimmt sie ∞^1 Lagen an, die zusammengenommen eine Integral-M_m der partiellen Differentialgleichung $F = c$ bilden.*

Gleichzeitig erkennt man, dafs eine beliebig gewählte Integral-M_{m-1}, die nicht alle Relationen (40) *erfüllt, auch nur auf einer Integral-M_m enthalten ist.*

Dafs jede nicht singuläre Integral-M_m auf diese Weise erhalten werden kann, ist eine unmittelbare Folge der Thatsache, dafs eine solche M_m von ∞^{m-1} Charakteristiken erzeugt wird. Um zu zeigen, dafs man durch den genannten Prozefs auch wirklich immer eine Integral-M_m erhält, genügt es offenbar nachzuweisen, dafs auf dem angegebenen Wege überhaupt eine Element-M_m zu stande kommt.

Es werde mit S_0 die willkürlich gewählte Ausgangs-M_{m-1} bezeichnet; dann bilden die ∞^{m-1} Charakteristiken, die bezw. von den

Flächenelementen des Elementvereins S_0 auslaufen, notwendig eine Schar S von ∞^m Flächenelementen; denn enthielte S nur ∞^{m-1} Flächenelemente, so wäre es mit S_0 identisch, und S_0 wäre sonach von ∞^{m-2} Charakteristiken erzeugt, also eine charakteristische M_{m-1}, was ausgeschlossen wurde.

Es sei nun E_0 ein Flächenelement von S_0, und E ein beliebiges Flächenelement der von E_0 auslaufenden Charakteristik C. Man erhält dann alle der Schar S angehörenden, zu E benachbarten Flächenelemente, wenn man alle zu C benachbarten Charakteristiken der Schar S und auf jeder die zu E benachbarten Flächenelemente aufsucht. Da aber alle in S_0 enthaltenen, zu E_0 benachbarten Flächenelemente mit E_0 vereinigt liegen, so sind die erwähnten Nachbarcharakteristiken nach Nr. 336 alle mit C ihrer ganzen Ausdehnung nach vereinigt; die Schar S besitzt also die Eigenschaft, dafs ein beliebiges Element E derselben mit allen Nachbarelementen derselben Schar vereinigt liegt, und dies ist nach Kap. VII die charakteristische Eigenschaft eines Elementvereins; w. z. b. w.

Die partielle Differentialgleichung $F = c$ besitzt also eine und nur eine Integral-M_m, die eine willkürlich vorgeschriebene Integral-M_{m-1} enthält, vorausgesetzt, dafs die letztere weder singulär, noch charakteristisch ist.

Eine *charakteristische* Integral-M_{m-1} ist demgegenüber offenbar dadurch ausgezeichnet, dafs sie auf unbegrenzt vielen Integral-M_m der gegebenen partiellen Differentialgleichung enthalten ist.

339. Der vorhin geschilderte Integrationsprozefs läfst sich analytisch folgendermafsen formuliren:

Auf den rechten Seiten der Gleichungen:

$$(42) \qquad \left.\begin{aligned} z &= \chi(t, z^0, x_1^0 \,.\,.\, x_m^0 p_1^0 \,.\,.\, p_m^0) \\ x_i &= \lambda_i(t, z^0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad p_m^0) \\ p_i &= \mu_i(t, z^0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad p_m^0) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1 \,.\,.\, m)$$

denken wir uns die Gröfsen $z^0\, x_i^0\, p_i^0$ durch ein Gleichungensystem der Form:

$$(43) \quad z^0 = \mathfrak{z}(u_1 u_2 \,.\,.\, u_{m-1});\; x_i^0 = \mathfrak{x}(u_1 \,.\,.\, u_{m-1});\; p_i^0 = \mathfrak{p}(u_1 \,.\,.\, u_{m-1})$$

als Funktionen der Parameter $u_1 \,.\,.\, u_{m-1}$ derart bestimmt, dafs die Relationen:

$$(44) \qquad F(z^0 \,.\,.\, p_m^0) = c;$$

$$dz^0 - p_1^0 dx_1^0 - \cdot\cdot - p_m^0 dx_m^0 = 0$$

identisch für alle Werte der u_i und ihrer Differentiale bestehen, d. h.

also, dafs durch die Gleichungen (43) eine Integral-M_{m-1} der gegebenen partiellen Differentialgleichung dargestellt wird. Durch (42) werden dann die $z x_i p_i$ als Funktionen der m unabhängigen Parameter $t, u_1 \,..\, u_{m-1}$ dargestellt, und die Elimination der letzteren liefert die $m+1$ Definitionsgleichungen derjenigen Integral-M_m, welche die willkürlich angenommene Integral-M_{m-1} (43) enthält; jede nicht singuläre Integral-M_m kann auf diesem Wege erhalten werden.

Wie man die allgemeinste Integral-M_{m-1} erhält, haben wir in Art. 300 gesehen. Darnach braucht man nur zu den in den Variabeln $z^0 x_i^0 p_i^0$ geschriebenen $m+1$ Definitionsgleichungen einer ganz beliebigen Element-M_m die Relation (44) hinzuzufügen und mittels der so erhaltenen Gleichungen $m+2$ von den Gröfsen $z^0 x_i^0 p_i^0$ als Funktionen der $m-1$ übrigen auszudrücken, welch' letztere dann mit den Parametern u_i identifizirt werden können.

So liefern beispielsweise die Relationen:

$$z^0 = \varphi(x_2^0 \,..\, x_m^0); \quad x_1^0 = \omega(x_2^0 \,..\, x_m^0) \tag{45}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i^0} - p_1^0 \frac{\partial \omega}{\partial x_i^0} - p_i^0 = 0 \qquad (i = 2, 3, \,..\, m) \tag{46}$$

mit (44) zusammen eine Integral-M_{m-1}; die Elimination der $2m+2$ Gröfsen t, $z^0 x_i^0 p_i^0$ aus den $3m+3$ Gleichungen (42) (44) (45) (46) ergiebt die $m+1$ Definitionsgleichungen derjenigen Integral-M_m, welche die willkürlich gewählte Punktmannigfaltigkeit (45) enthält.

Die soeben geschilderte Methode zur Herstellung der allgemeinsten, nicht singulären Integral-M_m ist insofern etwas allgemeiner als das Verfahren des Art. 315, als sie eventuell auch solche Integral-M_m zu liefern imstande ist, welche die m Relationen:

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = 0, \;\; \cdots \;\; \frac{\partial F}{\partial p_m} = 0,$$

nicht aber alle Gleichungen (40) erfüllen. Jede der ∞^{m-1} Charakteristiken, von denen eine solche M_m erzeugt wird, besteht aus ∞^1 Flächenelementen, die denselben Punkt enthalten (Art. 327), und die Punktmannigfaltigkeit, an die sich eine derartige Integral-M_m anschliefst, ist daher höchstens $m-1$-fach ausgedehnt. Es brauchen nicht notwendig Integral-M_m dieser Art zu existiren. *Alle andern nicht singulären Integral-M_m dagegen können auch durch das Verfahren des Art. 315 gewonnen werden.*

340. Ist ein vollständiges, aus Flächen bestehendes Integral:

$$z = \Phi(x_1 \,..\, x_m \, c_1 \,..\, c_m, c) \tag{47}$$

der Gleichung $F = c$ gegeben, so sind die ∞^{2m-1} charakteristischen Streifen durch die Relationen:

$$(48)\quad z = \Phi,\ p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i};\ \frac{\partial \Phi}{\partial c_k} + b_k \frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 0 \qquad (i = 1 \,..\, m;\ k = 2 \,..\, m)$$

definirt. Um diejenige Charakteristik zu bestimmen, die das nichtsinguläre Flächenelement $z^0 x_i^0 p_i^0$ enthält, hat man in diesen Relationen für die c_i und b_k ihre aus den $2m$ Gleichungen:

$$(49)\quad z^0 = \Phi^0;\ p_i^0 = \frac{\partial \Phi^0}{\partial x_i^0};\ \frac{\partial \Phi^0}{\partial c_k} + b_k \frac{\partial \Phi^0}{\partial c_1} = 0 \qquad (i = 1 \,..\, m;\ k = 2 \,..\, m)$$ [1]

folgenden Werte einzusetzen. Dafs diese $2m$ Gleichungen verträglich sind und für die $c_i b_k$ ein und nur ein Wertsystem ergeben, folgt unmittelbar daraus, dafs das Flächenelement $z^0\, x_i^0\, p_i^0$ der gegebenen Differentialgleichung:

$$(50)\qquad F(z^0 x_1^0 \,..\, p_m^0) = c$$

genügt und nicht singulär ist. Es werde jetzt durch die Gleichungen:

$$(51)\qquad \Omega_i(z^0 x_1^0 \,..\, p_m^0) = 0 \qquad (i = 1 \,..\, m + 1)$$

und durch (50) eine beliebige Integral-M_{m-1} dieser Gleichung dargestellt. Die Relationen (48) (49) (50) (51) reduziren sich auf $5m + 1$ unabhängige; eliminirt man aus ihnen die $4m$ Gröfsen $z^0 x_i^0 p_i^0 c_i b_k$, so ergeben sich die $m + 1$ Definitionsgleichungen der Integral-M_m, welche die Mannigfaltigkeit (50) (51) enthält. Auch wissen wir, dafs die genannte Elimination stets möglich ist und ein $m + 1$-gliedriges Gleichungensystem ergiebt, vorausgesetzt, dafs die durch (50) (51) dargestellte Integral-M_{m-1} weder charakteristisch noch singulär ist.

Wollen wir z. B. diejenige Integralfuntion z der Gleichung $F = c$ finden, welche sich vermöge $x_1 = x_1^0$ auf die willkürlich vorgeschriebene Funktion $\varphi(x_2 \,..\, x_m)$ reduzirt, so haben wir als Ausgangs-M_{m-1} die folgende zu wählen:

$$(52)\quad \begin{cases} F(z^0 x_1^0 \,..\, p_m^0) = c;\ z^0 = \varphi_0;\ x_1^0 = \text{const.} \\ p_i^0 = \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x_i^0} \qquad (i = 2, 3, \,..\, m) \quad [\varphi_0 \equiv \varphi(x_2^0 \,..\, x_m^0)]. \end{cases}$$

Die Elimination der Gröfsen $z^0 p_2^0 \,..\, p_m^0,\ b_2 \,..\, b_m$ aus (48) (49) (52) liefert die Relationen:

$$z = \Phi;\ \varphi_0 = \Phi^0;\ \frac{\partial \Phi^0}{\partial c_i} = \varrho \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial c_i} \qquad (i = 1 \,..\, m)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_k^0} = \frac{\partial \Phi^0}{\partial x_k^0} \qquad (k = 2, 3 \,..\, m)$$

---

1) $\Phi^0 \equiv \Phi\,(x_1^0 \,..\, x_m^0\, c_1 \,..\, c_m\, c)$.

und durch Elimination der $2m$ Gröfsen $c_1 \dots c_m\, x_2^0 \dots x_m^0,\ \varrho$ aus diesen $2m + 1$ Gleichungen gewinnt man die gesuchte Relation in den Variabeln $z x_1 \dots x_m$ allein.

Um noch ein anderes Beispiel für das geschilderte Verfahren zu betrachten, sei:

(53) $$z = \Phi(xy, ab)$$

irgend ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung:

(54) $$p = \psi(xyzq),$$

und es seien:

(55) $$z_0 = \zeta(x_0);\ y_0 = \eta(x_0);\ p_0 = \pi(x_0);\ q_0 = \varkappa(x_0)$$

die Definitionsgleichungen irgend eines Streifens, dessen ∞^1 Flächenelemente die Relation (54) befriedigen, und der weder eine Charakteristik dieser Gleichung darstellt, noch auch aus lauter singulären Flächenelementen besteht. Will man jetzt diejenige Integralfläche finden, die den Streifen (55) enthält, so hat man die acht Gröfsen $z_0 x_0 y_0 p_0 q_0,\ a, b, c$ aus den Relationen:

$$z = \Phi,\ p = \frac{\partial \Phi}{\partial x},\ q = \frac{\partial \Phi}{\partial y},\ z_0 = \Phi_0, p_0 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_0},\ q_0 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_0},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} + c\,\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0;\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial a} + c\,\frac{\partial \Phi_0}{\partial b} = 0,\ z_0 = \zeta, y_0 = \eta, p_0 = \pi, q_0 = \varkappa\ ^{1)}$$

zu eliminiren; diese 12 Relationen reduziren sich auf 11 unabhängige, da ja sowohl aus der vierten, fünften und sechsten als auch aus den letzten vier Gleichungen die Relation:

$$p_0 = \psi(x_0 y_0 z_0 q_0)$$

hervorgeht. Der Streifen (55) bestimmt unter den gemachten Annahmen im allgemeinen eine durch ihn hindurchgehende Integral*fläche:*

(56) $$z = \omega(xy).$$

Eine Ausnahme würde nur dann eintreten, wenn alle ∞^2 Flächenelemente, die sich an die Raumkurve:

$$z = \zeta(x);\ y = \eta(x)$$

anschliefsen, die Gleichung (54) erfüllten, was nur unter speziellen Annahmen über die Funktion ψ der Fall ist. Sehen wir von dieser Möglichkeit ab, so mufs sich die gesuchte Gleichung (56) offenbar auch ergeben, wenn man aus den Relationen:

---

1) $\Phi_0 \equiv \Phi(x_0 y_0 ab)$.

$$z = \Phi; \; \frac{\partial \Phi}{\partial a} + c\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0, \; \frac{\partial \Phi_0}{\partial a} + c\frac{\partial \Phi_0}{\partial b} = 0$$

$$\zeta(x_0) = \Phi_0, \; \pi(x_0) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_0}; \; y_0 = \eta(x_0)$$

die 5 Gröfsen $x_0 y_0$, a, b, c eliminirt. Die so erhaltene Fläche (56) läfst sich augenscheinlich auch definiren als die Enveloppe derjenigen eingliedrigen Flächenschar, welche erhalten wird, wenn man zu jedem einzelnen Flächenelement E des Streifens (55) die Fläche der Schar (53) bestimmt, auf welcher E gelegen ist.

341. Es erübrigt noch mit ein paar Worten auf den Fall einzugehen, dafs eine partielle Differentialgleichung:

$$(57) \qquad F\left(x_1 x_2 \cdots x_m \frac{p_1}{p_m} \frac{p_2}{p_m} \cdots \frac{p_{m-1}}{p_m}\right) = c$$

vom Typus γ) vorgelegt ist, und die zweite Definition des Integralbegriffs (Art. 302) bevorzugt wird. Löst man die Gleichung (57) folgendermafsen auf:

$$p_1 = \psi(x_1 \ldots x_m p_2 \ldots p_m c),$$

und bringt man den Pfaff'schen Ausdruck:

$$\nabla_0' \equiv \psi dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_m dx_m$$

nach der Methode des § 2 auf die Normalform:

$$\pi_2 d\xi_2 + \pi_3 d\xi_3 + \cdots + \pi_m d\xi_m,$$

wobei hinsichtlich der Variabeln $p_2 \ldots p_m$ die π_i homogen erster, die ξ_i homogen nullter Ordnung sind, so definiren die Relationen:

$$p_1 = \psi; \; \frac{\pi_3}{\pi_2} = \gamma_3 \; \frac{\pi_4}{\pi_2} = \gamma_4 \cdots \frac{\pi_m}{\pi_2} = \gamma_m; \; \xi_2 = c_2 \cdots \xi_m = c_m$$

ein System von ∞^{2m-3} Streifen, d. h. Scharen von je einfach unendlich vielen Flächenelemente $x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m$ des Raums $R_m(x_1 x_2 \ldots x_m)$; diese Streifen sind nach der gegenwärtigen Auffassung als die „Charakteristiken“ oder „charakteristischen Streifen“ der partiellen Differentialgleichung (57) zu bezeichnen, während nach der früheren Auffassung, d. h. also im $R_{m+1}(z x_1 \ldots x_m)$ die Charakteristiken durch das System:

$$z = c_1, \; \pi_i = \gamma_i; \; \xi_i = c_i; \; p_1 = \psi \qquad (i = 2, 3 \ldots m)$$

dargestellt werden.

Als „singuläres Flächenelement“ $x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m$ der Gleichung (57) werden wir jetzt ein solches bezeichnen, das allen Relationen:

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_m = \frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial x_2} : \cdots : \frac{\partial F}{\partial x_m}$$

$$F = 0; \ \frac{\partial F}{\partial p_1} = 0 \cdot\cdot \frac{\partial F}{\partial p_m} = 0$$

genügt. Eine Element-M_{m-1} des Raums $R_m(x_1 \,.\,.\, x_m)$ heißt ein singuläres Integral der Gleichung (57), wenn sie die obigen $2m$ Relationen alle befriedigt.

In Bezug auf die Erzeugung der nicht singulären Integrale durch die Charakteristiken und die Herstellung der allgemeinsten Integral-M_{m-1} gelten nunmehr ganz analoge Sätze wie früher. Ein genaueres Eingehen auf diese Verhältnisse erscheint um so weniger geboten, als diese Theorie auf die frühere einfach dadurch zurückgeführt werden kann, daſs man $-p_\iota$ statt $\frac{p_\iota}{p_m}$, und z statt x_m schreibt.

342. Die in den letzten beiden §§ entwickelte Methode, durch welche die Integration der partiellen Differentialgleichung:

(58) $$F(z x_1 \,.\,.\, x_m p_1 \,.\,.\, p_m) = c$$

auf diejenige der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung $[Ff] = 0$, mithin also auf die Integration des simultanen Systems:

(59) $$\frac{dx_\iota}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_\iota}; \ \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_\iota \frac{\partial F}{\partial z}\right); \ \frac{dz}{dt} = \sum p_k \frac{\partial F}{\partial p_k}$$

reduzirt wird, rührt von Cauchy[1]) her, und wird daher als die *Cauchy'sche Methode* bezeichnet. Die viel später veröffentlichte sogenannte „erste Jacobi'sche Methode“[2]) (vgl. den § 2 dieses Kapitels) ist also dem Wesen der Sache nach mit der Cauchy'schen identisch, und unterscheidet sich von der letzteren lediglich durch die Art der Herleitung. Während nämlich Jacobi an die Pfaff'sche Formulirung des Integrationsproblems anknüpft (Art. 305 und 307) und den Nachweis erbringt, daſs bereits die *erste* der nach Pfaff nötigen Reduktionen des Ausdrucks ∇_0 zur Lösung des Problems hinreicht, gelangt Cauchy zu seiner Methode ungefähr durch folgende Überlegung:

Es werde durch die Gleichungen:

(60) $$z = \varphi(x_1 x_2 \,.\,.\, x_m); \ p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \qquad (i = 1 \,.\,.\, m),$$

ein Integral der partiellen Differentialgleichung (58) dargestellt. Dann gelten die Identitäten:

(61) $$\frac{\partial F}{\partial x_\iota} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} + \sum_1^m {}_s \frac{\partial F}{\partial p_s} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\iota \partial x_s} = 0 \quad (i = 1, 2, \,.\,.\, m)$$

1) Cauchy I, II, III. 2) Jacobi IV.

für jedes beliebige Wertsystem der Variabeln $x_1 \dots x_m$, wenn die Gröfsen z und p_ι durch ihre Ausdrücke (60) ersetzt werden. Machen wir dieselbe Substitution auf den rechten Seiten der Gleichungen:

$$(62) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \dots m),$$

so erhalten wir ein simultanes System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit den unbekannten Funktionen $x_1 x_2 \dots x_m$ und der Independenten t. Die allgemeinsten Integralfunktionen dieses Systems seien durch die Gleichungen:

$$(63) \qquad x_i = \mathfrak{x}_i(t, u_1 u_2 \dots u_{m-1}) \qquad (i = 1, 2 \dots m)$$

dargestellt, worin $u_1 u_2 \dots u_{m-1}$ arbiträre Konstante bedeuten. Vermöge (60) lassen sich dann auch die z, p_i in der Form:

$$(64) \qquad z = \mathfrak{z}(t, u_1 \dots u_{m-1});\ p_\iota = \mathfrak{p}_i(t, u_1 \dots u_{m-1})$$

darstellen. Nun hat man aber wegen (61):

$$\frac{dp_\iota}{dt} = \sum_1^m{}_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_s} \frac{dx_s}{dt} = \sum_1^m{}_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\iota \partial x_s} \frac{\partial F}{\partial p_s} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = \sum{}_s p_s \frac{dx_s}{dt} = \sum{}_s p_s \frac{\partial F}{\partial p_s},$$

also sind die durch (63) und (64) definirten Funktionen von t *Integralfunktionen des simultanen Systems* (59). Setzt man demnach:

$$x_i^0 = \mathfrak{x}_i(\tau, u_1 \dots u_{m-1});\ z^0 = \mathfrak{z}(\tau, u_1 \dots u_{m-1});\ p_i^0 = \mathfrak{p}_i(\tau, u_1 \dots)$$

unter τ eine beliebige Konstante verstanden, und werden durch die Relationen:

$$(65) \qquad \begin{cases} z = \chi\,(t,\, z^0,\, x_1^0 \dots x_m^0 p_1^0 \dots p_m^0) \\ x_i = \lambda_i(t,\, z^0,\, \dots\dots\dots p_m^0) \qquad (i = 1 \dots m) \\ p_i = \mu_i(t,\, z^0,\, \dots\dots\dots p_m^0) \end{cases}$$

wie früher diejenigen Integralfunktionen des simultanen Systems (59) definirt, die für $t = \tau$ bezw. die Werte $z^0 x_i^0 p_i^0$ annehmen, so sind die Relationen (65) mit dem Gleichungensystem (63) (64) identisch, und liefern durch Elimination der Variabeln t und u_ι wiederum das System (60).

Jedes (*nichtsinguläre*) *Integral* (60) *der vorgelegten partiellen Differentialgleichung ergiebt sich also aus den allgemeinen Integralgleichungen* (65) *des simultanen Systems* (59) *dadurch, dafs man für die Gröfsen* $z^0 x_i^0 p_i^0$ *geeignete Funktionen der Parameter* $u_1 u_2 \dots u_{m-1}$ *einsetzt und sodann die Gröfsen* t *und* u_i *eliminirt.*

Wie man sofort erkennt, ist dieser Satz nur eine andere Ausdrucksform des in Art. 245 erhaltenen Resultats, wonach das Gleichungensystem (60), falls es ein Integral der partiellen Differentialgleichung $F = c$ darstellen soll, die infinitesimale Transformation $[Ff]$, und mithin (Art. 55) auch alle Transformationen der von ihr erzeugten eingliedrigen Gruppe gestatten mufs.

343. Sind jetzt umgekehrt die allgemeinen Integralgleichungen (65) des simultanen Systems (59) gefunden, so erhebt sich die Frage, wie man die Gröfsen $z^0 x_i^0 p_i^0$ als Funktionen der u_i zu bestimmen hat, damit die Gleichungen (65) durch Elimination der t und u_i wirklich ein Integral der Gleichung $F = c$ ergeben.

Es ist dazu offenbar notwendig und hinreichend, dafs für jedes Wertsystem $t u_1 \,.\,.\, u_{m-1}$ die Identitäten:

$$(66) \qquad \begin{gathered} F(\chi, \lambda_1 \,.\,.\, \lambda_m \, \mu_1 \,.\,.\, \mu_m) \equiv c \\ d\chi - \mu_1 d\lambda_1 - \cdot \cdot - \mu_m d\lambda_m \equiv 0 \end{gathered}$$

stattfinden, wobei sich die Differentiale $d\chi$, $d\lambda_i$ auf alle Variabeln t, u_i beziehen. Da die linke Seite von (66) die Variabele t nicht enthält, so genügt es, darin $t = \tau$ zu setzen, also die gesuchten Funktionen $z^0 x_i^0 p_i^0$ der Bedingung:

$$(67) \qquad F(z^0 x_1^0 \,.\,.\, x_m^0 p_1^0 \,.\,.\, p_m^0) \equiv c$$

zu unterwerfen. Man beweist nunmehr die Identität (37), und zeigt dadurch, dafs die zweite der obigen Bedingungen darauf hinauskommt, dafs die Funktionen $z^0 x_i^0 p_i^0$ der Identität:

$$dz^0 - p_1^0 dx_1^0 - \cdot \cdot - p_m^0 dx_m^0 \equiv 0$$

genügen müssen. Damit erhalten wir unsere frühere Methode wieder.

Cauchy gebraucht statt der Independenten t die Variabele x_1; dadurch werden dann alle diejenigen Integrale, deren Ausgangs-M_{m-1} aufser der Gleichung (67) zufällig auch noch die Bedingung:

$$\frac{\partial F(z_1^0 \,.\,.\, p_m^0)}{\partial p_1^0} = 0$$

befriedigt, von der Betrachtung ausgeschlossen. Auf diese einfache Bemerkung reduzirt sich der „Einwand", den J. Bertrand[1]) gegen die Cauchy'sche Methode erhoben hat.

Der Schlufssatz der vorigen Nr., der den ersten Teil der Cauchy'schen Überlegung ausmacht, läfst sich offenbar auch so aussprechen:

---

1) Bertrand II.

Es seien die Funktionen:

$$\omega_\iota(z x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots 2m)$$

irgend $2m$ unabhängige Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung $[Ff] = 0$. Definiren dann die Relationen (60) *ein nicht singuläres Integral der Gleichung $F = c$, so lassen sie sich durch ein $m+1$-gliedriges Gleichungensystem in den Gröfsen $\omega_1 \ldots \omega_{2m}$ allein ersetzen* (vgl. Art. 426).

In dieser Form ergiebt sich unser Satz auch unmittelbar aus den Resultaten des Art. 50, wenn man bedenkt, dafs die durch (60) definirten Funktionen z, p_ι dem nachstehenden System linearer nicht homogener partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung genügen müssen:

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_i}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_m}\frac{\partial p_\iota}{\partial x_m} = -\frac{\partial F}{\partial x_\iota} - p_i \frac{\partial F}{\partial z} \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_m}\frac{\partial z}{\partial x_m} = \sum p_s \frac{\partial F}{\partial p_s}.$$

344. Wir wollen die Cauchy'sche Methode durch einige Beispiele erläutern.

1. Beispiel (Cauchy):

$$pq = xy.$$

Das simultane System (59) wird hier:

$$dx : dy : dz : dp : dq = q : p : 2pq : y : x$$

oder also vermöge der gegebenen Differentialgleichung:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}; \; \frac{dq}{q} = \frac{dy}{y}; \; dz = 2p dx = 2q dy;$$

die Charakteristik, die von dem Flächenelement $x_0 y_0 z_0 p_0 q$ ausläuft, ist demnach durch die Gleichungen:

$$(68) \qquad \frac{p}{p_0} = \frac{x}{x_0}; \; \frac{q}{q_0} = \frac{y}{y_0}; \; z - z_0 = \frac{p_0}{x_0}(x^2 - x_0^2) = \frac{q_0}{y_0}(y^2 - y_0^2)$$

definirt. Als Ausgangsstreifen wählen wir den folgenden:

$$x = x_0; \; z = \varphi(y); \; q = \varphi'(y); \; p = \frac{x_0 y}{\varphi'(y)};$$

die durch ihn gehende Integralfläche, d. h. diejenige Integralfunktion z, die für $x = x_0$ in $\varphi(y)$ übergeht, folgt dann durch Elimination von y_0 aus den Gleichungen:

$$z - \varphi(y_0) = \frac{y_0}{\varphi'(y_0)}(x^2 - x_0^2) = \frac{\varphi'(y_0)}{y_0}(y^2 - y_0^2).$$

Das Integralconoid mit der Spitze $x_0 y_0 z_0$ ist dargestellt durch:

$$(z - z_0)^2 = (x^2 - x_0^2)(y^2 - y_0^2),$$

denn diese Gleichung ergiebt sich durch Elimination der Gröſsen p_0, q_0 aus den zwei letzten Relationen (68) und der Gleichung $p_0 q_0 = x_0 y_0$. Die Gleichung $z = 0$ stellt das einzige singuläre Integral dar.

2. Beispiel:

$$p_1 p_2 \ldots p_m = x_1 x_2 \ldots x_m.$$

Das simultane System (59) kann hier so geschrieben werden:

$$p_1 dx_1 = \cdot\cdot = p_m dx_m = \frac{dz}{m} = x_1 dp_1 = \cdot\cdot = x_m dp_m.$$

Die Charakteristik mit dem Ausgangselement $\bar{z}\bar{x}_i\bar{p}_i$ ist definirt durch:

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{p}_1}; \;\cdot\cdot\; \frac{x_m}{p_m} = \frac{\bar{x}_m}{\bar{p}_m};$$

$$(69) \qquad 2\frac{z - \bar{z}}{m} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{x}_1}(x_1^2 - \bar{x}_1^2) = \cdot\cdot = \frac{\bar{p}_m}{\bar{x}_m}(x_m^2 - \bar{x}_m^2),$$

und die Elimination der $\bar{p}_i$ aus den zuletzt hingeschriebenen Gleichungen liefert mit Rücksicht auf die Beziehung:

$$\bar{p}_1 \bar{p}_2 \ldots \bar{p}_m = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_m$$

das Integralconoid mit der Spitze $\bar{z}\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_m$:

$$\frac{2^m}{m^m}(z - \bar{z})^m = (x_1^2 - \bar{x}_1^2)(x_2^2 - \bar{x}_2^2)\cdot\cdot(x_m^2 - \bar{x}_m^2).$$

Diejenige Integralfunktion z, die sich vermöge $x_1 = x_1^0$ auf die Funktion $\varphi(x_2 \ldots x_m)$ reduzirt, wird erhalten, indem man in den Relationen (69) die Gröſsen:

$$\bar{x}_1, \; \bar{z}, \; \bar{p}_1, \; \bar{p}_1 \;\cdot\cdot\; \bar{p}_m$$

bezw. durch die nachstehenden Ausdrücke ersetzt:

$$x_1^0; \; \bar{\varphi}; \; \frac{x_1^0 \, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_m}{\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}_3} \cdot\cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}_m}}; \; \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}_2}; \;\cdot\cdot\; \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}_m},$$

und sodann $\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_m$ eliminirt. Das einzige singuläre Integral ist $z = 0$.

3. Beispiel.

$$2z - px + qy + q^2 = 0$$

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{y + 2q} = \frac{dz}{q^2 - 2z} = \frac{dp}{-p} = \frac{-dq}{3q};$$

die Charakteristik mit dem Ausgangselement $x_0 y_0 z_0 p_0 q_0$ ist die folgende:

$$p = p_0 \frac{x}{x_0}; \quad q = q_0 \frac{x^3}{x_0^{\,3}};$$

$$y = -\frac{q_0}{2} \frac{x^3}{x_0^{\,3}} + \left(y_0 + \frac{q_0}{2}\right) \frac{x_0}{x};$$

$$z = -\frac{q_0^{\,2}}{4} \frac{x^6}{x_0^{\,6}} + \left(z_0 + \frac{q_0^{\,2}}{4}\right) \frac{x^2}{x_0^{\,2}}.$$

Durch Elimination von q_0 aus den beiden letzten Gleichungen erhält man das Integralconoid mit der Spitze $x_0 y_0 z_0$:

$$z = x^2 \left[\frac{z_0}{x_0^{\,2}} + \frac{(xy - x_0\, y_0)^2}{x_0^{\,4} - x^4}\right],$$

und hieraus durch Variation der Konstanten die allgemeinste Integralfläche.

Kapitel XIII

Involutionssysteme.

§ 1. Anwendung der Theorie der Berührungstransformationen auf partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung; die verallgemeinerte Cauchy'sche Methode.

345. Die im vorigen Kapitel dargelegte Cauchy'sche Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$(1) \qquad F(z x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m) = c_1$$

erfordert im Falle α) die Integration der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(2) \quad 0 = [Ff] \equiv \sum_1^m {}_s \left\{ \frac{\partial F}{\partial p_s} \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial p_s} \right\},$$

also, da von dieser Gleichung das Integral F bekannt ist, je eine Operation:

$$2m - 1,\ 2m - 2,\ ..\ 3,\ 2,\ 1;$$

sie verlangt ferner im Falle β) die Integration der Gleichung:

$$0 = (Ff) \equiv \sum_1^m {}_s \left(\frac{\partial F}{\partial p_s} \frac{\partial f}{\partial x_s} - \frac{\partial F}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial p_s} \right)$$

und eine Quadratur, also je eine Operation:

$$2m-2,\ 2m-3,\ ..\ 3,\ 2,\ 1,\ 0;$$

im Falle γ) kommt die Quadratur in Wegfall. Doch ist dieser Fall noch einer weiteren Vereinfachung fähig; er läfst sich nämlich durch die Substitution von $-p_i$ für $\frac{p_i}{p_m}$ und von z für x_m auf eine Gleichung vom Typus α) mit $m-1$ Independenten zurückführen, deren Integration sonach je eine Operation:

$$2m-3,\ 2m-4,\ ..\ 3,\ 2,\ 1$$

verlangt.

Eine wesentliche Vereinfachung dieses Verfahrens wird erzielt, wenn wir die Resultate des Kap. XI heranziehen. Darnach lassen sich durch je eine Operation:

$$2m-1,\ 2m-3,\ ..\ 5,\ 3,\ 1,$$

$2m+1$ unabhängige Funktionen Z, X_i, P_i der Variabeln $z\,x_i\,p_i$ so bestimmen, dafs eine Identität der Form:

$$(3)\quad dZ-P_1dX_1-\cdots-P_mdX_m\equiv\varrho(dz-p_1dx_1-\cdots-p_mdx_m)$$

besteht, und zwar kann die Funktion:

$$X_1(z,x_1\,..\,x_m\,p_1\,..\,p_m)$$

willkürlich angenommen werden. Identifiziren wir daher X_1 mit F, so erhalten wir durch dieses Verfahren ein vollständiges Integral:

$$(4)\qquad Z=c_{m+1},\ X_1=c_1\ ..\ X_m=c_m$$

der gegebenen partiellen Differentialgleichung $X_1=c_1$, womit nach Art. 319 das Problem der Integration dieser Gleichung vollkommen erledigt ist. Die Funktionen Z, X_2, X_3 .. X_m werden wie in Art. 287 ermittelt, indem man der Reihe nach je ein Integral gewisser vollständiger Systeme aufsucht; die Funktionen P_i und ϱ folgen hinterher durch Auflösung eines linearen Gleichungensystems. Die Relationen:

$$(5)\qquad Z=c_{m+1};\ X_1=c_1\,..\,X_m=c_m;\ P_2=\gamma_2,\ ..\ P_m=\gamma_m$$

stellen die ∞^{2m-1} Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung:

$$(6)\qquad X_1(z\,x_1\,..\,x_m\,p_1\,..\,p_m)=c_1$$

dar, wenn $c_2\,c_3\,..\,c_{m+1}\,\gamma_2\,..\,\gamma_m$ arbiträre Konstante bedeuten; denn die linken Seiten der Gleichungen (5) bilden nach Art. 283 ein System von $2m$ unabhängigen Integralen der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$[X_1,f]=0.$$

Die Aufgabe, alle (nicht singulären) Integral-M_m der Gleichung

(6) zu finden, kommt darauf hinaus, alle $m + 1$-gliedrigen Gleichungensysteme zu ermitteln, welche die Pfaff'sche Gleichung:

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdot\cdot P_m dX_m = 0$$

befriedigen und die Relation $X_1 = c_1$ enthalten, m. a. W. alle m-gliedrigen Relationensysteme aufzustellen, welche die Gleichung:

$$dZ - P_2 dX_2 - \cdot\cdot - P_m dX_m = 0$$

erfüllen. Jedes derartige Gleichungensystem hat die Form:

$$\Omega_i(Z, X_2 \,..\, X_m,\; P_2 \,..\, P_m) = 0 \qquad (i = 1 \,..\, m),$$

und wird nach den Vorschriften des Kap. VII erhalten; auf diese Weise werden, wie man sofort erkennt, alle Resultate des vorigen Kapitels, insbesondere auch die in Art. 332 dargelegte *Abbildung* der partiellen Differentialgleichung (6) wiedergewonnen.

346. Eine neue Auffassung unserer Theorie fließt aus folgender Überlegung: Besteht die Identität (3) und ist ϱ nicht identisch null, so definiren die Formeln:

$$(7) \qquad z' = Z;\; x_i' = X_i;\; p_i' = P_i \qquad (i = 1, 2 \,..\, m)$$

eine Berührungstransformation des Raums $R_{m+1}(zx_1 \,..\, x_m)$, vermöge deren die gegebene partielle Differentialgleichung (6) die Form:

$$(8) \qquad x_1' = c_1$$

erhält. Deutet man diese Relation als eine partielle Differentialgleichung in den Elementkoordinaten $z'x_i'p_i'$, so erhält man ihre Integral-M_m durch Aufsuchung aller m-gliedrigen Integraläquivalente der Pfaff'schen Gleichung:

$$dz' - p_2' dx_2' - \cdot\cdot - p_m' dx_m' = 0.$$

Es sind dies also beliebige m-fach ausgedehnte Elementvereine des Raums $R_{m+1}'(z'x_1' \,..\, x_m')$, deren zugehörige Punktmannigfaltigkeiten in der Ebene $x_1' = c_1$ dieses Raums gelegen sind. Jeder solchen Element-M_m entspricht vermöge der Berührungstransformation (7) eine (nicht singuläre) Integral-M_m der gegebenen partiellen Differentialgleichung, und umgekehrt.

Die Charakteristiken der Gleichung (6), welche durch die Formeln (5) dargestellt werden, verwandeln sich vermöge (7) in die nachstehenden ∞^{2m-1} Streifen:

$$(9) \qquad z' = c_{m+1};\; x_i' = c_i;\; p_k' = \gamma_k \qquad (i = 1 \,..\, m;\; k = 2, \,..\, m).$$

Es sind dies nichts anderes als die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (8), da ja

$$[x_1', f]_{z'x'p'} \equiv -\frac{\partial f}{\partial p_1'},$$

also die rechten Seiten von (9) ein System von $2m$ unabhängigen Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$[x_1', f] = 0$$

bilden. Man erhält sonach die allgemeinste Charakteristik der Gleichung (8), wenn man alle ∞^1 Flächenelemente betrachtet, welche einen Punkt P der Ebene $x_1' = c_1$ gemein haben, und deren Ebenen eine durch P gehende, in der Ebene $x_1' = c_1$ gelegene lineare Punkt-μ_{m-1} enthalten.

347. Kennt man eine Berührungstransformation (7), so ist damit nicht nur die Integration der Gleichung $X_1 = c_1$, sondern auch diejenige jeder partiellen Differentialgleichung der Form:

$$(10) \qquad \Phi(Z, X_1 \,.\,.\, X_m) = 0$$

miterledigt; denn nach Art. 301 kann man alle Element-M_m des Raums $R'_{m+1}(z' \,.\,.\, x'_m)$, welche die Gleichung:

$$\Phi(z', x_1' \,.\,.\, x'_m) = 0$$

erfüllen, ohne Integration angeben, und jeder solchen M_m entspricht vermöge der Berührungstransformation (7) ein Integral der partiellen Differentialgleichung (10) und umgekehrt.

Betrachten wir z. B. die sogenannte „verallgemeinerte Clairaut'sche Gleichung":

$$(11) \qquad z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdot\cdot + p_m x_m + \varphi(p_1 p_2 \cdot\cdot p_m)$$

und unterwerfen wir sie der Berührungstransformation:

$$z' = z - p_1 x_1 - \cdot\cdot - p_m x_m;\; x_i' = -p_i;\; p_i' = x_i \quad (i = 1 \cdot\cdot m),$$

so erhalten wir die Gleichung:

$$z' = \varphi(x_1' x_2' \,.\,.\, x'_m).$$

Die allgemeinste Element-M_m des Raums R'_{m+1}, welche diese Relation erfüllt, wird erhalten, indem man zu r ($\leqq m$) arbiträren Relationen:

$$\omega_i(x_1' \,.\,.\, x'_m) = 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, r),$$

diejenigen $m - r$ Gleichungen hinzufügt, die sich durch Elimination der λ_i aus den Gleichungen:

$$p_i' = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i'} + \lambda_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i'} + \cdot\cdot + \lambda_r \frac{\partial \omega_r}{\partial x_i'} \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, m)$$

ergeben. Indem wir zu den ursprünglichen Variabeln zx_ip_i zurückgehen, können wir das erhaltene Resultat offenbar auch so aussprechen:

Man erhält die allgemeinste Integral-M_m der partiellen Differentialgleichung (11), indem man aus der Gesamtheit der ∞^m Ebenen:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdot\cdot + c_mx_m + \varphi(c_1c_2 \cdot\cdot c_m), \tag{12}$$

nach irgend einem Gesetze eine $m - r$-gliedrige Schar herausgreift, und die Enveloppe dieser Schar bildet.

Die ∞^m Ebenen (12) bilden ein vollständiges Integral; die Fläche, deren Gleichung durch Elimination der c_i aus (12) und den Relationen:

$$x_i + \frac{\partial\varphi}{\partial c_i} = 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, m)$$

entsteht, ist ein singuläres Integral.

348. Nach Art. 196 ergeben zwei Berührungstransformationen, hintereinander ausgeübt, stets wieder eine Berührungstransformation; auch ist die zu einer Berührungstransformation inverse Transformation wiederum eine Berührungstransformation. Da andererseits jede beliebige partielle Differentialgleichung (6) nach dem oben Gesagten mittels einer Berührungstransformation die Form (8) erhalten kann, so folgt:

Jede partielle Differentialgleichung (1) *läfst sich durch eine Berührungstransformation in eine beliebig vorgeschriebene andere partielle Differentialgleichung:*

$$F'(z'x_1' \,.\,.\, x_m'p_1' \,.\,.\, p_m') = c_1 \tag{13}$$

verwandeln, m. a. W. eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung besitzt gegenüber allen Berührungstransformationen keine invariante Eigenschaft.

Führt eine Berührungstransformation (7) *die partielle Differentialgleichung* (1) *in die Gleichung* (13) *über, so verwandelt sie gleichzeitig jede nichtsinguläre Integral-M_ϱ* ($\varrho \leqq m$) *der ersteren in eine ebensolche Integral-M_ϱ der zweiten, ebenso jede Charakteristik der ersten in eine Charakteristik der zweiten, endlich jede charakteristische M_ν von* (1) (vgl. Art 334) *in eine charakteristische M_ν von* (13).

349. Identifiziren wir im Falle β) die rechte Seite der gegebenen partiellen Differentialgleichung (1) mit der in der Identität:

$$dU(x_1 \,.\,.\, x_mp_1 \,.\,.\, p_m) + \sum_1^m P_i(x_1 \,.\,.\, p_m)dX_i(x_1 \,.\,.\, p_m) \equiv \sum_1^m p_i dx_i$$

auftretenden Funktion X_1, so erhält man die Funktionen $X_2 \,.\,.\, X_m$ nach Art. 289 durch je eine Integrationsoperation:

$$2m-2,\ 2m-4,\ ..\ 4,\ 2,$$

worauf U durch eine Quadratur, und die P_i durch Auflösung eines linearen Gleichungensystems folgen. Die Charakteristiken der Gleichung:

(14) $$X_1(x_1\,..\,x_m p_1\,..\,p_m) = c_1,$$

werden durch die Relationen:

$$z = U + c_{m+1};\ X_1 = c_1\,..\,X_m = c_m;\ P_2 = \gamma_2\,..\,P_m = \gamma_m$$

dargestellt; die Formeln:

$$z = U + c;\ X_1 = c_1\,..\,X_m = c_m$$

definiren ein vollständiges Integral; die Bestimmung aller übrigen Integral-M_m kommt darauf hinaus, die Pfaff'sche Gleichung:

$$d(z-U) - P_2\,dX_2 - \cdots - P_m\,dX_m = 0,$$

durch m Relationen zwischen den Gröfsen:

$$z-U,\ X_2\,..\,X_m,\ P_2\,..\,P_m$$

zu befriedigen. Vermöge der Berührungstransformation:

(15) $$z' = z - U;\ x_i' = X_i;\ p_i' = P_i \qquad (i = 1, 2, ..\, m),$$

nimmt die gegebene partielle Differentialgleichung (14) die Gestalt (8) an.

Da zwei Berührungstransformationen der Form (15), hintereinander ausgeübt, stets wieder eine Berührungstransformation dieser Art liefern, so folgt ganz ähnlich wie vorhin:

Jede partielle Differentialgleichung der Form:

$$\Phi(x_1 x_2\,..\,x_m p_1 p_2\,..\,p_m) = c$$

kann durch eine Berührungstransformation der besonderen Form (15) *in eine beliebig vorgegebene andere Gleichung:*

$$\Phi'(x_1' x_2'\,..\,x_m' p_1' p_2'\,..\,p_m') = c$$

übergeführt werden. Dabei verwandelt sich gleichzeitig jede Integral-M_ϱ, Charakteristik und charakteristische M_ν der ersten Gleichung bezw. in eine Integral-M_ϱ, Charakteristik, charakteristische M_ν der zweiten.

350. Im Falle γ) endlich können wir die linke Seite von (1) mit der in der Identität:

$$P_1\,dX_1 + \cdots + P_m\,dX_m \equiv p_1\,dx_1 + \cdots + p_m\,dx_m$$

vorkommenden Funktion X_1 identifiziren und die Funktionen $X_2\,..\,X_m$ nach Art. 279 durch je eine Operation:

$$2m-3,\ 2m-5,\ \ldots 3,\ 1$$

die P_i sodann durch Auflösung linearer Gleichungensysteme ermitteln. Im Sinne von Art. 341 liefern dann die Gleichungen:

$$X_1 = c_1 \ldots X_m = c_m$$

ein vollständiges Integral, ferner die Relationen:

$$X_1 = c_1 \cdots X_m = c_m;\ P_1 : P_2 : \cdots : P_m = \gamma_1 : \gamma_2 : \cdots : \gamma_m$$

die ∞^{2m-2} Charakteristiken der gegebenen Gleichung:

$$(16) \qquad X_1\left(x_1 x_2 \ldots x_m \frac{p_1}{p_m} \ldots \frac{p_{m-1}}{p_m}\right) = c_1.$$

Die Ermittelung aller Integral-M_{m-1} dieser Gleichung kommt jetzt darauf hinaus, die Pfaff'sche Gleichung:

$$P_2 dX_2 + \cdots + P_m dX_m = 0$$

in allgemeinster Weise durch $m-1$ Relationen zwischen den Gröfsen:

$$P_2 \ldots P_m X_2 \ldots X_m$$

zu befriedigen, was nach Kap. VII ausgeführt wird. Durch die homogene Berührungstransformation:

$$x_i' = X_i,\ p_i' = P_i \qquad (i = 1, 2, \ldots m),$$

erhält die gegebene Gleichung (16) die Form $x_1' = c_1$ und es gelten die Schlufssätze der vorigen Nr., wenn man darin unter Φ, Φ' Funktionen versteht, die hinsichtlich der p_i bezw. der p_i' homogen nullter Ordnung sind, und die Worte: „Berührungstransformation der besondern Form (15)" durch die Worte: „homogene Berührungstransformation der Variabeln $x_1 \ldots p_m$" ersetzt.

351. Der Schlufssatz des Art. 245 läfst sich folgendermafsen aussprechen:

Wenn eine Element-M_m des Raums $R_{m+1}(z, x_1 \ldots x_m)$ die beiden Relationen:

$$(17) \qquad \Phi(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = 0,\ \Psi(z, x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = 0$$

erfüllt, so befriedigt sie auch die Gleichung $[\Phi\Psi] = 0$.

In dieser Form läfst sich unser Theorem auch so beweisen:

Wir nehmen an, dafs eine nicht singuläre Integral-M_m der ersten Gleichung (17) auch die zweite erfüllt. Ist dann E ein beliebiges, auf dieser Integral-M_m gelegenes Flächenelement mit den Koordinaten $z x_i p_i$, so geht durch dasselbe eine und nur eine Charakteristik der Gleichung $\Phi = 0$ hindurch. Das zu E benachbarte Flächenelement E' dieser Charakteristik hat die Koordinaten $z + dz,\ x_i + dx_i,\ p_i + dp_i,$

wobei die Inkremente dz, dx_i, dp_i durch die Relationen:

$$(18)\qquad \begin{cases} dz : dx_1 : \cdots : dx_m = dp_1 : \cdots : dp_m \\ = \sum p_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} : \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} : \cdots : \frac{\partial \Phi}{\partial p_m} : -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) : \text{etc.} \end{cases}$$

definirt sind. Da aber E' gleichfalls auf jener gemeinsamen Integral-M_m der beiden Gleichungen (17) gelegen ist, so mufs es der Relation $\Psi = 0$ ebenfalls genügen, d. h. man mufs haben:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} dz + \sum \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial \Psi}{\partial p_i} dp_i = 0,$$

wenn für die Verhältnisse der Differentiale dz, dx_i, dp_i ihre Werte (18) eingesetzt werden. Daraus ergiebt sich der obige Satz ohne weiteres. Ist die gemeinsame Integral-M_m ein *singuläres* Integral der Gleichung $\Phi = 0$, so ist unser Satz selbstverständlich.

Um darnach zu entscheiden, ob r beliebig vorgegebene partielle Differentialgleichungen:

$$(19)\qquad \Phi_i(zx_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \,..\, r)$$

Integrale gemein haben, müssen wir folgendermafsen verfahren.

Unter der Voraussetzung, dafs die Relationen (19) im Sinne von Art. 40 ein r-gliedriges Gleichungensystem bilden, können sie für $r > m + 1$ überhaupt keine Integral-M_m gemein haben; im Falle $r = m + 1$ besitzen sie eine und nur eine, eben durch das System (19) definirte gemeinsame Integral-M_m, wenn sämtliche Klammerausdrücke $[\Phi_i \Phi_k]$ vermöge (19) verschwinden (Art. 243).

Im Falle $r < m + 1$ stellen wir alle Relationen $[\Phi_i \Phi_k] = 0$ auf; liefern diese zusammen mit (19) ein mehr als r-gliedriges Gleichungensystem:

$$(20)\qquad \Phi_1' = 0, \,..\, \Phi_s' = 0 \qquad (s > r),$$

so bilden wir alle Relationen $[\Phi_i' \Phi_k'] = 0$; stellen diese dann mit (20) zusammen ein t-gliedriges Gleichungensystem dar, wobei $t > s$, so verfahren wir mit dem letzteren ebenso. In allen Fällen gelangen wir nach einer endlichen Anzahl von Schritten entweder auf ein mehr als $m + 1$-gliedriges Gleichungensystem, und die gegebenen Gleichungen (19) besitzen dann keine gemeinsamen Integrale; oder zu einem Gleichungensystem der Form:

$$(21)\qquad \Phi_i(zx_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m) = 0 \qquad (i = 1, \,..\, \nu;\ \nu \leqq m + 1),$$

von der Eigenschaft, dafs die sämtlichen Relationen:

$$[\Phi_i \Phi_k] = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \,..\, \nu),$$

eine Folge von (21) sind. Ein solches Gleichungensystem nennen wir ein *„ν-gliedriges Involutionssystem“*.

Die Aufsuchung etwaiger gemeinsamer Integrale irgend welcher partieller Differentialgleichungen (19) *kann also stets darauf zurückgeführt werden, die gemeinsamen Integrale eines Involutionssystems zu ermitteln.*

Der Fall eines $m+1$-gliedrigen Involutionssystems erledigt sich durch eine oben gemachte Bemerkung ohne weiteres; wir können uns also auf die Annahme $\nu < m+1$ beschränken.

352. Nach Art. 244 ist jedes mit einem Involutionssystem (21) äquivalente Gleichungensystem wiederum ein Involutionssystem. Wir nehmen zunächst an, dafs eine der Gleichungen (21) nach z auflösbar sei; dann kann das System (21) auf die Form:

$$z = \Psi(x_1 x_2 \,..\, x_m p_1 p_2 \,..\, p_m)$$

$$\Psi_i(x_1 x_2 \,..\, x_m p_1 p_2 \,..\, p_m) = 0 \quad (i = 1, 2, \,..\, \nu - 1) \tag{22}$$

gebracht werden. Ist keine der Relationen (22) nach einer der Variabeln p_ι auflösbar, so kann das System (22) die Form:

$$x_i = \psi_\iota(x_\nu, x_{\nu+1} \,..\, x_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \,..\, \nu - 1)$$

erhalten. Allgemein können wir ohne die Allgemeinheit zu beschränken annehmen, dafs die Relationen (22) sich in der Form:

$$p_\iota = \varphi_i(x_1 \,..\, x_m p_{\mu+1} \,..\, p_m) \qquad (i = 1, 2, \,..\, \mu) \tag{23}$$

$$\omega_h(x_1 x_2 \,..\, x_m) = 0 \qquad (h = \mu+1, \mu+2, \,..\, \nu - 1) \tag{24}$$

auflösen lassen, wobei μ eine gewisse Zahl der Reihe $0, 1, \,..\, \nu - 1$ ist, und im Falle $\mu = 0$ die Relationen (23) natürlich wegzulassen sind.

Wir behaupten, dafs die Gleichungen (24) nach $\nu - \mu - 1$ von den Variabeln $x_{\mu+1}, x_{\mu+2} \,..\, x_m$ aufgelöst werden können; andernfalls nämlich ergäbe sich aus dem System (24) mindestens *eine* Relation in $x_1 \,..\, x_\mu$ allein, etwa die folgende:

$$x_1 = \chi(x_2 x_3 \,..\, x_\mu).$$

Man hat aber:

$$[p_1 - \varphi_1, x_1 - \chi_1] \equiv 1,$$

und dies ist unmöglich, da ja die linke Seite dieser Identität nach der Bemerkung zu Anfang dieser Nr. vermöge des gegebenen Gleichungensystems verschwinden mufs. Wir können demnach annehmen, dafs die Gleichungen (24) nach $x_{\mu+1} \,..\, x_{\nu-1}$ auflösbar seien, und haben so den Satz gewonnen: „Jedes ν-gliedrige Involutionssystem:

$$\Phi_1 = 0 \,..\, \Phi_\nu = 0, \tag{21}$$

welches von z nicht frei ist, kann durch Auflösung folgende Form erhalten:

$$(25)\quad \begin{cases} z = \Phi(x_1 x_2 \ldots x_\mu,\ x_\nu x_{\nu+1} \ldots x_m p_{\mu+1} \ldots p_m) \\ p_i = \varphi_i(x_1 x_2 \ldots x_\mu,\ x_\nu x_{\nu+1} \ldots x_m p_{\mu+1} \ldots p_m) \\ x_{\mu+h} = \chi_h(x_1 x_2 \ldots x_\mu,\ x_\nu x_{\nu+1} \ldots x_m) \\ (i = 1, 2, \ldots \mu;\ h = 1, 2, \ldots \nu - \mu - 1), \end{cases}$$

wobei μ eine gewisse Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots \nu - 1$ bedeutet. Im Falle $\mu = 0$ sind natürlich die in der zweiten Zeile, für $\mu = \nu - 1$ die in der dritten Zeile stehenden Gleichungen des Systems (25) wegzulassen.

Schreiben wir:

$$\Omega \equiv \Phi + x_1(p_1 - \varphi_1) + x_2(p_2 - \varphi_2) + \cdots + x_\mu(p_\mu - \varphi_\mu),$$

so können wir die Gleichungen (25) ersetzen durch die folgenden:

$$z - \Omega = 0,\ p_i - \varphi_i = 0,\ x_{\mu+h} - \chi_h = 0$$
$$(i = 1 \ldots \mu;\ h = 1, 2, \ldots \nu - \mu - 1).$$

Jeder eckige Klammerausdruck, der aus irgend zweien der ν Funktionen

$$z - \Omega,\ p_i - \varphi_i,\ x_{\mu+h} - \chi_h,$$

gebildet wird, enthält nun, wie die Ausrechnung lehrt, ausschliefslich solche Variabeln, die nur auf den rechten Seiten von (25) auftreten, und ist also, da er vermöge (25) verschwinden mufs, überhaupt identisch null.

Damit ist gezeigt:

Jedes ν-gliedrige Involutionssystem kann auf eine äquivalente Form:

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ \ldots\ F_\nu = 0$$

gebracht werden, derart dafs sämtliche Klammerausdrücke $[F_i F_k]$ identisch verschwinden.

Jetzt stellen die Gleichungen:

$$F_1 = c_1,\ F_2 = c_2\ \ldots\ F_\nu = c_\nu$$

auch dann ein Involutionssystem dar, wenn unter den c_i *arbiträre* Konstanten verstanden werden, und solche Involutionssysteme wollen wir fortan ausschliefslich betrachten.

Haben ν unabhängige Funktionen $F_1 \ldots F_\nu$ der Variabeln $z x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m$ die Eigenschaft, dafs alle Klammerausdrücke $[F_i F_k]$ identisch verschwinden, so sagen wir: „sie sind *involutorisch*“ oder „*sie befinden sich in Involution*“ oder endlich: sie bilden ein *ν-gliedriges Involutionssystem.*

Sind $m + 1$ involutorische Funktionen $F_1 \ldots F_{m+1}$ gegeben, ist ferner i ein beliebiger Index der Reihe $1, \ldots m + 1$ und verstehen wir unter c_i eine numerische, unter $c_1 \,.\,.\, c_{i-1}\, c_{i+1} \,.\,.\, c_{m+1}$ dagegen arbiträre Konstante, so bilden die Gleichungen:

$$F_1 = c_1 \,.\,.\, F_{m+1} = c_{m+1},$$

ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung $F_i = c_i$.

353. Damit ein von z freies ν-gliedriges Relationensystem:

$$(26) \qquad \Phi_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_m p_1 p_2 \,.\,.\, p_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, \nu)$$

ein Involutionssystem bilde, ist notwendig und hinreichend, dafs alle Ausdrücke $(\Phi_i \Phi_k)$ vermöge (26) null sind. Die Gleichungen (26) mögen z. B. die Form haben:

$$(27) \qquad \Phi_i \equiv \sum_1^m {}^k a_{ik} p_k = 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, \nu),$$

worin die Koeffizienten a_{ik} Funktionen der Variabeln $x_1 \,.\,.\, x_m$ bedeuten. Betrachten wir dann die linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen:

$$(28) \qquad X_i f \equiv \sum_1^m {}^k a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0,$$

so gilt, wie man leicht sieht, die Identität:

$$X_i(X_k f) - X_k(X_i f) \equiv (\Phi_i \Phi_k),$$

wenn auf der rechten Seite die p_s durch $\frac{\partial f}{\partial x_s}$ ersetzt werden; daraus folgt: bilden die Gleichungen (27) ein Involutionssystem, welches nach ν von den Gröfsen $p_1 \,.\,.\, p_m$ auflösbar ist, so stellen die partiellen Differentialgleichungen (28) ein ν-gliedriges vollständiges System dar, und umgekehrt.

Ganz ähnlich wie in der vorigen Nr. läfst sich zeigen, dafs jedes ν-gliedrige von z freie Involutionssystem auf die Form:

$$(29) \qquad \begin{cases} p_i = \varphi_i(x_1 \,.\,.\, x_\mu,\ x_{\nu+1} \,.\,.\, x_m,\ p_{\mu+1} \,.\,.\, p_m) \\ x_{\mu+h} = \chi_h(x_1 \,.\,.\, x_\mu,\ x_{\nu+1} \,.\,.\, x_m) \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \,.\,.\, \mu;\ h = 1, 2, \,.\,.\, \nu - \mu)$$

gebracht werden kann, worin μ eine Zahl der Reihe 0, 1, 2, .. ν bedeutet; da nun jeder Klammerausdruck, der aus irgend zweien der Funktionen:

$$p_i - \varphi_i,\ x_{\mu+h} - \chi_h$$

gebildet wird, nur solche Variabeln enthält, die in (29) auf der rechten Seite vorkommen, und vermöge (29), also überhaupt identisch null ist, so hat man den Satz:

Jedes ν-gliedrige Involutionssystem der Form (26) *läfst sich auf eine Gestalt:*

$$F_i(x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = 0 \qquad (i = 1 \ldots \nu)$$

bringen, von der Eigenschaft, dafs alle $\frac{1}{2}\,\nu\,(\nu - 1)$ Klammerausdrücke $(F_i F_k)$ identisch verschwinden.

Die Relationen:

(30) $$F_1 = c_1 \ldots F_\nu = c_\nu$$

bilden jetzt für jedes beliebige Konstantensystem c_i ein ν-gliedriges Involutionssystem; wir nennen dann auch die Funktionen $F_1 \ldots F$ selbst ein ν-gliedriges Involutionssystem.

Aus der Definition des Involutionssystems folgt leicht:

Bilden die m Gleichungen:

$$p_i = \varphi_i(x_1 \ldots x_m) \qquad (i = 1 \ldots m)$$

ein Involutionssystem, so ist der Pfaff'sche Ausdruck:

$$\Sigma\, \varphi_i dx_i$$

ein exaktes Differential, und umgekehrt.

Ähnlich wie im vorigen Kapitel bezeichnen wir die Annahme, dafs ein gegebenes Involutionssystem (30) von z nicht unabhängig ist, als den Fall α); ferner die Voraussetzung, dafs alle Funktionen $F_1 \ldots F_\nu$ von z unabhängig, aber in den Variabeln p_i nicht alle homogen nullter Ordnung sind, als den Fall β); endlich die Annahme, dafs alle F_i von z frei und in den p_i homogen nullter Ordnung sind, als den Fall γ). Im letzteren Falle nennen wir das Gleichungensystem (30) auch kurz ein homogenes Involutionssystem; bevorzugt man dann die zweite Definition des Integralbegriffs (Art. 302), so erleidet die in Art. 351 durchgeführte Betrachtung keine wesentliche Modifikation. In der That, jede gemeinsame Integral-M_{m-1} der beiden homogenen Gleichungen:

$$\Phi\left(x_1 \ldots x_m \frac{p_1}{p_m} \ldots \frac{p_{m-1}}{p_m}\right) = 0, \quad \Psi\left(x_1 \ldots x_m \frac{p_1}{p_m} \ldots\right) = 0$$

erfüllt, wie aus Art. 241 leicht erkannt wird, auch die Relation $(\Phi\Psi) = 0$, und diese ist in den p_i wiederum homogen. Wir schliefsen daraus ähnlich wie in Nr. 351, dafs die Aufsuchung aller gemeinsamen Integral-M_{m-1} irgend welcher homogenen Gleichungen:

$$\Phi_i\left(x_1 \ldots x_m \frac{p_1}{p_m} \ldots \frac{p_{m-1}}{p_m}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

stets auf die Ermittelung aller Integral-M_{m-1} eines homogenen Involutionssystems zurückkommt; ferner ergiebt sich auch, dafs jedes derartige System auf eine Form:

$$F_1 = 0, \ldots F_\nu = 0$$

gebracht werden kann, worin alle F_i in den p_ι homogen nullter Ordnung sind und alle Klammerausdrücke $(F_\iota F_k)$ identisch verschwinden.

354. Wir schreiben das gegebene Involutionssystem (30) in der Form:

$$(31) \qquad X_i(z, x_1 \ldots x_m p_1 p_2 \ldots p_m) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots \nu).$$

Im Falle α) können wir dann nach Kap. XI durch je eine Operation:

$$2m - 2\nu + 1,\ 2m - 2\nu - 1, \ldots 3,\ 1$$

die Funktionen Z, $X_{\nu+1} \ldots X_m$ so bestimmen, dafs die Identität:

$$(32) \quad dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_m dX_m \equiv \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m)$$

besteht, worin $\varrho \overline{\underline{|}} 0$.

Unter der Annahme β) lassen sich durch die Operationen:

$$2m - 2\nu,\ 2m - 2\nu - 2, \ldots 4,\ 2,\ 0,$$

die Funktionen $X_{\nu+1}, \ldots X_m$, U so bestimmen, dafs identisch:

$$(33) \quad dU(x_1 \ldots p_m) + \sum_1^m P_i(x, p)\, dX_i(x, p) \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m,$$

endlich kann man im Falle γ) mit Hülfe der Operationen:

$$2m - 2\nu - 1,\ 2m - 2\nu - 3, \ldots 3,\ 1$$

die Identität:

$$(34) \qquad P_1 dX_1 + \cdots + P_m dX_m \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m$$

herstellen; die P_i, ϱ ergeben sich jedesmal durch Auflösung eines linearen Gleichungensystems.

355. Hat man im Falle α) die $2m + 1$ Funktionen Z, $X_\iota P_\iota$ so bestimmt, dafs die Identität (32) stattfindet, und versteht man unter $c_1 \ldots c_\nu$ bestimmte numerische Werte, unter c, $c_{\nu+1}, \ldots c_m$ dagegen arbiträre Konstante, so stellen die Gleichungen:

$$(35) \qquad X_1 = c_1,\ X_2 = c_2, \ldots X_m = c_m,\ Z = c$$

$m - \nu + 1$-fach unendlich viele Element-M_m dar, und zwar lauter gemeinsame Integrale der ν partiellen Differentialgleichungen (31), oder, wie wir auch sagen können, *Integrale des Involutionssystems* (31); jedes gemeinsame Flächenelement $z^0 x_i^0 p_i^0$ der Gleichungen (31) ist in einer und nur einer Element-M_m der Schar (35) enthalten, in derjenigen nämlich, die den Konstantenwerten:

$$c_{\nu+h} = X_{\nu+h}(z^0 \ldots p_m^0); \quad c = Z(z^0 \ldots p_m^0)$$

entspricht.

Eine derartige Schar von $\infty^{m-\nu+1}$ gemeinsamen Integral-M_m des Involutionssystems (31) wird ein *„vollständiges Integral“* desselben genannt. Man erkennt auch leicht umgekehrt, dafs jedes vollständige Integral auf die Form (35) gebracht werden kann, und zu einer Identität (32) Anlafs giebt.

Um das allgemeinste Integral des Involutionssystems (31) zu finden, haben wir alle $m+1$-gliedrigen Gleichungensysteme aufzustellen, welche die Relationen (31) umfassen und die rechte Seite der Identität (32) zum Verschwinden bringen, oder was dasselbe ist, wir haben zu den ν Relationen (31) das allgemeinste $m-\nu+1$-gliedrige Gleichungensystem hinzuzufügen, das die Pfaff'sche Gleichung:

$$dZ - P_{\nu+1}dX_{\nu+1} - \cdots - P_m dX_m = 0$$

befriedigt. Jedes Gleichungensystem dieser Art hat die Form:

$$\Omega_i(Z, X_{\nu+1} \ldots X_m, P_{\nu+1} \ldots P_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m - \nu + 1),$$

und ist nach Kap. VII zu bilden. Aus einem gegebenen vollständigen Integral des Involutionssystems (31) läfst sich sonach die allgemeinste Integral-M_m ohne weitere Integration finden.

356. Versteht man unter $c_1 \ldots c_\nu$ wiederum bestimmte numerische Werte, dagegen unter:

$$c, c_{\nu+1} \ldots c_m, \gamma_{\nu+1} \ldots \gamma_m \tag{36}$$

willkürliche Konstante, so definiren die $2m-\nu+1$ Gleichungen:

$$Z = c, \; X_i = c_i; \; P_k = \gamma_k \qquad (i = 1 \ldots m; \; k = \nu+1 \ldots m) \tag{37}$$

für jedes Wertsystem der Konstanten (36) eine Element-M_ν des Raums R_{m+1}, und zwar eine gemeinsame Integral-M_ν der partiellen Differentialgleichungen (31); diese Integral-M_ν ist überdies für jede einzelne dieser Gleichungen eine *charakteristische* M_ν (Art. 334), und soll deshalb eine *„Charakteristik“* (oder *„charakteristische M_ν“*) des Involutionssystems (31) genannt werden. Ein ν-gliedriges Involutionssystem besitzt sonach $\infty^{2m-2\nu+1}$ Charakteristiken; in den Definitionsgleichungen (37) der Charakteristiken hat man unter der Annahme β) die Funktion Z durch $z - U(x, p)$ zu ersetzen, wenn U die in (33) auftretende Funktion bedeutet.

Ist $\nu = m$, so werden die Charakteristiken durch (35) dargestellt, sie sind also mit den gemeinsamen Integralen der m involutorischen partiellen Differentialgleichungen:

(38) $$X_i(z, x_1 \,.\,.\, x_m p_1 \,.\,.\, p_m) = c_i \qquad (i = 1 \,.\,.\, m)$$

identisch; es giebt jetzt überhaupt nur einfach unendlich viele derartige Integral-M_m, wenn die c_i bestimmte numerische Werte haben, und ein beliebiges von den ∞^{m+1} gemeinsamen Flächenelementen der Gleichungen (38) ist auf einem und nur einem dieser gemeinsamen Integrale enthalten.

Beispielsweise haben zwei partielle Differentialgleichungen:

$$F(xyzpq) = a, \ \Phi(xyzpq) = b$$

dann und nur dann für jedes beliebige Wertsystem der Konstanten a, b einfach unendlich viele Integralflächen gemein, wenn die Bedingung:

$$0 \equiv [F\Phi] \equiv \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

erfüllt ist; diese ∞^1 Integralflächen sind dann auch die Charakteristiken unseres zweigliedrigen Involutionssystems.

357. Die Sätze der Artikel 348—350 lassen sich nunmehr, wie man leicht erkennt, folgendermaſsen verallgemeinern:

1. *Jedes ν-gliedrige Involutionssystem:*

(31) $$X_i(zx_1 \,.\,.\, x_m p_1 \,.\,.\, p_m) = c_i \qquad (i = 1 \,.\,.\, \nu)$$

läſst sich mit Hülfe einer Berührungstransformation:

(39) $$z' = Z, \ x_i' = X_i, \ p_i' = P_i$$

auf die spezielle Form:

$$x_1' = c_1 \,.\,.\, x_\nu' = c_\nu$$

bringen. Im Falle β) kann diese Reduktion stets durch eine Berührungstransformation der Gestalt:

(40) $$z' = z + U(x, p); \ x_i' = X_i(x, p); \ p_i' = P_i(x, p),$$

im Falle γ) durch eine homogene Berührungstransformation der $2m$ Variabeln $x_i p_i$ bewerkstelligt werden.

2. *Zwei ν-gliedrige Involutionssysteme vom Typus α) lassen sich stets durch eine Berührungstransformation* (39) *in einander überführen, m. a. W. ein ν-gliedriges Involutionssystem der Kategorie α) besitzt gegenüber allen Berührungstransformationen der $2m+1$ Variabeln zx_ip_i auſser seiner Gliederzahl ν keine weitere Invariante.*

Analoges gilt im Falle β), wenn man beliebige Berührungstransformationen (40), und im Falle γ), wenn man beliebige homogene Berührungstransformationen ins Auge faſst.

3. *Verwandelt sich das Involutionssystem* (31) *vermöge irgend einer Berührungstransformation in das Gleichungensystem:*

(41) $$Y_i(z' x_1' \,.\,. x_m' p_1' \,.\,. p_m') = c_i,$$

so bildet dieses wieder ein ν-gliedriges Involutionssystem, und jeder Integral-M_m bezw. Charakteristik des Systems (31) *entspricht vermöge der genannten Transformation eine Integral-M_m bezw. Charakteristik von* (41).

358. Hat man im Falle γ) die $2m$ Funktionen $X_i P_i$ derart bestimmt, dafs die Identität (34) stattfindet, und macht man von der zweiten Definition des Integralbegriffs Gebrauch (Art. 302), so wird man als „*charakteristische-M_ν*" oder „Charakteristik" des gegebenen Involutionssystems diejenigen Element-M_ν des Raums $R_m(x_1 \,.\,. x_m)$ zu bezeichnen haben, welche durch die Relationen:

$$X_1 = c_1 \,.\,. X_m = c_m; \quad \frac{P_{\nu+2}}{P_{\nu+1}} = \gamma_{\nu+2} \cdot\cdot \frac{P_m}{P_{\nu+1}} = \gamma_m$$

definirt werden; die allgemeinste Integral-M_{m-1} unseres Involutionssystems wird erhalten, indem man zu den gegebenen ν Gleichungen das allgemeinste $m - \nu$-gliedrige Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung:

$$P_{\nu+1}\, dX_{\nu+1} \,.\,. + P_m dX_m = 0$$

hinzufügt. Bezüglich des Verhaltens der Integrale und Charakteristiken bei homogenen Berührungstransformationen gelten ganz analoge Sätze wie in der vorigen Nummer.

359. Es ist nöthig, auf die analytische Darstellung der Charakteristiken etwas näher einzugehen. Zu diesem Zwecke bemerken wir vorab, dafs die linken Seiten der Gleichungen (37) ein System von $2m + 1 - \nu$ unabhängigen Lösungen des ν-gliedrigen vollständigen Systems:

(42) $$[X_1, f] = 0, \; [X_2, f] = 0, \,.\,. \, [X_\nu, f] = 0$$

bilden. Bedeuten daher die Funktionen:

$$\Omega_i(z, x_1 \,.\,. x_m p_1 \,.\,. p_m) \qquad (i = 1, 2, \,.\,. 2m - 2\nu + 1)$$

irgend $2m - 2\nu + 1$ von einander und von $X_1 \,.\,. X_\nu$ unabhängige Lösungen des Systems (42), so definiren die Relationen:

$$\Omega_i = \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \,.\,. 2m - 2\nu + 1)$$

mit (31) zusammen ebenfalls die charakteristischen M_ν dieses Involutionssystems.

Aus Art. 282 ist bekannt, dafs in der Matrix:

$$(43)\quad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial X_1}{\partial p_1} \cdot\cdot \frac{\partial X_1}{\partial p_m}, & \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_1}{\partial z}, \cdot\cdot \frac{\partial X_1}{\partial x_m} + p_m \frac{\partial X_1}{\partial z} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial X_\nu}{\partial p_1} \cdot\cdot \frac{\partial X_\nu}{\partial p_m}, & \frac{\partial X_\nu}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_\nu}{\partial z}, \cdot\cdot \frac{\partial X_\nu}{\partial x_m} + p_m \frac{\partial X_\nu}{\partial z} \end{matrix} \right\|$$

nicht alle ν-reihigen Determinanten identisch verschwinden können, wenn die Gleichungen (31) wirklich ein ν-gliedriges Involutionssystem bilden sollen.

Bedeuten nun $c_1 \cdot\cdot c_\nu$ bestimmte numerische Werte, so wird das Wertsystem:

$$(44)\qquad z^0 x_1^0 \cdot\cdot x_m^0 p_1^0 \cdot\cdot p_m^0$$

als ein „nicht singuläres“ Flächenelement des Involutionssystems (31) bezeichnet, wenn:

1) alle Funktionen $X_1 \cdot\cdot X_\nu$ an der Stelle (44) regulär sind,

2) die Gleichungen (31) von den Konstanten (44) erfüllt werden,

3) nicht alle ν-reihigen Determinanten des Schemas (43) an der Stelle (44) verschwinden.

Ein Flächenelement, das nur die zwei ersten, nicht aber die dritte dieser Bedingungen erfüllt, heifst ein „singuläres Flächenelement“ des Involutionssystems (31).

Wir bezeichnen jetzt mit:

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdot\cdot \lambda_{2m+1}$$

die Variabeln $z x_i p_i$ in irgend einer Reihenfolge, und mit:

$$(45)\qquad \lambda_1^0, \lambda_2^0 \cdot\cdot \lambda_{2m+1}^0$$

die Konstanten (44) in derselben Anordnung; stellen dann die letzteren ein nicht singuläres Flächenelement des Involutionssystems (31) vor, so können wir annehmen, dafs die linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen (42) sich in der Form:

$$(46)\qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} = \sum_1^{2m-\nu+1}{}_k\, a_{ik} \frac{\partial f}{\partial \lambda_{\nu+k}} \qquad (i = 1, 2, \ldots \nu)$$

auflösen lassen, und dafs die Funktionen $a_{ik}(\lambda_1 \cdot\cdot \lambda_{2m+1})$ an der Stelle (45) regulär sind. Die Gleichungen (46) besitzen dann $2m + 1 - \nu$ Hauptintegrale:

$$A_h(\lambda_1 \lambda_2 \cdot\cdot \lambda_{2m+1}) \qquad (h = 1, 2, \ldots 2m - \nu + 1),$$

welche alle in der Umgebung der Stelle (45) regulär sind und sich vermöge:

(47) $$\lambda_1 = \lambda_1^0 \,..\, \lambda_\nu = \lambda_\nu^0,$$

bezw. auf $\lambda_{\nu+1} \,..\, \lambda_{2m+1}$ reduziren, und die Auflösung der Gleichungen:

$$A_h = \lambda^0_{\nu+h} \qquad (h = 1, 2, .. 2m - \nu + 1)$$

liefert ein Gleichungensystem der Form:

$$\lambda_{\nu+h} = L_h(\lambda_1 \,..\, \lambda_\nu,\ \lambda_1^0 \,..\, \lambda^0_{2m+1}) \quad (h = 1 \,..\, 2m - \nu + 1),$$

worin die rechten Seiten gewöhnliche Potenzreihen der Gröfsen $\lambda_1 - \lambda_1^0 \,..\, \lambda_\nu - \lambda_\nu^0$ bedeuten und sich vermöge (47) auf $\lambda^0_{\nu+1} \,..\, \lambda^0_{2m+1}$ reduziren. Diese Gleichungen stellen jetzt die durch das Flächenelement (44) hindurchgehende Charakteristik des Involutionssystems (31) dar. Damit ist gezeigt:

Jedes nicht singuläre Flächenelement ist auf einer und nur einer charakteristischen M_ν des Involutionssystems (31) *enthalten.*

Aus den Resultaten der Nr. 355 und 356 schliefsen wir jetzt ganz ähnlich wie in § 4 des vorigen Kapitels:

Enthält eine Integral-M_m des ν-gliedrigen Involutionssystems (31) *das nicht singuläre Flächenelement E_0, so enthält sie die ganze von E_0 auslaufende Charakteristik, m. a. W. haben zwei Integrale des gegebenen Involutionssystems ein nicht singuläres Flächenelement E_0 gemein, so haben sie die ganze von E_0 auslaufende charakteristische M_ν miteinander gemein.*

Nennen wir demnach eine Integral-M_μ *singulär*, wenn sie lauter singuläre Flächenelemente des Involutionssystems enthält, so können wir sagen:

„*Jede nicht singuläre Integral-M_m des ν-gliedrigen Involutionssystems* (31) *ist von $m - \nu$-fach unendlich vielen charakteristischen M_ν erzeugt.*“

360. Die in der vorigen Nr. gegebene analytische Darstellung der Charakteristiken eines Involutionssystems läfst sich in folgender Weise verallgemeinern:

Es sei:

(48) $$z' x_1' \,..\, x_m' p_1' \,..\, p_m'$$

ein nicht singuläres Flächenelement des gegebenen Involutionssystems, und es mögen die Funktionen:

$$\varphi_i(z x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m) \qquad (i = 1, 2 \,..\, \nu)$$

willkürlich, aber so gewählt werden, dafs sie an der Stelle (48) regulär sind, und dafs daselbst die Determinante:

$$|\,[X_i,\ \varphi_k]\,| \qquad (i, k = 1, 2, .. \nu)$$

nicht null ist. Dann kann man die Gleichungen:

$$[X_i f] \equiv \sum_1^\nu {}^k [X_i \varphi_k] B_k f \qquad (i = 1 \,.\,.\, \nu)$$

nach den Unbekannten $B_i f$ auflösen:

$$B_i f \equiv \sum_1^\nu {}^k \varrho_{ik} [X_k, f] \qquad (i = 1, \,.\,.\, \nu),$$

und die ϱ_{ik} sind Funktionen der Variabeln $zx_i p_i$, die an der Stelle (48) regulär sind; auch ist die Determinante $|\varrho_{ik}|$ an der genannten Stelle nicht null.

Die Gleichungen $B_k f = 0$ bilden das allgemeinste, mit (42) äquivalente Jacobi'sche System (Art. 65); ebenso stellen die Gleichungen:

(49)
$$\frac{\partial f}{\partial t_i} + B_i f = 0 \qquad (i = 1 \,.\,.\, \nu)$$

ein ν-gliedriges Jacobi'sches System mit den Independenten:

$$t_1 t_2 \,.\,.\, t_\nu,\ z,\ x_1 \,.\,.\, x_m p_1 \,.\,.\, p_m$$

dar, und besitzen ein System von Hauptintegralen:

$$\omega(z, x_1 \,.\,.\, x_m p_1 \,.\,.\, p_m t_1 \,.\,.\, t_\nu)$$

$$\psi_i(z, x_1 \,.\,.\, t_\nu);\ \omega_i(z, x_1 \,.\,.\, t_\nu) \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, m),$$

die in der Umgebung der Stelle:

$$z' x_1' \,.\,.\, x_m' p_1' \,.\,.\, p_m' \tau_1 \tau_2 \,.\,.\, \tau_\nu$$

regulär sind und vermöge der Substitution:

(50)
$$t_1 = \tau_1 \,.\,.\, t_\nu = \tau_\nu,$$

bezw. in z, x_i, p_i übergehen; die τ_i sind dabei beliebige feste Werte. Sind jetzt die Funktionen ω, ψ_i, ω_i auch an der Stelle:

$$z^0 x_1^0 \,.\,.\, p_m^0 \tau_1 \,.\,.\, \tau_\nu$$

regulär, so lassen sich die Relationen:

$$\omega = z^0,\ \psi_i = x_i^0,\ \omega_i = p_i^0 \quad (i = 1 \,.\,.\, m)$$

folgendermaßen auflösen:

(51)
$$\begin{cases} z = \chi\,(t_1 t_2 \,.\,.\, t_\nu,\ z^0, x_1^0 \,.\,.\, x_m^0,\ p_1^0 \,.\,.\, p_m^0) \\ x_i = \lambda_i(t_1 \,.\,.\,.\, t_\nu,\ z^0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, p_m^0) \\ p_i = \mu_i(t_1 \,.\,.\,.\, t_\nu,\ z^0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, p_m^0) \end{cases} \quad i = 1 \,.\,.\, m,$$

und die rechten Seiten dieser Gleichungen sind gewöhnliche Potenzreihen der $2m + 1 + \nu$ Größen:

$$t_\iota - \tau_\iota,\ z^0 - z',\ x_i^0 - x_\iota',\ p_i^0 - p_\iota';$$

sie ergeben sich bezw. aus den Funktionen ω, ψ_i, ω_i dadurch, dafs man darin die Gröfsen z, x_ι, p_i bezw. durch z^0, x_ι^0, p_ι^0 ersetzt und die t mit den τ vertauscht.

Die Relationen (51) definiren nun nach Kap. II § 5 diejenigen Integralfunktionen $z x_i p_i$ des Mayer'schen Systems:

$$(52)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t_k} = \sum\limits_1^{\nu} {}^i \varrho_{ki}\left(p_1 \dfrac{\partial X_\iota}{\partial p_1} + \cdots + p_m \dfrac{\partial X_i}{\partial p_m}\right) \\ \dfrac{\partial x_h}{\partial t_k} = \sum\limits_1^{\nu} {}^i \varrho_{ki} \dfrac{\partial X_i}{\partial p_h};\ \dfrac{\partial p_h}{\partial t_k} = -\sum\limits_1^{\nu} {}^i \varrho_{ki}\left(\dfrac{\partial X_i}{\partial x_h} + p_h \dfrac{\partial X_\iota}{\partial z}\right) \end{cases}$$

$$(k = 1\,..\,\nu;\ h = 1\,..\,m),$$

die sich vermöge (50) bezw. auf $z^0 x_\iota^0 p_\iota^0$ reduziren, m. a. W. die Gleichungen (52) bestehen identisch für alle Werte der $2m + 1 + \nu$ Variabeln

$$(53)\qquad z^0, x_1^0\,..\,x_m^0 p_1^0\,..\,p_m^0, t_1\,..\,t_\nu,$$

wenn man $z, x_i p_i$ überall durch χ, λ_ι, μ_i ersetzt. Bezeichnet demnach allgemein (f) diejenige Funktion der Variabeln (53), in die $f(z\,..\,p_m)$ vermöge der genannten Substitution übergeht, so hat man die Identitäten:

$$(54)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \chi}{\partial t_k} \equiv \sum\limits_1^{\nu} {}^i (\varrho_{ki}) \left\{\mu_1 \dfrac{\partial (X_\iota)}{\partial \mu_1} + \cdots + \mu_m \dfrac{\partial (X_i)}{\partial \mu_m}\right\} \\ \dfrac{\partial \lambda_h}{\partial t_k} \equiv \sum\limits_1^{\nu} {}^i (\varrho_{ki}) \dfrac{\partial (X_i)}{\partial \mu_h};\ \dfrac{\partial \mu_h}{\partial t_k} = -\sum\limits_1^{\nu} {}^i (\varrho_{ki}) \left\{\dfrac{\partial (X_i)}{\partial \lambda_h} + \mu_h \dfrac{\partial (X_\iota)}{\partial \chi}\right\}. \end{cases}$$

Ist nun auch das Wertsystem:

$$(55)\qquad z^0 x_1^0\,..\,x_m^0 p_1^0\,..\,p_m^0$$

ein nicht singuläres Flächenelement des gegebenen Involutionssystems (31), und legt man den zu Anfang dieses Art. eingeführten Funktionen $\varphi_1\,..\,\varphi_\nu$ die Bedingung auf, dafs die Determinante:

$$|\,[X_i,\ \varphi_k]\,| \qquad (i, k = 1\,..\,\nu)$$

an der Stelle (55) nicht null sei, so gilt dasselbe, wie man leicht erkennt, auch von der Determinante $|\,\varrho_{ik}\,|$. Wir betrachten nun die ν-zeilige Matrix:

$$(55\text{a})\qquad \left\|\begin{array}{cccccccc} \frac{\partial \chi}{\partial t_1} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda_m}{\partial t_1} & \frac{\partial \mu_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \mu_m}{\partial t_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \chi}{\partial t_\nu} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial t_\nu} & \cdots & \frac{\partial \lambda_m}{\partial t_\nu} & \frac{\partial \mu_1}{\partial t_\nu} & \cdots & \frac{\partial \mu_m}{\partial t_\nu} \end{array}\right\|.$$

Jede ν-reihige Unterdeterminante dieser Matrix ist mit Rücksicht auf die Identitäten (54) gleich dem Produkt der Determinante $|(\varrho_{ik})|$ und einer ν-reihigen Determinante des Schemas:

$$\left\|\begin{array}{c} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum p_s \frac{\partial X_i}{\partial p_s},\ \frac{\partial X_i}{\partial p_1},\ \cdots \frac{\partial X_i}{\partial p_m},\ -\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_i}{\partial z}\right), \cdots -\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_m} + p_m \frac{\partial X_i}{\partial z}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\|$$

$$(i = 1 \,.\,.\, \nu)$$

wenn darin die $z x_i p_i$ bezw. durch die $\chi, \lambda_i \mu_i$ ersetzt werden. Aus den Eigenschaften dieser letzteren Funktionen, und aus der Annahme, dafs das Flächenelement (55) *nicht* singulär sei, folgt jetzt sofort, *dafs nicht alle ν-reihigen* Determinanten des Schemas (55a) an der Stelle:

$$z^0 x_1^0 \,.\,.\, p_m^0 \tau_1 \,.\,.\, \tau_\nu$$

verschwinden. Die Elimination der Gröfsen $t_1 \,.\,.\, t_\nu$ aus dem System (51) liefert daher genau $2m + 1 - \nu$ Relationen in $z x_i p_i$; es sind dies augenscheinlich die Definitionsgleichungen der durch das Flächenelement (55) festgelegten charakteristischen M_ν unseres Involutionssystems.

361. Wie im vorigen Kapitel setzen wir:

$$U \equiv d\chi - \mu_1 d\lambda_1 - \cdots - \mu_m d\lambda_m,$$

wobei jetzt das Differentiationssymbol d sich auf alle $2m + \nu + 1$ Variabeln (53) bezieht. Man hat dann mit Rücksicht auf die Identitäten (54):

$$\frac{\partial U}{\partial t_s} \equiv d\frac{\partial \chi}{\partial t_s} - \sum \mu_i\, d\frac{\partial \lambda_i}{\partial t_s} - \sum \frac{\partial \mu_i}{\partial t_s} d\lambda_i$$

$$\equiv d\left[\sum_1^\nu{}^h (\varrho_{sh})\left\{\mu_1 \frac{\partial (X_h)}{\partial \mu_1} + \cdots + \mu_m \frac{\partial (X_h)}{\partial \mu_m}\right\}\right]$$

$$-\sum_1^m{}^i \mu_i d\left[\sum_1^\nu{}^h (\varrho_{sh}) \frac{\partial (X_h)}{\partial \mu_i}\right] + \sum_1^m{}^i \sum_1^\nu{}^h d\lambda_i (\varrho_{sh})\left\{\frac{\partial (X_h)}{\partial \lambda_i} + \mu_i \frac{\partial (X_h)}{\partial \chi}\right\}$$

$$(56) \equiv \sum_1^\nu{}^h (\varrho_{sh})\left(d\mu_1 \frac{\partial (X_h)}{\partial \mu_1} + \cdots + d\mu_m \frac{\partial (X_h)}{\partial \mu_m}\right)$$

$$+ \sum_1^m{}^i \sum_1^\nu{}^h (\varrho_{sh})\left\{\frac{\partial (X_h)}{\partial \lambda_i} + \mu_i \frac{\partial (X_h)}{\partial \chi}\right\} d\lambda_i.$$

Nun sind die Funktionen $X_1 \ldots X_\nu$ Integrale des zu (49) adjungirten unbeschränkt integrablen Systems totaler Differentialgleichungen; daraus folgt sofort, daſs die Funktionen (X_h) die Variabeln $t_1 \ldots t_\nu$ nicht enthalten, also ungeändert bleiben, wenn man darin die t_ι durch die τ_ι ersetzt; d. h. man hat identisch:

$$(X_h) \equiv X_h(z^0, x_1^0 \ldots x_m^0 p_1^0 \ldots p_m^0) \equiv X_h^0$$

und durch totale Differentiation folgt hieraus:

$$\sum_1^m{}^i \frac{\partial (X_h)}{\partial \lambda_\iota} d\lambda_\iota + \sum \frac{\partial (X_h)}{\partial \mu_i} d\mu_i \equiv dX_h^0 - \frac{\partial (X_h)}{\partial \chi} d\chi.$$

Die Identität (56) verwandelt sich dadurch in die folgende:

$$\frac{\partial U}{\partial t_s} \equiv \sum_1^\nu{}^h (\varrho_{sh}) dX_h^0 - \left(\sum_1^\nu{}^h (\varrho_{sh}) \frac{\partial (X_h)}{\partial \chi}\right) \cdot U,$$

oder in einfacherer Schreibweise:

$$\frac{\partial U}{\partial t_s} = \sigma_s \cdot U + \sum_1^\nu{}^h (\varrho_{sh}) \cdot dX_h^0.$$

Daraus schlieſst man leicht, daſs U die folgende Form haben muſs:

$$U \equiv \varrho \cdot U_0 + \Sigma \varrho_h dX_h^0,$$

wobei ϱ, ϱ_h gewisse Funktionen der Variabeln (53) bedeuten. Demnach haben wir die Identität bewiesen:

$$(57) \qquad d\chi - \sum_1^m \mu_\iota d\lambda_\iota \equiv \varrho \left(dz^0 - \sum p_i^0 dx_i^0 \right) + \sum \varrho_h dX_h^0,$$

in welcher sich das Differentiationssymbol d auf alle Variabeln (53) erstreckt, und die für jedes beliebige Wertsystem dieser Variabeln und ihrer Differentiale Geltung hat.

Es seien jetzt die c_i auf den rechten Seiten des gegebenen Involutionssystems:

$$(31) \qquad X_\iota(z x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = c_i \qquad (i = 1 \ldots \nu)$$

bestimmte numerische Werte, ferner sei E_0 ein nicht singuläres Flächenelement dieses Involutionssystems mit den Koordinaten (55); dann sind die Gröſsen χ, λ_i μ_i die Koordinaten irgend eines Flächenelements E der von E_0 auslaufenden charakteristischen M_ν. Das zu E_0 benachbarte Flächenelement E_0' mit den Koordinaten $z^0 + dz^0 \ldots p_m^0 + dp_m^0$ liege mit E_0 vereinigt und genüge gleichfalls dem Involutionssystem

(31), d. h. also den Relationen:

$$dX_h^0 = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots \nu).$$

Dann sind die Gröfsen $\chi + d\chi$, $\lambda_i + d\lambda_i$, $\mu_i + d\mu_i$ die Koordinaten eines beliebigen, zu E benachbarten Flächenelements E' der von E_0' auslaufenden Nachbarcharakteristik, wenn z. B.:

$$d\chi \equiv \sum_1^\nu \frac{\partial \chi}{\partial t_i} dt_i + \frac{\partial \chi}{\partial z^0} dz^0 + \frac{\partial \chi}{\partial x_1^0} dx_1^0 + \cdots + \frac{\partial \chi}{\partial p_m^0} dp_m^0$$

gesetzt wird, und unter den dt_i willkürliche Inkremente verstanden werden.

Wegen (57) liegt dann E' mit E vereinigt, und wir können diese Thatsache folgendermafsen ausdrücken:

„*Genügen zwei nichtsinguläre, benachbarte, vereinigt liegende Flächenelemente* $E_0 E_0'$ *alle beide dem gegebenen Involutionssystem* (31), *so liegen die bezw. von ihnen auslaufenden charakteristischen* M_ν *ihrer ganzen Ausdehnung nach vereinigt.*"

Wie im § 4 des vorigen Kapitels schliefsen wir jetzt:

Ist eine beliebige, nicht singuläre Integral-$M_{m-\nu}$[1]) des Involutionssystems (31) gegeben, und bestimmt man zu jedem Flächenelement E_0 dieser Mannigfaltigkeit die von ihm auslaufende Charakteristik, so erzeugen die so erhaltenen $m - \nu$-fach unendlich vielen Mannigfaltigkeiten M_ν eine Integral-M_m des Involutionssystems; und jede nicht singuläre Integral-M_m kann auf diese Weise erhalten werden. Setzt man also auf den rechten Seiten der Relationen (51) für die Gröfsen $z^0 x_i^0 p_i^0$ solche Funktionen von $m - \nu$ unabhängigen Variabeln $u_1 \ldots u_{m-\nu}$, dafs die Bedingungen:

$$dz^0 - p_1^0 dx_1^0 - \cdots - p_m^0 dx_m^0 = 0,\ X_h(z^0 \cdots p_m^0) = c_h \qquad (h = 1 \cdots \nu)$$

identisch erfüllt sind, so liefern die Relationen (51) nach Elimination der m Gröfsen t_i, u_k die $m + 1$ Definitionsgleichungen einer Integral-M_m.

Die allgemeinste Integral-$M_{m-\nu}$ des Involutionssystems (31) kann ohne Integration gefunden werden, und zwar einfach dadurch, dafs man zu den $m + 1$ Definitionsgleichungen einer *ganz beliebigen* Element-M_m die ν Relationen (31) hinzufügt.

362. Aufser den genannten Integralen kann das Involutionssystem (31) nur noch singuläre Integrale besitzen; um diese zu bestimmen, füge man zu den Gleichungen (31) diejenigen hinzu, die sich durch

1) Im Falle $m - \nu \geqq \nu$ wird angenommen, dafs die Integral-$M_{m-\nu}$ nicht von $\infty^{m-2\nu}$ Charakteristiken erzeugt wird.

Nullsetzen aller ν-reihigen Determinanten des Schemas (43) ergeben; die etwaigen gemeinsamen Integrale der so erhaltenen Gleichungen sind die singulären Integrale des gegebenen Involutionssystems; zu ihrer Ermittelung dient das Verfahren des Art. 351. Erhält man durch dasselbe ein mehr als m-gliedriges Gleichungensystem in $zx_1 \ldots p_m$, so existirt entweder kein oder nur *ein* singuläres Integral, das dann durch blofse Differentiationen gefunden wird; im entgegengesetzten Falle gelangt man zu einem gewissen ϱ-gliedrigen Involutionssystem ($\nu < \varrho \leqq m$), dessen Integrale mit den singulären Integralen des gegebenen Systems identisch sind; dabei ist zu bemerken, dafs dieses ϱ-gliedrige Involutionssystem selbst wiederum singuläre Integrale besitzen kann etc.

Durch die vorstehende Erörterung erledigt sich gleichzeitig die Frage nach den etwaigen singulären Integralen *einer* partiellen Differentialgleichung (Art. 316).

363. Wenn es sich nur darum handelt, die gemeinsamen Integral*flächen* der ν involutorischen partiellen Differentialgleichungen (31) zu bestimmen, so können wir uns von vorneherein auf die Annahme beschränken, dafs diese Gleichungen nach ν von den Variabeln p_ι, etwa nach $p_1 \ldots p_\nu$ auflösbar seien. Im entgegengesetzten Falle nämlich ergäbe sich durch Elimination der p_i entweder eine einzige nach z auflösbare Relation in $zx_1 \ldots x_m\, c_1 \ldots c_\nu$, und das gegebene Involutionssystem könnte dann für jedes bestimmte Wertsystem $c_1 \ldots c_\nu$ nur je eine einzige gemeinsame Integralfläche besitzen, oder man erhielte durch die genannte Elimination mindestens *eine* Relation in $x_1 \ldots x_m\, c_1 \ldots c_\nu$, und es gäbe dann überhaupt keine gemeinsame Integralfläche.

Es sei demnach ein Involutionssystem der Form:

$$p_\iota = \psi_\iota(zx_1 \ldots x_m p_{\nu+1} \ldots p_m\, c_1 c_2 \ldots c_\nu) \qquad (i = 1, 2, \ldots \nu) \tag{58}$$

vorgelegt; dann bestehen nach Art. 352 die $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ Identitäten:

$$[p_i - \psi_\iota, \cdot\, p_k - \psi_k] \equiv 0. \tag{59}$$

Wir wollen nun das Verfahren, das wir im vorigen Kapitel als Cauchy'sche (oder „erste Jacobi'sche“) Methode kennen lernten, auf den gegenwärtigen Fall übertragen.[1]) Zu diesem Zwecke betrachten wir den Pfaff'schen Ausdruck:

$$\nabla_0 \equiv dz - \psi_1 dx_1 - \cdots - \psi_\nu dx_\nu - p_{\nu+1} dx_{\nu+1} - \cdots - p_m dx_m$$

in den $2m + 1 - \nu$ unabhängigen Variabeln:

$$z, x_1 \ldots x_m p_{\nu+1} \ldots p_m. \tag{60}$$

---

1) Morera II

Um die Klasse dieses Ausdrucks zu bestimmen, ziehen wir die Sätze des Art. 242 heran. Darnach ist die Klasse $\varkappa_0$ des Ausdrucks ∇_0 gegeben durch:

$$\varkappa_0 = \sigma + \sigma' + 2m + 1 - 2\nu;$$

dabei bezeichnet 2σ den Rang der ν-zeiligen Matrix, die aus den linken Seiten der Relationen (59) gebildet wird, ist also null; $2\sigma'$ dagegen ist der Rang der Matrix, die aus der eben genannten durch Änderung mit der Zeile und Spalte:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\quad \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\quad \cdot\cdot\quad \frac{\partial\psi_\nu}{\partial z},\quad 0$$

entsteht[1]), d. h. man hat $\sigma' = 1$ oder 0, je nachdem der Fall α) oder einer der beiden Fälle β), γ) vorliegt. Betrachten wir in den beiden letztgenannten Fällen den Ausdruck:

$$\nabla_0' = \psi_1 dx_1 + \cdot\cdot + \psi_\nu dx_\nu + p_{\nu+1} dx_{\nu+1} + \cdot\cdot + p_m dx_m$$

in den $2m - \nu$ Variabeln:

$$x_1 x_2 \cdot\cdot x_m p_{\nu+1} p_{\nu+2} \cdot\cdot p_m,$$

und wenden wir auf ∇_0' die Resultate des Art. 240 an, so finden wir für die Klasse $\varkappa_0'$ dieses Pfaff'schen Ausdrucks den Wert:

$$\varkappa_0' = \tau + \tau' + 2m - 2\nu;$$

hier ist 2τ der Rang der Matrix:

$$\| (p_i - \psi_i,\ p_k - \psi_k) \| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \nu),$$

also der Annahme nach gleich null, und $2\tau'$ der Rang desjenigen Schemas, das aus dem eben genannten durch Änderung mit der Zeile und Spalte:

$$\sum_{\nu+1}^{m} {}_h\, p_h \frac{\partial\psi_1}{\partial p_h} - \psi_1,\ \cdot\cdot\ \sum_{\nu+1}^{m} p_h \frac{\partial\psi_\nu}{\partial p_h} - \psi_\nu,\ 0$$

hervorgeht; in der That ist ja der in Kap. IX mit $(f)_0$ bezeichnete Ausdruck im gegenwärtigen Falle gleich $\sum_1^m p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}$. Darnach ist τ' gleich null oder 1, je nachdem alle oder nicht alle Funktionen ψ_i in den p_k homogen erster Ordnung sind, je nachdem also ein homogenes

1) In der That ist ja der in Kap. IX mit $[f]_0$ bezeichnete Ausdruck gegenwärtig gleich $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Involutionssystem vorliegt oder nicht; darnach können wir folgende Sätze aussprechen:

Die Klasse des Pfaff'schen Ausdrucks ∇_0 *ist im Falle* α) *gleich* $2(m-\nu)+2$, *in den Fällen* β) *und* γ) *dagegen gleich* $2(m-\nu)+1$; *der Pfaff'sche Ausdruck* ∇_0' *besitzt im Falle* β) *die Klasse* $2(m-\nu)+1$, *im Falle* γ) *dagegen die Klasse* $2(m-\nu)$.

Selbstverständlich lassen sich diese Resultate auch durch direkte Untersuchung der zu ∇_0 und ∇_0' gehörigen Matrices (B) (C) nachweisen.

Durch die Betrachtung dieser Matrices ergeben sich noch folgende Thatsachen:

Das vollständige System V mit den Independenten (60), das im Sinne von Kap. V zu dem Pfaff'schen Ausdruck ∇_0 gehört, besteht im Falle α) aus den ν Gleichungen:

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{\partial f}{\partial x_i}-\psi_i\frac{\partial f}{\partial z}+\sum_1^{m-\nu}{}_h\frac{\partial\psi_i}{\partial p_{\nu+h}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{\nu+h}}+p_{\nu+h}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\ &\qquad-\sum_1^{m-\nu}{}_h\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x_{\nu+h}}+p_{\nu+h}\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_{\nu+h}}=0\end{aligned}\right.$$

$$(i=1,2,\ldots\nu),$$

diese ν Gleichungen nehmen im Falle β) oder γ) die folgende Form an:

$$(61\text{a})\quad \begin{aligned} &-\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_1^{m-\nu}{}_h\frac{\partial\psi_i}{\partial p_{\nu+h}}\frac{\partial f}{\partial x_{\nu+h}}+\left(\sum\frac{\partial\psi_i}{\partial p_{\nu+h}}p_{\nu+h}-\psi_i\right)\frac{\partial f}{\partial z}\\ &\qquad-\sum_1^{m-\nu}{}_h\frac{\partial\psi_i}{\partial x_{\nu+h}}\frac{\partial f}{\partial p_{\nu+h}}=0\qquad(i=1,2,\ldots\nu)\end{aligned}$$

und stellen dann das zu ∇_0 gehörige vollständige System W dar, während das System V hieraus durch Hinzufügung der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial z}=0$ erhalten wird.

Die partiellen Differentialgleichungen:

$$(62)\quad -\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_1^{m-\nu}{}_h\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial p_{\nu+h}}\frac{\partial f}{\partial x_{\nu+h}}-\frac{\partial\psi_i}{\partial x_{\nu+h}}\frac{\partial f}{\partial p_{\nu+h}}\right)=0\quad(i=1\ldots\nu)$$

liefern im Falle β) das zu ∇_0' gehörige System V; im Falle γ) besteht V aus den Relationen (62) und der folgenden:

$$(63)\qquad p_{\nu+1}\frac{\partial f}{\partial p_{\nu+1}}+\cdots+p_m\frac{\partial f}{\partial p_m}=0.$$

364. Es seien jetzt sämtliche Funktionen ψ_i an der Stelle:

$$(64) \qquad z^0 x_1^0 \,.\,.\, x_m^0 p_{\nu+1}^0 \,.\,.\, p_m^0$$

regulär. Dann besitzt das vollständige System (61) $2m+1-2\nu$ Hauptintegrale:

$$\zeta(z\,.\,.\,x_m p_{\nu+1}\,.\,.\,p_m);\ \xi_{\nu+i}(z\,.\,.\,p_m);\ \pi_{\nu+i}(z,\,.\,.\,p_m) \quad (i=1,2,\,.\,.\,m-\nu),$$

die an der Stelle (64) regulär sind und sich vermöge der Substitution:

$$(65) \qquad x_1 = x_1{}^0 \,.\,.\, x_\nu = x_\nu{}^0$$

bezw. auf $z x_{\nu+1}\,.\,.\,x_m p_{\nu+1}\,.\,.\,p_m$ reduziren, und es besteht, wie man nach Art. 135 leicht erkennt, eine Identität der Form:

$$(66) \quad dz - \sum_1^\nu \psi_i dx_i - \sum_{\nu+1}^m{}^h p_h dx_h \equiv \varrho\left(d\zeta - \sum_1^{m-\nu}{}^s \pi_{\nu+s} d\xi_{\nu+s}\right);$$

dabei ist ϱ eine an der Stelle (64) reguläre Funktion der Variabeln (60), die vermöge der Substitution (65) den Wert 1 annimmt. Die rechte Seite von (66) stellt nicht nur unter der Annahme α), sondern auch in den Fällen β) γ) eine Normalform von ∇_0 dar. In diesen Fällen hat man nämlich $\varrho \equiv 1$, ζ erhält die Form:

$$z + U(x_1 x_2 \,.\,.\, x_m p_{\nu+1} \,.\,.\, p_m),$$

die π_i und ξ_i werden von z unabhängig und mit den Hauptintegralen des vollständigen Systems (62) identisch; im Falle γ) insbesondere ist $U \equiv 0$, die π_i sind in den Variabeln $p_{\nu+1}\,.\,.\,p_m$ homogen erster, die ξ_i homogen nullter Ordnung.

365. Die Darstellung (66), die wir für den Pfaff'schen Ausdruck ∇_0 gefunden haben, zeigt ohne weiteres, dafs sich alle Resultate von Kap. XII, § 2 und 3 unmittelbar auf ein Involutionssystem der Form (58) übertragen lassen. So erkennt man die Möglichkeit, das gegebene Involutionssystem auf einen Raum $R_{m-\nu+1}$ mit den Punktkoordinaten ζ, $\xi_{\nu+1}\,.\,.\,\xi_m$ derart abzubilden, dafs jeder Charakteristik, bezw. jeder Integral-M_m ein Flächenelement, bezw. eine Element-$M_{m-\nu}$ des Raums $R_{m-\nu+1}$ entspricht, und umgekehrt. Auch der Begriff „Integralconoid" läfst sich in leicht ersichtlicher Weise auf Involutionssysteme ausdehnen.

Die Relation in $z x_1\,.\,.\,x_m\,\gamma, \gamma_1\,.\,.\,\gamma_{m-\nu}$, die sich durch Elimination der p_i aus den Gleichungen:

$$\zeta - \sum_1^{m-\nu} \xi_{\nu+h}\pi_{\nu+h} = \gamma;\ \pi_{\nu+h} = \gamma_h \qquad (h = 1\,.\,.\,m-\nu)$$

ergiebt, liefert ein aus $\infty^{m-\nu+1}$ *Flächen* bestehendes vollständiges Integral von (58); auch die Methode der Variation der Konstanten, nebst ihrer geometrischen Interpretation (Art. 321 f.) läfst sich auf den gegenwärtigen Fall übertragen; der Übergang von einem bestimmten vollständigen Integral zu einem beliebigen andern vollzieht sich auf ganz ähnliche Weise wie in Art. 318 mit Hülfe einer Berührungstransformation der $2m - 2\nu + 1$ Gröfsen $\zeta \xi_i \pi_i$.

Das allgemeinste $m - \nu + 1$-gliedrige Gleichungensystem in diesen Variabeln, das die rechte Seite der Identität (66) zum Verschwinden bringt, liefert im Verein mit (58) die allgemeinste Integral-M_m dieses Involutionssystems. Es sei z. B. $\varphi(x_{\nu+1} \ldots x_m)$ eine arbiträre Funktion, die an der Stelle $x^0_{\nu+1} \ldots x^0_m$ regulär ist und aufserdem noch die Bedingungen:

$$z^0 = \varphi(x^0_{\nu+1} \ldots x^0_m);\; p^0_{\nu+h} = \frac{\partial \varphi(x^0_{\nu+1} \ldots x^0_m)}{\partial x^0_{\nu+h}} \qquad (h = 1 \ldots m - \nu)$$

erfüllt. Die Gleichungen:

$$\zeta = \varphi(\xi_{\nu+1} \xi_{\nu+2} \ldots \xi_m) \tag{67}$$

$$\pi_{\nu+h} = \frac{\partial \varphi(\xi_{\nu+1} \ldots \xi_m)}{\partial \xi_{\nu+h}} \qquad (h = 1, 2, \ldots m - \nu) \tag{68}$$

definiren dann ein Integraläquivalent der Pfaff'schen Gleichung

$$d\zeta - \pi_{\nu+1} d\xi_{\nu+1} - \cdots - \pi_m d\xi_m = 0.$$

Durch eine ganz ähnliche Überlegung wie in Art. 317 folgt jetzt: Mittels der $m - \nu$ Relationen (68) lassen sich die Variabeln $p_{\nu+1} \ldots p_m$ als gewöhnliche Potenzreihen der Gröfsen:

$$z - z^0,\; x_1 - x^0_1 \ldots x_m - x^0_m$$

darstellen; substituirt man die so erhaltenen Ausdrücke in (67), so definirt die so entstehende Gleichung eine an der Stelle $x^0_1 \ldots x^0_m$ reguläre Integralfunktion z der gegebenen partiellen Differentialgleichungen (58), und zwar reduzirt sich z vermöge der Substitution (65) auf $\varphi(x_{\nu+1} \ldots x_m)$; umgekehrt mufs eine Integralfunktion z mit den genannten Eigenschaften aus dem Gleichungensystem (67) (68) durch Elimination der p_i erhalten werden. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Es mögen die ν Funktionen:

$$\psi_i(z, x_1 \ldots x_m p_{\nu+1} \ldots p_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots \nu)$$

für jedes beliebige Wertsystem $z x_1 \ldots x_m p_{\nu+1} \ldots p_m$ die Bedingungen:

$$0 = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} + p_k \frac{\partial \psi_i}{\partial z} - p_i \frac{\partial \psi_k}{\partial z}$$
$$+ \sum_{\nu+1}^{m}{}_s \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial p_s}\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial \psi_k}{\partial z}\right) - \frac{\partial \psi_k}{\partial p_s}\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial \psi_i}{\partial z}\right)\right\}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots \nu)$$

identisch erfüllen, und an der Stelle:

$$z^0 x_1^0 \dots x_m^0 p_{\nu+1}^0 \dots p_m^0$$

regulär sein. Ferner sei $\varphi(x_{\nu+1} \dots x_m)$ *irgend eine an der Stelle* $x_{\nu+1}^0 \dots x_m^0$ *reguläre Funktion, die daselbst den Wert* z^0 *hat, während ihre Ableitungen an dieser Stelle bezw. die Werte* $p_{\nu+1}^0 \dots p_m^0$ *annehmen. Dann besitzen die partiellen Differentialgleichungen:*

$$(69) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_i} = \psi_i\left(z x_1 \dots x_m \frac{\partial z}{\partial x_{\nu+1}} \dots \frac{\partial z}{\partial x_m}\right) \quad (i = 1, 2, \dots \nu)$$

eine und nur eine gemeinsame Integralfunktion $z = \omega(x_1 \dots x_m)$, *die an der Stelle* $x_1^0 \dots x_m^0$ *regulär ist, und vermöge* $x_1 = x_1^0 \dots x_\nu = x_\nu^0$ *in die vorgeschriebene Funktion* $\varphi(x_{\nu+1} \dots x_m)$ *übergeht.*

Dieser Satz läſst sich ähnlich wie derjenige des Art. 317 auch direkt begründen. In der nach Potenzen von $x_1 - x_1^0 \dots x_m - x_m^0$ fortschreitenden Taylor'schen Entwickelung der gesuchten Integralfunktion z sind nämlich alle Koeffizienten der Form:

$$(70) \qquad \left(\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \quad + \alpha_m} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}\right)_{x_1 = x_1^0 \dots x_m = x_m^0}$$

für welche die Exponenten $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu$ verschwinden, durch die gestellten Anfangsbedingungen gegeben; durch unbegrenzt wiederholte Differentiationen der Gleichungen (69), in denen z und seine Ableitungen als Funktionen der x_i betrachtet werden, lassen sich alle übrigen Konstanten (70) der Reihe nach ermitteln, wobei allerdings eine und dieselbe Ableitung, wie z. B. $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0$, auf verschiedene Arten erhalten werden kann. Daſs aber alle Werte, die man solcherweise für irgend einen der Koeffizienten (70) erhält, identisch ausfallen, erweist sich als eine Folge der Involutionseigenschaft der gegebenen Gleichungen (69).

Demnach ist also die Taylor'sche Entwickelung der Integralfunktion z durch die aufgestellten Bedingungen eindeutig bestimmt, und es bleibt hinterher nur noch die Konvergenz der so gewonnenen Potenzreihe nachzuweisen.[1])

366. Das soeben auseinandergesetzte Verfahren zur Bestimmung aller Integrale des gegebenen Involutionssystems (58) erfordert im Falle α) die Bestimmung aller Integrale des ν-gliedrigen vollständigen Systems (61), also je eine Operation der Ordnung:

$$2m - 2\nu + 1,\ 2m - 2\nu,\ \dots 3,\ 2,\ 1,$$

1) Delassus I.

in den Fällen β) und γ) dagegen die Integration des vollständigen Systems (62) d. h. die Operationen:

$$2m - 2\nu,\ 2m - 2\nu - 1,\ ..\ 3,\ 2,\ 1$$

und eine Quadratur, die im Falle γ) wegfällt. Der letztere Fall gestattet indes noch eine weitere Vereinfachung, indem man ihn durch die bekannte Substitution (Art. 303) auf ein System partieller Differentialgleichungen mit $m - 1$ Independenten $x_1 .. x_{m-1}$ und vom Typus α) reduzirt; dafs hierdurch wiederum ein ν-gliedriges *Involutions*system erhalten wird, ist leicht ersichtlich. Nach dieser Transformation erledigt sich der Fall γ) durch je eine Operation:

$$2m - 2\nu - 1,\ 2m - 2\nu - 2,\ ..\ 3,\ 2,\ 1.$$

Über den Zusammenhang dieses Integrationsverfahrens mit den früheren Methoden ist folgendes zu bemerken.

Wenn das gegebene Involutionssystem:

$$(71) \qquad X_\iota(z x_1 .. x_m p_1 .. p_m) = c_\iota \qquad (i = 1 .. \nu)$$

sich in der Form (58) auflösen läfst, so kann man mittels der Gleichungen (71) in das ν-gliedrige vollständige System:

$$(72) \qquad [X_\iota, f] = 0 \qquad (i = 1, 2, .. \nu)$$

die Gröfsen $c_1 c_2 .. c_\nu$ statt $p_1 p_2 .. p_\nu$ als neue Independente einführen. Dadurch erhält aber dieses vollständige System die Form (61), wie man entweder durch direkte Rechnung bestätigt, oder auch folgendermafsen erkennen kann. Es sei J das System (72), und J' das System mit den Independenten:

$$(73) \qquad z x_1 .. x_m p_{\nu+1} .. p_m c_1 .. c_\nu,$$

das aus J durch die vorhin genannte Variabelntransformation entsteht. Sind dann:

$$X_1 .. X_\nu,\ \Omega_1 \Omega_2 .. \Omega_{2m-2\nu+1}$$

die $2m - \nu + 1$ unabhängigen Lösungen von J, und versteht man unter Ω_k' die Funktion der $2m + 1$ Variabeln (73), die aus Ω_k entsteht, wenn man darin die p_ι vermöge (58) durch die ψ_i ersetzt, so bilden die Funktionen:

$$c_1 .. c_\nu,\ \Omega_1' .. \Omega_{2m-2\nu+1}'$$

ein System von $2m - \nu + 1$ unabhängigen Lösungen des vollständigen Systems J'. Nun stellen die $\nu + 1$ Gleichungen:

$$X_1 = c_1 .. X_\nu = c_\nu;\ \Omega_k = \gamma$$

für jedes beliebige Konstantensystem $c_1 .. c_\nu \gamma$ ein Involutionssystem dar; dasselbe gilt daher auch für das äquivalente Gleichungensystem:

$$p_1 = \psi_1 \,..\, p_\nu = \psi_\nu;\ \Omega_k' = \gamma,$$

d. h. Ω_k' ist für jedes beliebige Wertsystem der in ihm enthaltenen Konstanten $c_1 \,..\, c_\nu$ ein Integral des vollständigen Systems:

$$[p_i - \psi_i, f] = 0 \quad (i = 1 \,..\, \nu).$$

Da nun die Gleichungen (61) aus den vorstehenden erhalten werden, indem man darin alle Terme fortläfst, die mit einer der Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial p_1} \,..\, \frac{\partial f}{\partial p_\nu}$ multiplizirt sind, und da die Funktion Ω_k' die Variabeln $p_1 \,..\, p_\nu$ nicht enthält, so befriedigen sämtliche Funktionen Ω_k' für jedes beliebige Wertsystem $c_1 \,..\, c_\nu$ die partiellen Differentialgleichungen (61). Diese letzteren sind also mit dem vollständigen System J' identisch.

Ist demnach $f(z x_1 \,..\, x_m p_{\nu+1} \,..\, p_m c_1 \,..\, c_\nu)$ ein Integral der Gleichungen (61), so befriedigt die Funktion:

$$f(z x_1 \,..\, x_m p_{\nu+1} \,..\, p_m,\ X_1 \,..\, X_\nu)$$

das vollständige System (72); umgekehrt erhält man aus jedem Integral von (72), das keine Funktion von $X_1 \,..\, X_\nu$ allein ist, ein Integral von (61), indem man die Gröfsen $p_1 \,..\, p_\nu$ durch die Funktionen $\psi_1 \,..\, \psi_\nu$ ersetzt. Die beiden Integrationsprobleme (61) und (72) sind also vollkommen gleichbedeutend. In ganz analogem Zusammenhange stehen in den Fällen β) und γ) die beiden vollständigen Systeme (61a) und:

$$(X_i, f) = 0 \qquad (i = 1, 2 \,..\, \nu).$$

367. Die in den Artikeln 356—366 auseinandergesetzte Methode, um alle nicht singulären Integral-M_m eines gegebenen ν-gliedrigen Involutionssystems zu finden, kommt im Wesentlichen darauf hinaus, alle Charakteristiken des Involutionssystems zu ermitteln, d. h. also ein System von $2m - \nu + 1$ unabhängigen Integralen des ν-gliedrigen vollständigen Systems (72) zu bestimmen, und ist von Lie als die *„verallgemeinerte Cauchy'sche Methode“* bezeichnet worden.

Kennt man ein vollständiges Integral des Involutionssystems (71), so kennt man nach Art. 355 und 356 auch alle Integrale des vollständigen Systems (72) oder (61); insbesondere lassen sich die in Art. 364 gebrauchten Hauptintegrale $\zeta \xi_i \pi_i$ des Systems (61) durch blofse Elimination finden.

Hat man bei dem Integrationsprozefs des Art. 354 zu den gegebenen, in Involution befindlichen Funktionen $X_1, X_2, \,..\, X_\nu$ weitere ν' Funktionen $X_{\nu+1} \,..\, X_{\nu+\nu'}$ hinzubestimmt, derart, dafs die Gleichungen:

(73) $$X_1 = c_1,\ X_2 = c_2,\ ..\ X_{\nu+\nu'} = c_{\nu+\nu'}$$

für beliebige c_i ein $\nu + \nu'$-gliedriges Involutionssystem bilden, so kann man, statt das Verfahren des Art. 354 weiter fortzusetzen, auf das Involutionssystem (73) die verallgemeinerte Cauchy'sche Methode anwenden, d. h. also die noch fehlenden $2m + 1 - 2\nu - 2\nu'$ Lösungen des vollständigen Systems:

$$[X_i, f] = 0 \qquad (i = 1, 2, .. \nu + \nu')$$

ermitteln. Sind diese Lösungen bekannt, so läfst sich nach dem oben Gesagten durch Differentiationen und Eliminationen ein vollständiges Integral des Involutionssystems (73), also auch ein solches des gegebenen Systems (71) ohne weiteres ermitteln.

§ 2. Die Integrationsmethoden von Lagrange, Jacobi, Mayer und Lie.

368. Ist ein ν-gliedriges Involutionssystem:

(1) $$X_i(zx_1 .. x_m p_1 .. p_m) = c_i \qquad (i = 1, 2, .. \nu)$$

gegeben, so erlaubt die Methode des Art. 354 mit Hülfe der dort angegebenen Integrationsoperationen ein vollständiges Integral:

(2) $$Z = c;\ X_1 = c_1\ ..\ X_m = c_m \qquad (i = 1, 2, .. \nu)$$

des Involutionssystems (1), oder, was dasselbe besagt, jeder einzelnen der partiellen Differentialgleichungen (1), zu ermitteln. Dieses vollständige Integral braucht keineswegs aus Flächen des Raums $R_{m+1}(zx_1 .. x_m)$ zu bestehen, d. h. die Elimination der p_i aus (2) kann mehr als *eine* Relation in $zx_1 .. x_m$ liefern. Sind aber die gegebenen Gleichungen (1) in der Form:

(3) $$p_i = \psi_i(zx_1 .. x_m p_{\nu+1} .. p_m c_1 .. c_\nu) \qquad (i = 1, 2, .. \nu)$$

auflösbar, so zeigen die am Schlufs des vorigen § angestellten Überlegungen, dafs sich aus jedem beliebigen vollständigen Integral (2) durch gewisse Eliminationen ein aus Flächen bestehendes vollständiges Integral gewinnen läfst. In dem genannten Falle kann man aber auch das Integrationsverfahren des Art. 354 von vorneherein so einrichten, dafs das zunächst erhaltene vollständige Integral (2) aus Flächen besteht.

Für $X_{\nu+1}$ kann nämlich ein beliebiges, von $X_1 .. X_\nu$ unabhängiges Integral des vollständigen Systems:

(4) $$[X_i, f] = 0 \qquad (i = 1, 2, .. \nu)$$

gewählt werden, und die Integration des letzteren kommt nach Art. 366 auf diejenige des vollständigen Systems:

$$(5)\quad -\frac{\partial f}{\partial x_\iota} - \psi_\iota \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_1^{m-\nu}{}^h \frac{\partial \psi_i}{\partial p_{\nu+h}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{\nu+h}} + p_{\nu+h}\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$-\sum_1^{m-\nu}{}^h \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_{\nu+h}} + p_{\nu+h}\frac{\partial \psi_\iota}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_{\nu+h}} = 0 \quad (i = 1, 2, .. \nu)$$

hinaus. Dieses System besitzt nun $2m - 2\nu + 1$ Integrale, die hinsichtlich der Variabeln $z, x_{\nu+1} .. x_m p_{\nu+1} .. p_m$ unabhängig sind, also auch wenigstens *eine* Lösung:

$$\Xi(z, x_1 .. x_m p_{\nu+1} .. p_m c_1 .. c_\nu),$$

welche von der Variabeln $p_{\nu+1}$ nicht frei ist. Löst man jetzt die Gleichung $\Xi = c_{\nu+1}$ in der Form:

$$p_{\nu+1} = \chi_{\nu+1}(z, x_1 .. x_m, p_{\nu+2} .. p_m c_1 c_2 .. c_{\nu+1})$$

auf, und bezeichnet man mit χ_i die Funktion, die aus ψ_i entsteht, wenn man darin $p_{\nu+1}$ durch $\chi_{\nu+1}$ ersetzt, so bilden die Relationen:

$$p_i = \chi_i(z, x_1 .. x_m p_{\nu+2} .. p_m c_1 c_2 .. c_{\nu+1}) \qquad (i = 1, 2, .. \nu + 1)$$

für jedes beliebige Konstantensystem c_i ein Involutionssystem, das auch in der Form:

$$(6)\qquad X_1 = c_1;\ X_2 = c_2 .. X_\nu = c_\nu;\ X_{\nu+1} = c_{\nu+1}$$

geschrieben werden kann, wenn mit $X_{\nu+1}$ die Funktion:

$$\Xi(z, x_1 .. x_m p_{\nu+1} .. p_m, X_1, X_2 .. X_\nu)$$

bezeichnet wird. Indem wir auf das Involutionssystem (6) dieselbe Schlufsweise anwenden wie auf (1) etc., gelangen wir schliefslich zu einem Involutionssystem:

$$(7)\qquad X_1 = c_1 .. X_m = c_m,$$

welches in der Form:

$$(8)\qquad p_i = \omega_i(z x_1 .. x_m c_1 c_2 .. c_m) \qquad (i = 1, 2, .. m)$$

aufgelöst werden kann; das zugehörige vollständige System (5) nimmt hier folgende Gestalt an:

$$(9)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \omega_i \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (i = 1, 2, .. m),$$

besitzt also *ein* von z nicht unabhängiges Integral:

$$\varphi(z x_1 x_1 .. x_m c_1 .. c_m),$$

und die Gleichung $\varphi = c$ stellt das gesuchte, aus Flächen bestehende vollständige Integral des gegebenen Involutionssystems (1) dar, wenn die Gröfsen $c_{\nu+1}, .. c_m, c$ als arbiträre Konstante betrachtet werden.

Da das vollständige System (9) zu der Pfaff'schen Gleichung:

$$dz - \omega_1 dx_1 - \cdots - \omega_m dx_m = 0$$

adjungirt ist, so können wir die erhaltenen Resultate in folgende beiden Sätze zusammenfassen:

1) *Kennt man m Funktionen $X_1, X_2, \ldots X_m$ der $2m+1$ Variabeln zx_ip_i von der Beschaffenheit, dafs die Gleichungen:*

$$X_1 = c_1 \ldots X_m = c_m$$

in der Form:

$$p_i = \omega_i(zx_1 \ldots x_m c_1 \ldots c_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

aufgelöst werden können, und sind die Bedingungen:

$$[X_i X_k] \equiv 0 \qquad (i, k = 1 \ldots m)$$

erfüllt, so ist die Pfaff'sche Gleichung:

$$dz - \omega_1 dx_1 - \cdots - \omega_m dx_m = 0 \tag{10}$$

für jedes beliebige Wertsystem der Konstanten $c_1 \ldots c_m$ exakt, und ihre allgemeine Integralgleichung:

$$\varphi(zx_1 \ldots x_m c_1 \ldots c_m) = c$$

liefert für jeden Index i der Reihe $1 \ldots m$ ein aus Flächen bestehendes vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$X_i(zx_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = c_i,$$

wenn c_i als numerische, die übrigen Gröfsen $c_1 \ldots c_m c$ als arbiträre Konstante gelten.

2) *Kennt man ν Funktionen $X_1 X_2 \ldots X_\nu$, welche die $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ Bedingungen $[X_i X_k] \equiv 0$ erfüllen und hinsichtlich der Variabeln $p_1 p_2 \ldots p_\nu$ unabhängig sind, so lassen sich durch je eine Operation:*

$$2m - 2\nu + 1,\ 2m - 2\nu - 1,\ \ldots 5,\ 3$$

$m - \nu$ weitere Funktionen $X_{\nu+1}, X_{\nu+2} \ldots X_m$ so bestimmen, dafs die Voraussetzungen des vorigen Satzes erfüllt sind.

Der Satz 1) ist augenscheinlich eine einfache Konsequenz der Resultate von Art. 242 und 243; ferner erkennt man leicht, daſs die Bedingungen des Satzes 1) auch notwendig sind, damit die Pfaff'sche Gleichung (10) für jedes Wertsystem $c_1 \ldots c_m$ exakt sei.

369. Als Korollar folgt aus dem Vorhergehenden:

Es seien m Relationen der Form:

$$X_i(x_1 x_2 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = c_i$$

gegeben, welche sich in der Form:

$$p_i = \omega_i(x_1 x_2 \ldots x_m c_1 \ldots c_m) \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

auflösen lassen. Damit dann der Pfaff'sche Ausdruck:

$$\omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \cdots + \omega_m dx_m$$

für beliebige c_i das exakte Differential einer Funktion $U(x_1 \ldots x_m c_1 \ldots c_m)$ sei, ist notwendig und hinreichend, dafs die Bedingungen:

$$(X_i X_k) \equiv 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots m)$$

erfüllt seien.

Kennt man ν Funktionen $X_1 \ldots X_\nu$ der $2m$ Variabeln $x_i p_i$, welche die $\frac{1}{2}\nu(\nu - 1)$ Relationen $(X_i X_k) \equiv 0$ befriedigen und hinsichtlich $p_1 \ldots p_\nu$ unabhängig sind, so kann man mittels je einer Integrationsoperation:

$$2m - 2\nu,\ 2m - 2\nu - 2,\ \ldots 4,\ 2$$

$m - \nu$ weitere Funktionen $X_{\nu+1} \ldots X_m$ derart bestimmen, dafs die Voraussetzungen des soeben ausgesprochenen Satzes erfüllt sind; dann ist:

$$z = U(x_1 \ldots x_m c_1 \ldots c_m) + c$$

ein vollständiges Integral jeder einzelnen partiellen Differentialgleichung:

$$X_i(x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = c_i.$$

Um beispielsweise $X_{\nu+1}$ zu bestimmen, hat man die Relationen:

$$(11) \qquad X_1 = c_1 \ldots X_\nu = c_\nu$$

folgendermafsen aufzulösen:

$$(12) \qquad p_i = \psi_i(x_1 \ldots x_m p_{\nu+1} \ldots p_m c_1 \ldots c_\nu) \qquad (i = 1 \ldots \nu),$$

sodann irgend ein von $p_{\nu+1}$ nicht unabhängiges Integral:

$$\Xi(x_1 \ldots x_m p_{\nu+1} \ldots p_m c_1 \ldots c_\nu)$$

des vollständigen Systems:

$$(13) \quad -\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\nu+1}^{m}{}_s \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial p_s} \frac{\partial f}{\partial x_s} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial p_s} \right) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots \nu)$$

zu ermitteln, und hinterher in Ξ die c_i durch die Funktionen $X_1 \ldots X_\nu$ zu ersetzen. Auf das $\nu + 1$-gliedrige Involutionssystem:

$$X_1 = c_1 \ \ldots\ X_{\nu+1} = c_{\nu+1}$$

kann man dann dieselbe Schlufsweise anwenden u. s. w.

Diese Methode führt auch dann zum Ziele, wenn das gegebene Involutionssystem (11) oder (12) dem Typus γ) angehört, d. h. wenn die X_i in den p homogen nullter Ordnung, also die ψ_i hinsichtlich

$p_{\nu+1} \,..\, p_m$ homogen erster Ordnung sind. Doch kann man in diesem Falle den Funktionen $X_{\nu+1}, X_{\nu+2}, \,..\, X_{m-1}$ ebenfalls die Bedingung auferlegen, in den p_i homogen nullter Ordnung zu sein; in der That bilden ja jetzt die Gleichungen (13) zusammen mit der folgenden:

$$(14) \qquad p_{\nu+1} \frac{\partial f}{\partial p_{\nu+1}} + \cdots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m} = 0$$

ein $\nu + 1$-gliedriges vollständiges System, wie man entweder aus Art. 273, Satz 6) oder auch direkt aus dem Umstande erkennt, daſs die Gleichungen (13) (14) im gegenwärtigen Falle das zu dem Pfaff'schen Ausdruck:

$$\nabla_0' \equiv \psi_1 dx_1 + \cdots + \psi_\nu dx_\nu + p_{\nu+1} dx_{\nu+1} + \cdots + p_m dx_m$$

gehörige vollständige System V darstellen (Art. 363). Man gelangt so zu einem Involutionssystem:

$$X_1 = c_1 \,..\, X_{m-1} = c_{m-1},$$

welches sich folgendermaſsen auflösen läſst:

$$p_i = p_m \cdot \omega_i(x_1 \,..\, x_m\, c_1 \,..\, c_{m-1}),$$

und die Eigenschaft besitzt, daſs die Pfaff'sche Gleichung:

$$\omega_1 dx_1 + \cdots + \omega_{m-1} dx_{m-1} + dx_m = 0$$

exakt ist. Die allgemeine Integralgleichung der letzteren:

$$\Omega(x_1 \,..\, x_m\, c_1 \,..\, c_{m-1}) + c_m = 0$$

liefert dann im Sinne der zweiten Definition des Art. 314 ein vollständiges Integral jeder einzelnen der homogenen partiellen Differentialgleichungen:

$$X_i \left(x_1 \,..\, x_m \frac{p_1}{p_m} \,..\, \frac{p_{m-1}}{p_m} \right) = c_i \qquad (i = 1 \,..\, m-1).$$

Diese Methode erfordert, wie man sieht, je eine Operation:

$$2m - 2\nu - 1,\; 2m - 2\nu - 3,\; ..\; 3,\; 1;$$

setzt man:

$$X_m \equiv \Omega(x_1 \,..\, x_m,\; X_1 \,..\, X_{m-1}),$$

so besteht eine Identität der Form:

$$P_1 dX_1 + \cdots + P_m dX_m \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m.$$

Die Integrationsvereinfachungen, die hiernach der Fall γ) gegenüber dem Fall β) darbietet, können natürlich auch dadurch erzielt werden, daſs man das homogene Involutionssystem (11) mittels der bekannten Substitution $\left(z \text{ für } x_m \text{ und } -p_i \text{ für } \frac{p_i}{p_m}\right)$ auf den Typus α) reduzirt.

370. Unter der speziellen Annahme $m = 2$, $\nu = 1$ erhalten wir aus den Ergebnissen der letzten beiden Nummern die nachstehenden, schon von Lagrange[1]) bewiesenen Sätze:

Um die partielle Differentialgleichung:

$$F(xyzpq) = 0 \tag{15}$$

zu integriren, bestimme man ein Integral $\Phi(xyzpq)$ der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)& \\ - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q} &= 0\end{aligned} \tag{16}$$

von der Beschaffenheit, daſs die beiden Relationen:

$$F = 0, \ \Phi(xyzpq) = a$$

sich in der Form:

$$p = \pi(xyza); \ q = \varkappa(xyza)$$

auflösen lassen; dann ist die totale Differentialgleichung:

$$dz - \pi(xyza)dx - \varkappa(xyza)dy = 0,$$

für beliebige konstante Werte von a exakt, und ihre allgemeine Integralgleichung:

$$V(xyza) = b$$

liefert ein vollständiges Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung (15). Hat letztere die Form:

$$F(xypq) = 0,$$

so bestimme man ein Integral $\Phi(xypq)$ der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q} = 0 \tag{17}$$

derart, daſs die Relationen:

$$F = 0, \ \Phi = a$$

sich folgendermaſsen auflösen lassen:

$$p = \chi(xya); \ q = \omega(xya);$$

1) Lagrange I.

dann ist der Ausdruck $\chi dx + \omega dy$ ein exaktes Differential $d\varphi(xya)$, und die Relation:

$$z = \varphi(xya) + b$$

liefert ein vollständiges Integral von $F(xypq) = 0$.

Es sei z. B. die folgende partielle Differentialgleichung vorgelegt:

$$\psi(p, q) = 0. \tag{18}$$

Die lineare partielle Differentialgleichung (17) wird hier:

$$\frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

eine Lösung derselben ist p; aus den Relationen:

$$p = a, \ \psi(p, q) = 0$$

folgt eine Gleichung der Form:

$$q = \omega(a).$$

Der Pfaff'sche Ausdruck $a\,dx + \omega(a)\,dy$ ist in der That ein exaktes Differential, und die Gleichung (18) besitzt das vollständige Integral:

$$z = ax + \omega(a)\cdot y + b,$$

welches aus ∞^2 Ebenen des Raums $R_3(xyz)$ besteht; die allgemeinste Integralfläche von (18) ist eine Developpable, die von irgend einfach unendlich vielen dieser Ebenen umhüllt wird.

Wir betrachten zweitens eine Gleichung der Form:

$$\varphi(zpq) = 0. \tag{19}$$

Die Gleichung (16) lautet hier so:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right) = 0,$$

eine Lösung derselben ist $\frac{p}{q}$; aus den Gleichungen:

$$p = qa; \ \varphi(z, p, q) = 0,$$

folgen Gleichungen der Form:

$$q = \psi(z, a); \ p = a\psi(z, a).$$

Die totale Differentialgleichung:

$$dz - a\psi dx - \psi dy = 0$$

ist exakt, und ihre allgemeine Integralgleichung, die zugleich ein vollständiges Integral von (19) darstellt, lautet:

$$\int\frac{dz}{\psi} = ax + y + b.$$

Schliefslich untersuchen wir noch folgende Gleichung:

$$\varphi(xp) = \psi(yq).$$

Die lineare partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q} = 0$$

hat das Integral $\varphi(xp)$; aus den Gleichungen:

$$\varphi = a, \ \varphi = \psi$$

folgt $\psi = a$, also durch Auflösung nach p, q:

$$p = \chi(x, a); \ q = \omega(y, a),$$

und man erhält das vollständige Integral:

$$z = \int \chi dx + \int \omega dy + b.$$

371. Das in Art. 368 und 369 auseinandergesetzte Verfahren ist unter dem Namen „zweite Jacobi'sche Methode“ bekannt. Zur Bestimmung je eines Integrals der dabei auftretenden successiven vollständigen Systeme hat Jacobi das von ihm herrührende, in Art. 67 erklärte Verfahren benützt.

Wir wollen die zweite Jacobi'sche Methode durch eine Reihe von Beispielen erläutern.

1. Beispiel:

$$\varphi(p_1 p_2 \ldots p_m) = 0.$$

Jede der partiellen Differentialgleichungen:

$$p_1 = c_1, \ p_2 = c_2 \ \ldots \ p_m = c_m$$

ist mit den übrigen und mit der gegebenen Gleichung in Involution. Unterwirft man daher die c_ι der Bedingung:

$$\varphi(c_1 c_2 \ldots c_m) = 0,$$

so lautet ein vollständiges Integral:

$$z = c + c_1 x_1 + \cdots + c_m x_m.$$

2. Beispiel.

$$z = \varphi(p_1 p_2 \ldots p_m).$$

Man findet nun:

$$\left[z - \varphi, \ \frac{p_i}{p_m}\right] \equiv -\frac{1}{p_m}\cdot p_\iota + \frac{p_i}{p_m^2}\cdot p_m \equiv 0,$$

d. h. die Gleichungen:

$$p_i = c_i p_m \qquad (i = 1, 2, \ldots m - 1),$$

bilden mit der gegebenen Gleichung zusammen ein m-gliedriges Involutionssystem; durch Auflösung desselben nach den p_i erhält man:

$$p_m = \chi(z, c_1 c_2 \ldots c_{m-1});\ p_i = c_i \cdot \chi, \qquad (i = 1, 2, \ldots m-1).$$

Die totale Differentialgleichung:

$$dz - \chi(c_1 dx_1 + \cdots + c_{m-1} dx_{m-1} + dx_m) = 0$$

ist in der That exakt und hat zur allgemeinen Integralgleichung:

$$\int \frac{dz}{\chi} = c_1 x_1 + \cdots + c_{m-1} x_{m-1} + x_m + c_m,$$

womit ein vollständiges Integral der gegebenen Gleichung gewonnen ist.

3. Beispiel. Es seien beliebige Funktionen der Form:

$$\varphi_1(x_1, p_1);\ \varphi_2(x_2, p_2);\ \ldots\ \varphi_m(x_m, p_m)$$

gegeben; dann ist jede der Gleichungen:

(20) $$\varphi_i(x_i, p_i) = c_i \qquad (i = 1, \ldots m)$$

mit den übrigen und mit der Gleichung:

(21) $$\psi(\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_m) = 0$$

involutorisch. Löst man daher die Relationen (20) nach den p_i auf:

$$p_i = \psi_i(x_i, c_i),$$

so erhält man für die partielle Differentialgleichung (21) das vollständige Integral:

$$z = c + \int \psi_1 dx_1 + \int \psi_2 dx_2 + \cdots + \int \psi_m dx_m;$$

darin sind c und $m-1$ von den Gröfsen c_i die arbiträren Konstanten, während die m^{te} der Gröfsen c_i aus der Gleichung:

$$\psi(c_1 c_2 \ldots c_m) = 0$$

zu bestimmen ist.

So findet man beispielsweise für die partielle Differentialgleichung:

$$p_1 p_2 \ldots p_m = x_1 x_2 \ldots x_m$$

das vollständige Integral:

$$z = c + c_1 x_1^2 + \cdots + c_m x_m^2,$$

worin die c_i durch die Relation:

$$2^m c_1 c_2 \ldots c_m = 1$$

an einander geknüpft sind.

4. Beispiel.

$$(22)\quad (x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + p_3 (p_1 - p_2)[p_4^2 + (p_5 + x_4)(p_5 + x_6) p_6] = c_1.$$

Die partielle Differentialgleichung:

$$(23)\qquad p_4^2 + (p_5 + x_4)(p_5 + x_6) p_6 = c_2$$

bildet mit (22) zusammen offenbar ein Involutionssytem; die Gleichung (22) kann dabei ersetzt werden durch die folgende:

$$(24)\qquad (x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + c_2 p_3 (p_1 - p_2) = c_1.$$

Die linke Seite von (23) bezeichnen wir mit X_1 und suchen ein dreigliedriges Involutionssystem der Form:

$$X_1(x_4 x_5 x_6 p_4 p_5 p_6);\ X_2(x_4 \,.\,.\, p_6);\ X_3(x_4 \,.\,.\, p_6)$$

zu bestimmen; ebenso nennen wir X_1' die linke Seite von (24), und ermitteln ein dreigliedriges Involutionssystem der Gestalt:

$$X_1'(x_1 x_2 x_3 p_1 p_2 p_3);\ X_2'(x_1 x_2 x_3 p_1 p_2 p_3),\ X_3'(x_1 \,.\,.\, p_3).$$

Dann bilden offenbar die Funktionen $X_1 X_2 X_3 X_1' X_2' X_3'$ ein sechsgliedriges Involutionssystem, und das Integrationsproblem (22) erledigt sich durch eine Quadratur.

Bilden wir die zu (23) gehörige lineare partielle Differentialgleichung, so hat das adjungirte simultane System derselben die Form:

$$\frac{dx_4}{2p_4} = \frac{dx_5}{p_6(2p_5 + x_4 + x_6)} = \frac{dx_6}{(p_5 + x_4)(p_5 + x_6)} = \frac{-dp_4}{p_6(p_5 + x_6)} = \frac{-dp_5}{0}$$
$$= \frac{-dp_6}{p_6(p_5 + x_4)}.$$

Ein Integral desselben ist $p_5 = \text{const.}$, ein zweites ergiebt sich durch Gleichsetzung des dritten und sechsten der obigen Quotienten; man findet:

$$p_6(p_5 + x_6) = \text{const.},$$

darnach können wir X_2 mit p_5 und X_3 mit $p_6(p_5 + x_6)$ identifiziren.

Bilden wir ferner die zu (24) gehörige lineare partielle Differentialgleichung $(X_1' f) = 0$, so lautet das adjungirte simultane System folgendermaſsen:

$$\frac{dx_1}{x_2 x_3 + c_2 p_3} = \frac{dx_2}{x_1 x_3 - c_2 p_3} = \frac{dx_3}{c_2(p_1 - p_2)} = \frac{-dp_1}{p_2 x_3} = \frac{-dp_2}{p_1 x_3} = \frac{-dp_3}{p_1 x_2 + p_2 x_1}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d(p_1 + p_2)}{p_1 + p_2} = \frac{-d(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2},$$

also können wir setzen:

$$X_2' = (x_1 + x_2)(p_1 + p_2).$$

Aus dem obigen simultanen System findet man ferner:

$$\frac{d(p_1 - p_2)}{x_3(p_1 - p_2)} = \frac{dx_3}{c_2(p_1 - p_2)},$$

und hieraus das Integral:

$$c_2(p_1 - p_2) - \frac{1}{2}x_3^2 = \text{const.}$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann für X_3' genommen werden, da sie, wie die Ausrechnung lehrt, auch mit X_2' involutorisch ist. Löst man die Gleichungen:

$$X_1 = c_2;\ X_2 = c_3;\ X_3 = c_4;\ X_1' = c_1;\ X_2' = c_5;\ X_3' = c_6$$

nach $p_1 p_2 \ldots p_6$ auf, und substituirt die erhaltenen Werte in $\Sigma p_i dx_i$, so erhält man durch Quadraturen ein vollständiges Integral der gegebenen Gleichung (22):

$$z + c = \log \frac{(x_1 + x_2)^{\frac{c_5}{2}}(c_3 + x_6)^{c_4}}{(2c_6 + x_3^2)^{\frac{c_5}{2}}} + \frac{1}{2c_2}(x_1 - x_2)\left(c_6 + \frac{x_3^2}{2}\right)$$

$$+ \frac{c_1\sqrt{2}}{\sqrt{c_6}} \operatorname{arctg} \frac{x_3}{\sqrt{2c_6}} + \frac{2}{3c_4}(c_2 - c_3 c_4 - c_4 x_4)^{\frac{3}{2}} + c_3 x_5 .$$

Die obigen Beispiele 1), 3), 4) subsumiren sich unter eine allgemeine Regel, die von *Imschenetzky* als *„Methode der Trennung der Variabeln“* bezeichnet worden ist. Es seien $a, b, c \ldots g$ irgend welche ν Indices von der Beschaffenheit, dafs:

$$o < a < b < \cdots < g < m;$$

wir betrachten dann eine partielle Differentialgleichung vom Typus β):

$$F(x_1 x_2 \ldots x_a,\ p_1 \ldots p_a,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots \varphi_\nu) = c.$$

Dabei ist φ_1 eine Funktion, die nur die Variabeln:

$$x_{a+1} x_{a+2} \ldots x_b,\ p_{a+1} \ldots p_b,$$

ferner φ_2 eine Funktion, die nur die Variabeln:

$$x_{b+1} \ldots x_c,\ p_{b+1} \ldots p_c$$

enthält, etc. Dann ist jede der Gleichungen $\varphi_i = \text{const.}$ mit jeder andern dieser Gleichungen und mit $F = c$ involutorisch, und die Integration der letzteren kommt darauf hinaus, für jede einzelne der partiellen Differentialgleichungen:

$$F(x_1 \ldots x_a p_1 \ldots p_a,\ c_1 c_2 \ldots c_\nu) = c,\ \varphi_1 = c_1 \ldots \varphi_\nu = c_\nu$$

je ein vollständiges Integral zu ermitteln; durch einfache Addition dieser vollständigen Integrale erhält man dann ein vollständiges Integral der gegebenen Gleichung.

5. Beispiel.

$$\frac{p_1^2}{x_1} + p_2 x_2 \left(\frac{p_1}{x_1} + p_3\right) + x_2^2 x_3 p_2^2 - p_4^2 x_4 = 0.$$

Nach dem eben Gesagten bilden die Gleichungen:

$$(25) \qquad p_4^2 x_4 = c_1;\ p_2 x_2 = c_2$$

$$\frac{p_1^2}{x_1} + c_2 \left(\frac{p_1}{x_1} + p_3\right) + c_2^2 x_3 - c_1 = 0$$

ein dreigliedriges Involutionssystem; die letzte dieser Gleichungen giebt wiederum zu dem zweigliedrigen Involutionssystem:

$$(26) \qquad \frac{p_1^2}{x_1} + c_2 \frac{p_1}{x_1} = c_3;\ c_2 p_3 + c_2^2 x_3 - c_1 + c_3 = 0$$

Anlaſs. Berechnet man aus dem viergliedrigen Involutionssystem (25) (26) die p_i als Funktionen der x_k und substituirt die erhaltenen Ausdrücke in $\Sigma p_i dx_i$, so erhält man durch Quadraturen ein vollständiges Integral der gegebenen Gleichung:

$$z = c - \frac{c_2}{2} x_1 \pm \frac{1}{12 c_3} (c_2^2 + 4 c_3 x_1)^{\frac{3}{2}}$$
$$+ c_2 \log x_2 + \frac{c_1 - c_3}{c_2} x_3 - \frac{c_2 x_3^2}{2} + 2 \sqrt{c_1 x_4}.$$

6. Beispiel. Wir betrachten die beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} X_1 \equiv p_1 p_3 - x_2 x_4 = 0, \\ X_2 \equiv p_2 p_4 - x_1 x_3 = 0; \end{cases}$$

diese bilden kein Involutionssystem, denn man findet:

$$X_3 \equiv (X_1 X_2) \equiv x_1 p_1 - x_2 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_4.$$

Die Gleichungen $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ bilden aber ein Involutionssystem, das zwei verschiedene Auflösungen:

$$(27) \qquad p_1 = \frac{x_2 x_3}{p_4};\ p_2 = \frac{x_1 x_3}{p_4};\ p_3 = \frac{p_4 x_4}{x_3};$$

$$(28) \qquad p_1 = \frac{p_4 x_4}{x_1};\ p_2 = \frac{x_1 x_3}{p_4};\ p_3 = \frac{x_1 x_2}{p_4}$$

gestattet. Das zu (27) gehörige Jacobi'sche System (13) hat die Form:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{x_2 x_3}{p_4^2} \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0;\quad \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{x_1 x_3}{p_4^2} \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0;$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{x_4}{x_3} \frac{\partial f}{\partial x_4} + \frac{p_4}{x_3} \frac{\partial f}{\partial p_4} = 0.$$

Die ersten beiden dieser Gleichungen besitzen das gemeinschaftliche Integral p_4; substituirt man dieses Integral anstatt f in die linke Seite der dritten Gleichung, so erhält man die Funktion $\frac{p_4}{x_3}$, die nach Art. 67 die beiden ersten, und wie die Ausrechnung lehrt, auch die dritte Gleichung unseres Jacobi'schen Systems erfüllt; aus den Gleichungen (27) und der Relation $p_4 = ax_3$ kann man jetzt die p_i durch die x_i ausdrücken, und erhält so das vollständige Integral:

$$z = \frac{1}{a} x_1 x_2 + a x_3 x_4 + b$$

des Systems (27); ebenso findet man für das System (28) das vollständige Integral:

$$z = \frac{1}{a} x_2 x_3 + a x_1 x_4 + b.$$

372. Will man auf das ν-gliedrige Jacobi'sche System (5) die Mayer'sche Transformation (Art. 85) anwenden, so hat man unter:

$$(29) \qquad z^0,\ x_1^0 \,.\,.\, x_m^0,\ p_{\nu+1}^0 \,.\,.\, p_m^0$$

eine Stelle zu verstehen, an der alle rechten Seiten des gegebenen Involutionssystems:

$$(3) \qquad p_i = \psi_i(z x_1 \,.\,.\, x_m p_{\nu+1} \,.\,.\, p_m,\ c_1 \,.\,.\, c_\nu) \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, \nu),$$

und infolgedessen auch sämtliche Koeffizienten des Jacobi'schen Systems (5) regulär sind, und mittels der Formeln:

$$(30) \qquad x_1 = x_1{}^0 + y_1;\ x_2 = x_2{}^0 + y_1 y_2 \,.\,.\, x_\nu = x_\nu{}^0 + y_1 y_\nu,$$

statt $x_1 \,.\,.\, x_\nu$ die Gröſsen $y_1 y_2 \,.\,.\, y_\nu$ als neue Independente einzuführen. Bezeichnen wir dann mit $[\psi_i]$ diejenige Funktion, die aus ψ_i durch die Substitution (30) entsteht, und schreiben wir:

$$\psi \equiv [\psi_1] + y_2[\psi_2] + \cdots + y_\nu[\psi_\nu],$$

so enthält das vollständige System, das aus (5) durch unsere Variabelntransformation hervorgeht, unter andern folgende Gleichung:

$$(31) \quad -\frac{\partial f}{\partial y_1} - \psi \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_{\nu+1}^{m}{}_h \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial p_h} \left(\frac{\partial f}{\partial x_h} + p_h \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_h} + p_h \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial p_h} \right\} = 0.$$

Die Integration des Jacobi'schen Systems (5) kommt nach Kap. II § 5 auf diejenige der linearen partiellen Differentialgleichung (31) hinaus, in der $y_1 x_{\nu+1} \,.\,.\, x_m$ als Independente, die Gröſsen $y_2 \,.\,.\, y_\nu$ dagegen als Konstante zu betrachten sind. Insbesondere erhält man aus jedem nicht konstanten Integral von (31) durch bloſse Differentiationen und Eliminationen mindestens *eine* Lösung des Jacobi'schen Systems (5).

373. Wir wollen nun die neuen Variabeln $y_1 \ldots y_\nu$ auch in das gegebene Involutionssystem (3) einführen. Da nun $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, so hat man vermöge (30) die Formeln:

$$q_1 = p_1 + y_2 p_2 + \cdots + y_\nu p_\nu;\; q_{1+h} = y_1 p_{1+h} \qquad (h = 1, \cdots \nu - 1),$$

wenn

$$q_i = \frac{\partial z}{\partial y_i}$$

gesetzt wird. Darnach erhalten die partiellen Differentialgleichungen (3) durch unsere Variabelntransformation die Gestalt:

$$(32) \qquad \begin{aligned} q_1 &= [\psi_1] + y_2[\psi_2] + \cdots + y_\nu[\psi_\nu] \equiv \psi \\ q_s &= y_1[\psi_s] \qquad (s = 2, 3, \ldots \nu). \end{aligned}$$

Die Gleichung (32) ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit den Independenten $y_1, x_{\nu+1} \ldots x_m$, wenn die $y_2 \ldots y_\nu$ als Parameter betrachtet und die $p_{\nu+h}$ auf der rechten Seite durch $\frac{\partial z}{\partial x_{\nu+h}}$ ersetzt werden. Man erkennt ohne weiteres, daſs die lineare partielle Differentialgleichung, auf deren Integration diejenige von (32) nach der Cauchy'schen Methode zurückkommt, mit (31) identisch ist.

Die lineare partielle Differentialgleichung (31) steht also zu der partiellen Differentialgleichung (32) in derselben Beziehung, wie das Jacobi'sche System (5) zu dem gegebenen Involutionssystem (3).

Es sei jetzt ein beliebiges (von $m - \nu + 1$ arbiträren Konstanten abhängendes) vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung (32) bekannt. Nach Kap. XII, § 3 und 4 lassen sich dann durch bloſse Eliminationen alle $2m - 2\nu + 1$ Integrale der zugehörigen linearen partiellen Differentialgleichung (31), also auch ihre Hauptintegrale hinsichtlich $y_1 = 0$ bestimmen. Letztere liefern aber nach Elimination der y_i mit Hülfe von (30) sofort die $2m - 2\nu + 1$ Hauptintegrale des Jacobi'schen Systems (5) hinsichtlich:

$$(33) \qquad x_1 = x_1^0 \ldots x_\nu = x_\nu^0,$$

und damit ist die Integration des Involutionssystems (3) nach der verallgemeinerten Cauchy'schen Methode erledigt.

Wir haben so den wichtigen, von *Lie* herrührenden Satz gewonnen:

Die Integration jedes ν-gliedrigen Involutionssystems:

(3) $\quad p_i = \psi_i(z, x_1 \,.\,.\, x_m, p_{\nu+1} \,.\,.\, p_m c_1 \,.\,.\, c_\nu) \quad (i = 1, 2, \,.\,.\, \nu)$

in m Independenten kann auf die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung mit $m - \nu + 1$ unabhängigen Variabeln zurückgeführt werden.

Im Falle γ) ist die rechte Seite der Gleichung (32) ebenfalls von z unabhängig und in den Gröfsen $p_{\nu+1} \,.\,.\, p_m$ homogen erster Ordnung, und der vorstehende Satz bleibt daher in diesem Falle auch dann richtig, wenn man die zweite der in Art. 302 gegebenen Definitionen des Integralbegriffs bevorzugt.

374. Der Lie'sche Satz läfst sich auch folgendermafsen beweisen. Man habe ein Wertsystem (29) und eine arbiträre Funktion

$$\varphi\,(x_{\nu+1} x_{\nu+2} \,.\,.\, x_m)$$

den Festsetzungen des Art. 365 gemäfs gewählt; dann besitzt das Involutionssystem (3) eine und nur eine Integralfunktion $z = \chi(x_1 \,.\,.\, x_m)$, die an der Stelle $x_1^0 \,.\,.\, x_m^0$ regulär ist und vermöge der Substitution (33) in die vorgeschriebene Funktion φ übergeht. Diese Integralfunktion verwandelt sich vermöge der Substitution (30) in eine Funktion:

$$z = \Phi(y_1 y_2 \,.\,.\, y_\nu, x_{\nu+1} \,.\,.\, x_m),$$

die der partiellen Differentialgleichung (32) genügt, nach Potenzen der Gröfsen:

$$y_1, \; x_{\nu+1} - x_{\nu+1}^0 \,.\,.\, x_m - x_m^0$$

entwickelbar ist, und sich vermöge $y_1 = 0$ auf $\varphi(x_{\nu+1} \,.\,.\, x_m)$ reduzirt. Da aber die partielle Differentialgleichung (32) nach Art. 317 nur eine einzige Integralfunktion Φ mit den genannten Eigenschaften besitzt, so kommen wir zu dem Schlusse:

Aus derjenigen Integralfunktion Φ der partiellen Differentialgleichung (32), *welche sich vermöge $y_1 = 0$ auf die von $y_2 \,.\,.\, y_\nu$ nicht abhängende arbiträre Funktion $\varphi(x_{\nu+1} \,.\,.\, x_m)$ reduzirt, erhält man durch Elimination der y_i vermöge* (30) *ohne weiteres die Integralfunktion unseres Involutionssystems, die vermöge $x_1 = x_1^0 \,.\,.\, x_\nu = x_\nu^0$ in φ übergeht.*

Man wähle z. B. für φ die Funktion $c_{\nu+1} x_{\nu+1} + \cdot\cdot + c_m x_m + c$, worin die c arbiträre Konstanten bedeuten; die zugehörige Integralfunktion Φ der Gleichung (32) wird nach Art. 317 gefunden und stellt ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung (32) dar. Eliminirt man hieraus die y mittels (30), so gewinnt man ohne weiteres ein vollständiges Integral des gegebenen Involutionssystems.

Nach Art. 372 und 373 erscheint das Lie'sche Theorem als Korollar des Mayer'schen Satzes. Doch kann man auch umgekehrt den letzteren als einen einfachen Spezialfall des ersteren auffassen. In der That erhalten wir die Theorie von Kap. II § 5 ohne weiteres aus dem soeben bewiesenen Theorem, wenn wir unter den ψ_i ganze lineare homogene, von z freie Funktionen der $m-\nu$ Variabeln $p_{\nu+1}\,..\,p_m$ verstehen, so dafs also die Gleichungen (3) ein ν-gliedriges Jacobi'sches System linearer homogener partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung darstellen (vgl. Art. 353).

375. Diesem engen Zusammenhang entspricht es auch, dafs die genannten beiden Theoreme ganz analoge geometrische Deutungen zulassen (vgl. Art. 86).

Die Gleichungen:

$$(34)\qquad x_s - x_s^0 = y_s(x_1 - x_1^0) \qquad (s = 2, 3, \,..\, \nu)$$

definiren nämlich, wenn $y_2\,..\,y_\nu$ als variable Parameter betrachtet werden, im Raume $R_{m+1}(z x_1\,..\,x_m)$ ein System von $\infty^{\nu-1}$ linearen Punkt-$\mu_{m-\nu+2}$; diese Punktmannigfaltigkeiten enthalten alle die durch (33) definirte $m-\nu+1$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit, m. a. W. die $\infty^{\nu-1}$ ebenen Punktmannigfaltigkeiten (34) bilden einen „Büschel“ mit der „Axe“ (33) (Art. 86). Diese Axe wollen wir mit A bezeichnen.

Bedeutet nun E eine beliebige unter den linearen Punkt-$\mu_{m-\nu+2}$ des Büschels (34), so stellt E einen Raum $R_{m-\nu+2}$ dar, innerhalb dessen ein beliebiger Punkt durch Angabe der $m-\nu+2$ Koordinaten:

$$(35)\qquad z, y_1, x_{\nu+1}\,..\,x_m$$

bestimmt ist. Diese Gröfsen können also als Punktkoordinaten des Raums E gedeutet werden. Ist Q ein Punkt von E mit den Koordinaten (35), so sind seine Koordinaten im R_{m+1} die folgenden:

$$z, x_1^0 + y_1, x_2^0 + y_1 y_2\,..\,x_\nu^0 + y_1 y_\nu, x_{\nu+1}\,..\,x_m.$$

Ferner wollen wir die Gröfsen:

$$(36)\qquad z, y_1, x_{\nu+1}\,..\,x_m, q_1, p_{\nu+1}\,..\,p_m$$

als Koordinaten eines *Flächenelements* des Raums E deuten; wir verstehen darunter, wie gewöhnlich, den Inbegriff eines Punktes Q von E und einer durch ihn gehenden, in E enthaltenen linearen $m-\nu+1$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Die Bedingung für die vereinigte Lage zweier benachbarter Flächenelemente des Raums E:

$$z, y_1, x_{\nu+1}\,..\,p_m;\; z + dz, y_1 + dy_1\,..\,p_m + dp_m$$

lautet so:

$$dz - q_1 dy_1 - p_{\nu+1} dx_{\nu+1} - \cdots - p_m dx_m = 0$$

und die partielle Differentialgleichung (32) stellt eine Relation zwischen den Elementkoordinaten unseres Raums E dar.

Wir betrachten jetzt im Raum R_{m+1} ein Flächenelement e mit den Koordinaten zx_ip_i, dessen zugehöriger Punkt Q in E gelegen ist; dann schneidet die Ebene dieses Flächenelements den Raum E nach einer linearen $\mu_{m-\nu+1}$, die mit Q zusammen ein Flächenelement mit den Koordinaten:

$$z, y_1, x_{\nu+1} \, . \, . \, x_m; \; p_1 + \sum_2^{\nu} y_s p_s; \; p_{\nu+1} \, . \, . \, p_m$$

liefert, oder kurz ausgedrückt: das Flächenelement $z x_1 \, . \, . \, x_m \, p_1 \, . \, . \, p_m$ schneidet aus dem Raum E das obige Flächenelement aus. Ferner seien $z^0 x_1^0 \, . \, . \, x_m^0$ die Koordinaten eines auf der Axe A gelegenen Punktes P des Raums R_{m+1}, und e_0 ein den Punkt P enthaltendes Flächenelement, dessen m übrige Koordinaten wir mit $p_1^0 \, . \, . \, p_m^0$ bezeichnen. Dabei sollen die Konstanten $z^0 x_1^0 \, . \, . \, x_m^0 p_{\nu+1}^0 \, . \, . \, p_m^0$ so gewählt sein, dafs die Voraussetzungen des Art. 365 zutreffen, während $p_1{}^0 \, . \, . \, p_\nu{}^0$ aus den Gleichungen:

$$p_i{}^0 = \psi_i(z^0 x_1^0 \, . \, . \, x_m^0 p_{\nu+1}^0 \, . \, . \, p_m^0 \, c_1 \, . \, . \, c_\nu) = \psi_i^0$$

zu berechnen sind. Das Flächenelement e_0', das von e_0 aus dem Raum E ausgeschnitten wird, hat dann innerhalb des letzteren die Koordinaten:

$$z, 0, x_{\nu+1}^0 \, . \, . \, x_m^0; \; \psi_1^0 + y_2 \psi_2^0 + \, . \, . \, y_\nu \psi_\nu^0; \; p_{\nu+1}^0 \, . \, . \, p_m^0;$$

es genügt also der partiellen Differentialgleichung (32) und ist überdies nach der Terminologie des vorigen Kapitels ein nicht singuläres Flächenelement dieser Gleichung. Darnach ist e_0' auf einem und nur einem charakteristischen Streifen C' der partiellen Differentialgleichung (32) enthalten. Läfst man jetzt E alle $\infty^{\nu-1}$ Mannigfaltigkeiten des Büschels (34) durchlaufen, ohne die Koordinaten $z^0 x_i^0$ des Punktes P zu ändern, so erzeugt die in E gelegene, zu e_0' gehörige „Ebene" die zu dem Flächenelement e_0 gehörige Ebene des Raums R_{m+1}, und gleichzeitig der von e_0' auslaufende charakteristische Streifen C' die durch e_0 festgelegte Charakteristik C des gegebenen Involutionssystems; umgekehrt schneidet die ν-fach ausgedehnte Charakteristik C aus dem Raume E den durch e_0' gehenden charakteristischen Streifen der partiellen Differentialgleichung (32) aus. Es ist dies der geometrische Ausdruck der analytischen Thatsache, dafs die Hauptintegrale hinsichtlich $y_1 = 0$ der linearen partiellen Differentialgleichung (31) in die Hauptintegrale des Jacobi'schen Systems (5) hinsichtlich $x_1 = x_1{}^0 \, . \, . \, x_\nu = x_\nu{}^0$ übergehen, wenn man die y_i mittels (30) eliminirt, und dafs umgekehrt die zuletzt genannten Hauptintegrale sich vermöge der Substitution (30) in die ersteren verwandeln.

Wir betrachten jetzt diejenige Integral-$M_{m-\nu}$ des gegebenen Involutionssystems (3), welche durch die Relationen (33) und die folgenden:

$$(37)\qquad z = \varphi(x_{\nu+1} \,.\,.\, x_m);\ p_{\nu+h} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\nu+h}} \quad (h = 1, 2, \,.\,.\, m - \nu)$$

definirt wird, deren zugehörige Punktmannigfaltigkeit also ganz auf der Axe A gelegen ist. Wir wollen diese Integral-$M_{m-\nu}$ mit Ω_0 bezeichnen; sie schneidet den Raum E nach einer Element-$M_{m-\nu}$, die Ω_0' genannt werde, und die in den Elementkoordinaten (36) durch die Gleichungen (37) und durch $y_1 = 0$; $q_1 = \psi$ definirt ist. Die Ausgangsmannigfaltigkeit Ω_0' ist dann auf einer und nur einer, ganz in E enthaltenen, $m - \nu + 1$-fach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeit Ω' der partiellen Differentialgleichung $q_1 = \psi$ gelegen. Aus dem vorhin erkannten Zusammenhang zwischen den Charakteristiken des gegebenen Involutionssystems und der partiellen Differentialgleichung (32) folgt jetzt sofort: Läſst man E alle ebenen Mannigfaltigkeiten des Büschels (34) durchlaufen, so erzeugt Ω' die durch Ω_0 festgelegte Integral-M_m des gegebenen Involutionssystems; umgekehrt schneidet die letztere aus dem Raum E die durch Ω_0' bestimmte Integral-$M_{m-\nu}$ der partiellen Differentialgleichung $q_1 = \psi$ aus.

Etwas allgemeiner können wir sagen: Bestimmt man ein Integral Ω' der Gleichung $q_1 = \psi$ mit Hülfe einer Ausgangsmannigfaltigkeit Ω_0', deren zugehörige Punktmannigfaltigkeit ganz auf der Axe A gelegen ist, *und deren Definitionsgleichungen von den Parametern* $y_2 y_3 \,.\,.\, y_\nu$ *nicht abhängen,* so erzeugt Ω' ein Integral des gegebenen Involutionssystems, wenn man E um die Axe A sich beliebig drehen läſst.

376. Aus dem Theorem des Art. 373 hat Lie folgende Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$(38)\qquad p_1 = \psi(z, x_1 \,.\,.\, x_m p_2 \,.\,.\, p_m)$$

abgeleitet. Man bestimme mittels einer Operation $2m - 1$ eine von p_2 nicht unabhängige Funktion $f^{(1)}$ der Variabeln $z x_1 \,.\,.\, x_m$, $p_2 \,.\,.\, p_m$, die der Bedingung:

$$[p_1 - \psi, f^{(1)}] \equiv 0$$

genügt, löse die Gleichungen:

$$(39)\qquad p_1 = \psi;\ f^{(1)} = c,$$

nach p_1 und p_2 auf, und reduzire das so erhaltene zweigliedrige Involutionssystem nach dem Verfahren des Art. 373 auf eine einzige partielle Differentialgleichung in $m - 1$ Independenten:

$$(40)\qquad p_1^{(1)} = \psi^{(1)}(z, x_1^{(1)} \,.\,.\, x_{m-1}^{(1)}, p_2^{(1)} \,.\,.\, p_{m-1}^{(1)}),$$

wobei wir die unabhängigen Veränderlichen der Gleichmäſsigkeit halber mit $x_1^{(1)} \ldots x_{m-1}^{(1)}$ und die Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x_i^{(1)}}$, mit $p_i^{(1)}$ bezeichnet haben. Nach dem zitirten Artikel läſst sich dann aus einem beliebigen vollständigen Integral der partiellen Differentialgleichung (40) durch gewisse Eliminationen ein vollständiges Integral des Involutionssystems (39) und mithin auch der gegebenen partiellen Differentialgleichung (38) herstellen. Wir bestimmen nun mittels einer Operation $2m-3$ eine Funktion:

$$f^{(2)}(z, x_1^{(1)} \ldots x_{m-1}^{(1)}, p_2^{(1)} \ldots p_{m-1}^{(1)}),$$

welche der Bedingung:

$$[p_1^{(1)} - \psi^{(1)}, f^{(2)}] \equiv 0$$

genügt und von $p_2^{(1)}$ nicht unabhängig ist, und reduziren das zweigliedrige Involutionssystem:

$$p_1^{(1)} = \psi^{(1)}, \ f^{(2)} = c_2$$

wie vorhin auf eine partielle Differentialgleichung:

$$p_1^{(2)} = \psi^{(2)}(z, x_1^{(2)} \ldots x_{m-2}^{(2)}, p_2^{(2)} \ldots p_{m-2}^{(2)})$$

etc. Schlieſslich gelangt man zu einer Gleichung:

$$p_1^{(m-1)} = \psi^{(m-1)}(z, x_1^{(m-1)}), \tag{41}$$

die als gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung durch eine Operation 1 integrirt wird. Durch gewisse Eliminationen kann man dann nach Art. 373 ein vollständiges Integral der vorhergehenden Gleichung:

$$p_1^{(m-2)} = \psi^{(m-2)}(z, x_1^{(m-2)}, \ x_2^{(m-2)}, \ p_2^{(m-2)}),$$

sodann ein vollständiges Integral der zweitvorhergehenden Gleichung etc., schlieſslich der gegebenen partiellen Differentialgleichung (38) ermitteln.

In den Fällen β) und γ), d. h. wenn ψ von z frei ist, lassen sich die vorhin mit $f^{(1)} f^{(2)} \ldots$ bezeichneten Funktionen so wählen, daſs sie die Variabeln z ebenfalls nicht enthalten; dadurch verringert sich die Ordnung der erforderlichen Integrationsoperationen um je eine Einheit, insbesondere wird die Gleichung (41) von z frei, also durch eine Quadratur integrirbar.

Im Falle γ) endlich kann man den Funktionen $f^{(1)}, f^{(2)} \ldots$ auſserdem noch die Bedingung auferlegen, in den $p_k^{(i)}$ homogen nullter Ordnung zu sein. Die rechten Seiten der Gleichungen $p_1^{(i)} = \psi^{(i)}$ werden dann in den $p_k^{(i)}$ homogen erster Ordnung, und die $m-2^{\text{te}}$ dieser Gleichungen hat die Form:

$$p_1^{(m-2)} = p_2^{(m-2)} \cdot \chi(x_1^{(m-2)}, x_2^{(m-2)}), \tag{42}$$

d. h. sie ist eine lineare homogene partielle Differentialgleichung mit zwei Independenten; also läfst sich ein von zwei arbiträren Konstanten abhängendes vollständiges Integral:

$$z = c\varphi(x_1^{(m-2)}, x_2^{(m-2)}) + c'$$

dieser Gleichung mit Hülfe einer einzigen Operation 1 ermitteln, worauf man wie oben ein vollständiges Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung erhält. Aus diesem vollständigen Integral läfst sich dann nach Art. 314 ein vollständiges Integral nach der zweiten Definition des Art. 302 ohne weiteres ableiten.

In allen Fällen kann man den oben geschilderten Integrationsprozefs nach irgend einem, etwa dem k^{ten} Schritte abbrechen, und für die partielle Differentialgleichung:

$$p_1^{(k)} = \psi^{(k)}(z, x_1^{(k)} \ldots x_{m-k}^{(k)}, p_2^{(k)} \ldots p_{m-k}^{(k)}),$$

ein vollständiges Integral mit Hülfe der Cauchy'schen Methode (Kap. XII, § 4) oder auch der zweiten Jacobi'schen Methode bestimmen, worauf ein vollständiges Integral der gegebenen Gleichung wie oben erhalten wird.

377. Es sei noch ausdrücklich hervorgehoben, dafs die soeben entwickelte Lie'sche Methode zur Integration eines ν-gliedrigen Involutionssystems bezw. *einer* partiellen Differentialgleichung in Lie's allgemeiner Theorie des Pfaff'schen Problems (Kap. VI, § 4) als Spezialfall enthalten ist.

In der That, der Ansatz des Art. 373 kommt im Falle α) darauf hinaus, den Pfaff'schen Ausdruck in $2m - \nu + 1$ Variabeln:

$$\nabla_0 \equiv dz - \psi_1 dx_1 - \cdots - \psi_\nu dx_\nu - p_{\nu+1} dx_{\nu+1} - \cdots - p_m dx_m$$

vermöge der Substitution (30), in der $y_2 y_3 \ldots y_\nu$ Konstante bedeuten, auf einen nach Art. 305 bedingungslosen Pfaff'schen Ausdruck:

$$[\nabla_0] \equiv dz - ([\psi_1] + y_2[\psi_2] + \cdots + y_\nu[\psi_\nu]) dy_1 - p_{\nu+1} dx_{\nu+1} - \cdots - p_m dx_m$$

in $2m - 2\nu + 2$ Variabeln:

$$z, y_1, x_{\nu+1} \ldots x_m, p_{\nu+1} \ldots p_m$$

zu reduziren. Nach Art. 171 läfst sich dann durch gewisse Eliminationen aus jeder Normalform von $[\nabla_0]$ eine solche von ∇_0 herstellen; es ist dies offenbar nur ein anderer Ausdruck für den in Art. 373 aufgestellten Lie'schen Satz.

Da ferner das zu $[\nabla_0]$ gehörige vollständige System V sich auf die einzige lineare homogene partielle Differentialgleichung (31) reduzirt, so erkennt man auch das weitere Reduktionsverfahren der vorigen Nummer als einen Spezialfall der allgemeinen in Kap. VI, § 4 auseinandergesetzten Methode.

Im Falle β) verwandelt sich der Pfaff'sche Ausdruck:

$$\nabla_0' \equiv \psi_1 dx_1 + \cdot\cdot + \psi_\nu dx_\nu + p_{\nu+1} dx_{\nu+1} + \cdot\cdot + p_m dx_m$$

vermöge der Subsitution (30) in einen bedingungslosen Ausdruck:

$$[\nabla_0'] \equiv ([\psi_1] + y_2[\psi_2] + \cdot\cdot + y_\nu[\psi_\nu]) dy_1 + p_{\nu+1} dx_{\nu+1} + \cdot\cdot + p_m dx_m$$

mit den $2m - 2\nu + 1$ Variabeln:

$$y_1, x_{\nu+1} \,.\,. x_m p_{\nu+1} \,.\,. p_m, \tag{43}$$

und das Theorem des Art. 171 sagt jetzt aus, daſs man aus jeder Normalform von $[\nabla_0']$ eine Normalform von ∇_0' durch gewisse Eliminationen und eine Quadratur ermitteln kann. Diese Quadratur ist aber im gegenwärtigen Falle überflüssig. In der That, kennt man eine Normalform des Pfaff'schen Ausdrucks $[\nabla_0']$, oder, was dasselbe bedeutet, ein beliebiges vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} = [\psi_1] + y_2[\psi_2] + \cdot\cdot + y_\nu[\psi_\nu] \equiv \psi,$$

so erhält man durch gewisse Eliminationen alle $2m - 2\nu + 1$ Hauptintegrale hinsichtlich $y_1 = 0$ von der linearen partiellen Differentialgleichung (31), und aus ihnen die Hauptintegrale des Jacobi'schen Systems (5) hinsichtlich $x_1 = x_1^0 \,.\,. x_\nu = x_\nu^0$, wenn man die y mit Hülfe von (30) eliminirt; mittels dieser Hauptintegrale aber läſst sich nach Art. 364 ohne weiteres eine Normalform von ∇_0' herstellen.

Das vollständige System V mit den Independenten (43), das zu dem Pfaff'schen Ausdruck $[\nabla_0']$ gehört, reduzirt sich auf die einzige Gleichung:

$$-\frac{\partial f}{\partial y_1} + \sum_{\nu+1}^{m}{}_s \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_s} \frac{\partial f}{d x_s} - \frac{\partial \psi}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial p_s} \right) = 0,$$

und man schlieſst daraus leicht, daſs auch in dem vorliegendem Falle β) die Reduktionsmethode der vorigen Nummer als Spezialfall in der allgemeinen Theorie von Kap. VI, § 4 enthalten ist.

Nur im Falle γ) erweist sich das Verfahren des vorigen Artikels als eine leichte Modifikation der allgemeinen Lie'schen Theorie, da ja in diesem Falle der Pfaff'sche Ausdruck $[\nabla_0']$, auf den sich ∇_0' vermöge der Substitution (30) reduzirt, nicht bedingungslos ist, sondern vielmehr die Klasse $2m - 2\nu$ besitzt (Art. 305).

378. Wir haben bisher die drei Fälle α), β) und γ) getrennt

behandelt, und aufserdem noch jedesmal zwei Möglichkeiten unterschieden, je nachdem das gegebene ν-gliedrige Involutionssystem nach ν von den Variabeln $p_1 \dots p_m$ auflösbar ist, oder nicht. Es ist aber leicht zu sehen, dafs diese Unterscheidungen ganz unwesentlich sind.

Es sei zunächst ein ν-gliedriges, von z nicht unabhängiges Involutionssystem:

$$F_i(z, x_1 \dots x_m p_1 \dots p_m) = c_i \qquad (i = 1, 2, \dots \nu) \tag{44}$$

vorgelegt. Schreiben wir darin:

$$x_{m+1} \equiv z; \quad -\frac{q_i}{q_{m+1}} \equiv p_i \qquad (i = 1, 2, \dots m), \tag{45}$$

und setzen wir ferner:

$$\Phi_i(x_1 \dots x_{m+1}, q_1 \dots q_{m+1}) \equiv F_i\left(x_{m+1}, x_1 \dots x_m, -\frac{q_1}{q_{m+1}}, \dots -\frac{q_m}{q_{m+1}}\right),$$

so bilden die Gleichungen:

$$\Phi_i(x_1 \dots x_{m+1}, q_1 \dots q_{m+1}) = c_i \qquad (i = 1, 2, \dots \nu) \tag{46}$$

ein ν-gliedriges homogenes Involutionssystem, d. h. die Φ_i sind in den q homogen nullter Ordnung und genügen den Identitäten:

$$0 \equiv (\Phi_i \Phi_k) \equiv \sum_1^{m+1} {}_s \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_s}\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_s} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_s}\frac{\partial \Phi_k}{\partial q_s}\right).$$

In der That gelten vermöge der Substitutionen (45) die Identitäten:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_{m+1}} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial z}; \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k} = -\frac{1}{q_{m+1}}\frac{\partial F}{\partial p_k}$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_{m+1}} \equiv \sum_1^m {}_h \frac{\partial F_i}{\partial p_h}\frac{q_h}{q_{m+1}^2} \qquad (k = 1, \dots m;\ i = 1, 2, \dots \nu),$$

und man hat infolgedessen:

$$(\Phi_i \Phi_k) \equiv -\frac{1}{q_{m+1}} \cdot [F_i F_k],$$

wenn auf die linke Seite dieser Identität die Substitutionen (45) ausgeführt werden. Ist solcherweise das Involutionssystem (44) auf das homogene Involutionssystem (46) zurückgeführt, so hat man bei der Integration des letzteren natürlich die zweite Definition des Integralbegriffs zu bevorzugen (Art. 302). Aus jedem $m+1$-gliedrigen Gleichungensystem in den Variabeln $x_1 \dots x_{m+1} q_1 \dots q_{m+1}$, das die Relationen (46), nicht aber die Gleichung $q_{m+1} = 0$ umfafst, und die Pfaff'sche Gleichung:

$$q_1 dx_1 + \cdots + q_{m+1} dx_{m+1} = 0$$

erfüllt, erhält man dann vermittelst der Substitution (45) die $m+1$ Definitionsgleichungen einer Integral-M_m des gegebenen Involutionssystems (44) und umgekehrt.

Man erkennt auch, dafs die Integrationsoperationen, welche nach Art. 354 zur Integration des homogenen Involutionssystems (46) erfordert werden, nach Anzahl und Ordnung mit denjenigen übereinstimmen, die nach demselben Artikel zur Integration des gegeben Involutionssystems (44) dienen.

379. Demnach hätten wir uns in diesem und dem vorhergehenden Kapitel von vorneherein auf die Betrachtung der Fälle β) und γ) beschränken können.

Es sei nun:

$$(47) \qquad F_i(x_1 x_2 \ldots x_m p_1 \ldots p_m) = c_i \qquad (i = 1 \ldots \nu)$$

ein ν-gliedriges Involutionssystem vom Typus β) oder γ). Nach Art. 352 dürfen wir dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dafs sich die Gleichungen (47) in der Form:

$$(48) \qquad x_1 = \varphi_1(x_{\varrho+1} \ldots x_m); \ \ldots \ x_\varrho = \varphi_\varrho(x_{\varrho+1} \ldots x_m)$$

$$(48\text{a}) \ p_{\varrho+h} = \varphi_{\varrho+h}(x_{\varrho+1} \ldots x_m, p_1 \ldots p_\varrho, p_{\nu+1} \ldots p_m) \ (h = 1, 2, \ldots \nu - \varrho)$$

auflösen lassen. Dabei ist ϱ irgend eine Zahl der Reihe $0, 1, \ldots \nu$; im Falle $\varrho = 0$ kommen die ersten ϱ dieser Gleichungen in Wegfall, und das vorgelegte Involutionssystem (47) ist nach $p_1 \ldots p_\nu$ auflösbar; im Falle $\varrho = \nu$ enthalten die Gleichungen (47) keine der Variabeln $p_1 \ldots p_m$, und ihre Integration ist trivial (Art. 301). Ist aber $1 \leqq \varrho \leqq \nu - 1$, so führen wir mittels der nachstehenden homogenen Berührungstransformation der $2m$ Variabeln $x_i p_i$:

$$x_1' = x_1 - \varphi_1; \ \ldots \ x_\varrho' = x_\varrho - \varphi_\varrho; \ x_{\varrho+1}' = x_{\varrho+1}; \ \ldots \ x_m' = x_m;$$

$$p_1' = p_1; \ \ldots p_\varrho' = p_\varrho; \ p_{\varrho+h}' = p_{\varrho+h} + \sum_1^\varrho{}_s \, p_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_{\varrho+h}} \qquad (h = 1 \ldots m - \varrho)$$

statt der $x_i p_i$ die $x_i' p_i'$ in die Gleichungen (48) (48a) ein, wodurch diese die folgende Form annehmen:

$$(49) \qquad x_1' = 0, \ \ldots \ x_\varrho' = 0,$$

$$(50) \quad p_{\varrho+h}' = \psi_{\varrho+h}(x_{\varrho+1}' \ldots x_m', p_1' \ldots p_\varrho', p_{\nu+1}' \ldots p_m') \quad (h = 1, 2, \ldots \nu - \varrho).$$

Nun verwandelt sich bei einer homogenen Berührungstransformation jedes Involutionssystem wieder in ein solches; d. h. man hat identisch:

$$\left.\begin{array}{ll}(51) & (x_i', p_{\varrho+h}' - \psi_{\varrho+h}) \equiv 0 \\ (52) & (p_{\varrho+h}' - \psi_{\varrho+h}, p_{\varrho+k}' - \psi_{\varrho+k}) \equiv 0\end{array}\right\} (i = 1, .. \varrho; k, h = 1, .. \nu - \varrho),$$

und zwar gelten diese Beziehungen nicht nur vermöge des Gleichungensystems (49) (50), sondern überhaupt identisch, da ihre linken Seiten die Variabeln $x_1' .. x_\varrho' p_{\varrho+1}' .. p_\nu'$ nicht enthalten. Die Relationen (51) schreiben sich aber so:

$$\frac{\partial \psi_{\varrho+h}}{\partial p_i'} \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, .. \varrho;\ h = 1, 2, .. \nu - \varrho),$$

d. h. die Gleichungen (50) erhalten vermöge (49) die Form:

$$(53) \quad p_{\varrho+h}' = \psi_{\varrho+h}(x_{\varrho+1}' .. x_m', p_{\nu+1}', p_{\nu+2}', .. p_m') \quad (h = 1, .. \nu - \varrho).$$

Die Integration des vorgelegten Involutionssystems (47) kommt nun im Falle β) darauf hinaus, alle $m+1$-gliedrigen Gleichungensysteme in $z, x_1' .. x_m' p_1' .. p_m'$ zu bestimmen, welche die Relationen (49) und (50) umfassen, und die Pfaff'sche Gleichung:

$$dz - p_1' dx_1' - \cdots - p_m' dx_m' = 0$$

erfüllen, oder, was dasselbe besagt, alle $m - \varrho + 1$-gliedrigen Gleichungensysteme in den Variabeln:

$$z, x_{\varrho+1}' .. x_m', p_{\varrho+1}' .. p_m'$$

aufzusuchen, welche die Gleichungen (53) umfassen und die Pfaff'sche Gleichung:

$$dz - p_{\varrho+1}' dx_{\varrho+1}' - \cdots - p_m' dx_m' = 0$$

befriedigen. Darnach ist das Integrationsproblem (47) auf das Gleichungensystem (53) zurückgeführt, und das letztere stellt mit Rücksicht auf die Beziehungen (52) ein $\nu - \varrho$-gliedriges Involutionssystem mit nur $m - \varrho$ Independenten $x_{\varrho+1}' .. x_m'$ dar.

Ebenso verlangt im Falle γ) die Integration des gegebenen Involutionssystems (47), wenn die zweite Definition des Integralbegriffs (Art. 302) gewählt wird, die Aufsuchung aller $m - \nu$-gliedrigen Gleichungensysteme, welche die Relationen (53) umfassen und der Pfaff'schen Gleichung:

$$p_{\varrho+1}' dx_{\varrho+1}' + \cdots + p_m' dx_m' = 0$$

genügen; diese Integration kommt also wiederum auf diejenige der Gleichungen (53) hinaus, die jetzt offenbar ein $\nu - \varrho$-gliedriges *homogenes* Involutionssystem bilden.

Hat man solcherweise im Falle β) alle Integral-M_m, im Falle γ) alle Integral-M_{m-1} des Involutionssystems (49) (50) gefunden, so erhält man daraus mittels der obigen Berührungstransformation alle Integrale des ursprünglichen Involutionssystems (47).

Indem wir die Resultate dieser und der vorigen Nummer zusammenfassen und Art. 351 berücksichtigen, können wir schliefslich den Satz aussprechen:

„*Die Aufsuchung aller etwa vorhandenen gemeinsamen Integrale beliebig vorgegebener partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung mit einer Unbekannten z und n unabhängigen Veränderlichen läfst sich entweder durch blofse Differentiationen und Eliminationen erledigen, oder erfordert aufserdem noch die Integration eines gewissen Involutionssystems der Form:*

$$p_\iota = \psi_\iota(x_1 x_2 \,..\, x_m, p_{\nu+1} \,..\, p_m) \qquad (i = 1, 2, \,..\, \nu;\ \nu \leqq m;\ m \leqq n+1)."$$

§ 3. Die Hamilton-Jacobi'sche Theorie.

380. Die sogenannte Hamilton-Jacobi'sche Theorie der dynamischen Differentialgleichungen beruht auf einer Reihe analytischer Thatsachen, die mit den Ergebnissen dieses und des vorigen Kapitels im engsten Zusammenhang stehen.

Wir stellen folgenden Doppelsatz an die Spitze:

Es sei ein kanonisches System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{d q_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\iota};\quad \frac{d p_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\iota} \qquad (i = 1, 2, \,..\, m) \tag{1}$$

gegeben, worin $q_1 q_2, \,..\, q_m, p_1 p_2 \,..\, p_m$ *die unbekannten Funktionen,* t *die unabhängige Variable, ferner:*

$$H(t, q_1, q_2, \,..\, q_m, p_1, p_2 \,..\, p_m) \tag{2}$$

eine beliebige Funktion der $2m+1$ *Veränderlichen:*

$$t, q_1, q_2, \,..\, q_m, p_1, p_2, \,..\, p_m \tag{3}$$

bedeutet. Ist dann:

$$z = \psi(q_1, q_2, \,..\, q_m, c_1, c_2, \,..\, c_m) + c \tag{4}$$

ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2 \,\cdots\, q_m, \frac{\partial z}{\partial q_1}, \frac{\partial z}{\partial q_2}, \,\cdots\, \frac{\partial z}{\partial q_m}\right) = 0, \tag{5}$$

so erhält man die allgemeinen Integralgleichungen des kanonischen Systems (1), *indem man die* $2m$ *Relationen:*

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_i} = p_i;\quad \frac{\partial \psi}{\partial c_i} = c_i' \qquad (i = 1, 2, \,..\, m), \tag{6}$$

nach den $2m$ *arbiträren Konstanten* $c_1, \,..\, c_m, c_1' \,..\, c_m'$ *auflöst.*

Umgekehrt, sind die allgemeinen Integralgleichungen des kanonischen Systems bekannt, so kennt man auch diejenigen Integralfunktionen:

$$(7)\qquad q_i = \varkappa_i(t, q_1^0 \,..\, q_m^0, p_1^0 \,..\, p_m^0) \qquad (i = 1, 2, .. m).$$

$$(8)\qquad p_i = \pi_i(t, q_1^0 \,..\, q_m^0, p_1^0 \,..\, p_m^0) \qquad (i = 1, 2, .. m)$$

die sich vermöge $t = \tau$ bezw. auf die vorgeschriebenen Konstanten q_i^0 und p_i^0 reduziren; dann wird ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung (5) *folgendermaßen erhalten:*

Man substituire in dem Ausdruck:

$$(9)\qquad p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial H}{\partial p_m} - H$$

für die q_i, p_i bezw. ihre Werte (7) (8), *wodurch derselbe die Form:*

$$v(t, q_1^0 \,..\, q_m^0, p_1^0 \,..\, p_m^0)$$

annehmen möge. Dann bilde man das Integral:

$$V(t, q_1^0 \,..\, q_m^0, p_1^0 \,..\, p_m^0) \equiv \int_\tau^t v(t, q_1^0 \,..\, p_m^0)\, dt$$

und ersetze nach Ausführung dieser Quadratur die Größen $p_1^0 \,..\, p_m^0$ durch ihre aus den Gleichungen (7) *folgenden Ausdrücke in den Variabeln:*

$$(10)\qquad t, q_1 \,..\, q_m, q_1^0 \,..\, q_m^0;$$

bezeichnet man das Resultat dieser Substitution mit

$$\Omega(t, q_1 \,..\, q_m, q_1^0 \,..\, q_m^0),$$

so ist die Gleichung:

$$(11)\qquad z = \Omega(t, q_1 \,..\, q_m, q_1^0 \,..\, q_m^0) + c$$

ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung (5) *mit den arbiträren Konstanten $q_1^0 \,..\, q_m^0$, c.*

381. Der erste Teil des Satzes ist eine unmittelbare Folge von Kap. XII § 2; um den zweiten Teil zu beweisen, wollen wir zunächst die funktionentheoretische Bedeutung des darin genannten Eliminationsprozesses näher erläutern. Zu diesem Zwecke verstehen wir unter:

$$(12)\qquad \tau, \bar{q}_1 \,..\, \bar{q}_m, \bar{p}_1 \,..\, \bar{p}_m$$

eine Stelle, an der die Funktion H regulär ist. Dann besitzt die lineare homogene partielle Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$(13)\qquad \frac{\partial f}{\partial t} + (H, f) = 0\ ^{1)},$$

ein System von $2m$ Hauptintegralen:

$$K_i(t, q_1 \,..\, q_m, p_1 \,..\, p_m);\ \Pi_i(t, q_1 \,..\, q_m, p_1 \,..\, p_m) \qquad (i = 1, 2, .. m),$$

die an der Stelle (12) regulär sind und sich vermöge $t = \tau$ bezw. auf q_i und p_i reduziren. Ist dann:

$$(14)\qquad \tau, q_1^0, \,..\, q_m^0, p_1^0 \,..\, p_m^0$$

eine beliebige, in der Umgebung von (12) gelegene Stelle, an der die Funktionen H, K_i, Π_i ebenfalls regulär sind, so lassen sich die $2m$ Relationen:

$$(15)\qquad q_i^0 = K_i;\ p_i^0 = \Pi_i \qquad (i = 1, 2, .. m)$$

in der Form (7) (8) auflösen, und zwar sind die rechten Seiten dieser Gleichungen gewöhnliche Potenzreihen der $2m + 1$ Gröfsen:

$$(16)\qquad t - \tau,\ q_i^0 - \bar{q}_i;\ p_i^0 - \bar{p}_i \qquad (i = 1, 2, .. m);$$

sie ergeben sich durch eine einfache Variabelnänderung (Art. 48) bezw. aus den Potenzreihen K_i und Π_i und reduziren sich vermöge $t = \tau$ bezw. auf q_i^0 und p_i^0.

Die im obigen Satze mit v und V bezeichneten Funktionen sind nun nach Art. 38 offenbar ebenfalls gewöhnliche Potenzreihen der $2m + 1$ Gröfsen (16), da ja die Funktion (9) an der Stelle (12) regulär ist.

Es sei nun:

$$(17)\qquad \tau', \bar{\bar{q}}_1 \,..\, \bar{\bar{q}}_m, \bar{\bar{p}}_1 \,..\, \bar{\bar{p}}_m$$

irgend eine andere, in der Umgebung von (12) gelegene Stelle, an der die Funktionen H, K_i, Π_i sämtlich regulär sind, *und an welcher keine der beiden Funktionaldeterminanten:*

$$(18)\qquad \begin{pmatrix} K_1 K_2 \,..\, K_m \\ p_1\ p_2 \,..\, p_m \end{pmatrix}$$

$$(19)\qquad \begin{pmatrix} K_1 K_2 \,..\, K_m \Pi_1 \Pi_2 \,..\, \Pi_m \\ q_1\ q_2 \,..\, q_m\ p_1\ p_2 \,..\, p_m \end{pmatrix}$$

verschwindet; die Existenz einer solchen Stelle werden wir sogleich

1) Das Symbol $(\varphi\psi)$ hat in diesem § immer die Bedeutung:

$$\sum_1^m {}_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial \psi}{\partial q_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \frac{\partial \psi}{\partial p_s} \right).$$

nachweisen. Ferner seien α_i bezw. β_i die konstanten Werte, welche die Funktionen K_i bezw. Π_i an dieser Stelle annehmen. Da nun die rechten Seiten der Gleichungen (15) sich als gewöhnliche Potenzreihen der $2m+1$ Gröfsen:

$$(20)\qquad t-\tau',\ q_i-\bar{\bar{q}}_i,\ p_i-\bar{p}_i \qquad (i=1,2,\ldots m)$$

darstellen lassen, und die Determinante (19) an der Stelle (17) von Null verschieden ist, so kann man (nach Art. 39) die Relationen (15) in der Form (7) (8) auflösen, und die rechten Seiten dieser Gleichungen werden gewöhnliche Potenzreihen der $2m+1$ Gröfsen:

$$(21)\qquad t-\tau',\ q_i^0-\alpha_i,\ p_i^0-\beta_i \qquad (i=1,2,\ldots m),$$

m. a. W.: die Funktionen $\varkappa_i$ und π_i sind, als Funktionen der $2m+1$ Variabeln t, q_i^0, p_i^0 betrachtet, an der Stelle:

$$\tau',\ \alpha_1\ldots\alpha_m,\ \beta_1\ldots\beta_m$$

regulär, und reduziren sich daselbst offenbar bezw. auf $\bar{q}_i$, $\bar{\bar{p}}_i$. Aus Art. 38 folgt jetzt, dafs auch die Funktionen v und V des vorigen Artikels gewöhnliche Potenzreihen der Gröfsen (21) sind. Insbesondere hat V die Form:

$$(22)\qquad V\equiv\mathfrak{P}(t-\tau',\ q_1^0-\alpha_1\ldots q_m^0-\alpha_m,\ p_1^0-\beta_1\ldots p_m^0-\beta_m).$$

Da ferner der Annahme nach die Determinante (18) an der Stelle (17) nicht null ist, so lassen sich die Gleichungen:

$$q_i^0=K_i(t,q_1\ldots q_m,p_1\ldots p_m)\qquad (i=1,2,\ldots m)$$

folgendermafsen auflösen:

$$(23)\qquad p_i=\mathfrak{P}_i(t-\tau',\ q_1-\bar{\bar{q}}_1,\ \ldots q_m-\bar{\bar{q}}_m,\ q_1^0-\alpha_1,\ \ldots q_m^0-\alpha_m)$$
$$(i=1,2,\ldots m),$$

und die Potenzreihen $\mathfrak{P}_i$ reduziren sich vermöge der Substitution:

$$(24)\qquad t=\tau',\ q_i=\bar{\bar{q}}_i,\ q_i^0=\alpha_i\qquad (i=1,2,\ldots m)$$

bezw. auf die Konstanten $\bar{p}_i$.

Nun sind aber die Funktionen Π_i gewöhnliche Potenzreihen der Gröfsen (20); ersetzen wir darin die Differenzen $p_i-\bar{\bar{p}}_i$ durch ihre aus (23) folgenden Werte, so erhält man Formeln folgender Gestalt:

$$(25)\qquad p_i^0=\mathfrak{p}_i(t-\tau',\ q_1-\bar{\bar{q}}_1\ldots q_m-\bar{q}_m,\ q_1^0-\alpha_i\ldots q_m^0-\alpha_m),$$

worin die $\mathfrak{p}_i$ Potenzreihen der eingeklammerten Gröfsen bedeuten und sich vermöge (24) auf β_i resp. reduziren. Indem man endlich in (22) die Differenzen $p_i^0-\beta_i$ durch ihre aus (25) folgenden Werte ersetzt, verwandelt sich V in *eine Funktion Ω der $2m+1$ Variabeln* (10), *die an der Stelle:*

$$\tau,' \bar{\bar{q}}_1, \bar{\bar{q}}_2 \ldots \bar{\bar{q}}_m, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m$$

regulär ist.

382. Es erübrigt jetzt nur noch zu zeigen, dafs in der Umgebung der Stelle (12) immer eine andere Stelle (17) existirt, an der alle Funktionen H, K_ι, Π_i regulär sind und die Determinanten (18) (19) nicht verschwinden. Die zweite dieser Determinanten verschwindet nicht identisch, da sie an der Stelle $t = \tau$ den Wert 1 besitzt. Nach Art. 38 bleibt also nur noch nachzuweisen, dafs die Determinante (18) nicht identisch null ist. Nun besitzen die Funktionen K_i folgende Form:

$$K_i = q_i + (t - \tau)\, \mathfrak{Q}_\iota(t - \tau, q_1 - \bar{q}_1, \ldots p_m - \bar{p}_m),$$

und man hat infolge dessen:

$$\frac{\partial K_i}{\partial p_k} \equiv (t - \tau) \frac{\partial \mathfrak{Q}_i}{\partial p_k}.$$

Es ist also zu zeigen, dafs die m-reihige Determinante:

$$\left| \frac{\partial \mathfrak{Q}_i}{\partial p_k} \right| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots m) \tag{26}$$

nicht identisch verschwindet. Bezeichnen wir nun allgemein mit $\{f\}$ den Wert der Funktion $f(t, q_1 \ldots p_m)$ an der Stelle (12), so hat man:

$$\left\{ \frac{\partial \mathfrak{Q}_\iota}{\partial p_k} \right\} = \left\{ \frac{\partial^2 K_i}{\partial p_k \partial t} \right\},$$

ferner bestehen die Identitäten:

$$\frac{\partial K_i}{\partial t} + (H, K_i) \equiv 0,$$

und mithin:

$$\frac{\partial^2 K_i}{\partial p_k \partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}, K_i \right) + \left(H, \frac{\partial K_i}{\partial p_k} \right) \equiv 0. \tag{27}$$

Aus der Definition der Hauptintegrale K_i folgt aber:

$$\left\{ \frac{\partial K_i}{\partial p_k} \right\} = 0, \quad \left\{ \frac{\partial K_i}{\partial q_k} \right\} = 0, \quad \left\{ \frac{\partial K_i}{\partial q_i} \right\} = 1,$$

also ergiebt sich aus (27):

$$\left\{ \frac{\partial^2 K_i}{\partial p_k \partial t} \right\} = - \sum_1^m{}_s \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_s} \right\} \left\{ \frac{\partial K_i}{\partial q_s} \right\} = - \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} \right\}.$$

Also wird die m-reihige Determinante (26) an der Stelle (12) der folgenden Determinante gleich:

$$(-1)^m \left| \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} \right\} \right| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots m).$$

Wenn also die nach $p_1 \ldots p_m$ genommene Hesse'sche Determinante:

$$(28) \qquad \left| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} \right| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots m)$$

der Funktion H nicht identisch null ist, und die Stelle (12) von vorneherein so gewählt wird, dafs die Determinante (28) daselbst nicht verschwindet, so ist die Determinante (18) nicht identisch null, und es existirt dann stets auch eine Stelle:

$$\tau', \bar{\bar{q}}_1 \ldots \bar{\bar{q}}_m \bar{\bar{p}}_1 \ldots \bar{\bar{p}}_m,$$

an der alle Funktionen H, K_i, Π_i regulär sind, und die beiden Funktionaldeterminanten (18) (19) nicht verschwinden (Art. 38). Unter der gemachten Voraussetzung kann man also die Gleichungen (15), oder auch, was dasselbe besagt, die Gleichungen (7) (8) nach den $2m$ Gröfsen $p_1 \ldots p_m$, $p_1^0 \ldots p_m^0$ auflösen, und die erhaltenen Ausdrücke in die Funktion V substituiren.

Bei den sogleich zu besprechenden Problemen der Variationsrechnung und der Dynamik kommen in der That nur solche Funktionen H in Betracht, deren Hesse'sche Determinante (28) nicht identisch null ist. Es sei noch hervorgehoben, dafs durch die Bedingung, die wir solcherweise der Funktion H auferlegen, auch der Fall, dafs H in den p_i homogen erster Ordnung ist, also die Funktionen v und V *identisch* verschwinden, von vorneherein ausgeschlossen wird. In diesem Falle wären nämlich die Ableitungen $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ in den p_i homogen nullter Ordnung, also beständen die Identitäten:

$$\sum_1^m {}_s\, p_s \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_s} \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m),$$

und es verschwände somit die Determinante (28).

383. Wir müssen jetzt, um den Beweis der in Art. 380 aufgestellten Behauptungen zu Ende zu führen, noch den Nachweis erbringen, dafs die Gleichung (11) ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung (5) definirt, wenn Ω die in Art. 380 erwähnte Funktion bedeutet. Wir betrachten die homogene lineare partielle Differentialgleichung:

$$(29) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + (H, f) + \left(\sum p_s \frac{\partial H}{\partial p_s} - H\right) \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

mit den $2m + 2$ Independenten:

$$(30) \qquad z, t, q_1 \,..\, q_m, p_1 \,..\, p_m.$$

Die Hauptintegrale hinsichtlich $t = \tau$ dieser Gleichung sind nach Art. 308 die folgenden:

$$z - V(t, K_1 \,..\, K_m, \Pi_1 \,..\, \Pi_m); \; K_1 \,..\, K_m, \Pi_1 \,..\, \Pi_m,$$

mithin besteht die Identität:

$$dz + H dt - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m \equiv d(z - V) - \Pi_1 dK_1 - \cdots - \Pi_m dK_m,$$

worin die Differentiale auf der rechten Seite sich auf alle $2m + 2$ Variabeln (30) beziehen. Die Gleichungen:

$$(31) \quad z = V(t, K_1 \,..\, K_m, \Pi_1 \,..\, \Pi_m) + c; \; K_1 = q_1^0 \,..\, K_m = q_m^0$$

definiren also ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung (5), wenn man unter den p_i die Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial q_i}$ versteht, und unsere Behauptung ist erwiesen, da ja die Relation (11) durch Elimination der p_i aus den Gleichungen (31) entsteht.

Wie aus Art. 382 ersichtlich ist, besteht die eigentümliche Schwierigkeit dieses Eliminationsverfahrens darin, dafs die Funktionaldeterminante (18) gerade an der Stelle (12), die der Definition der Hauptintegrale K_i, Π_i zu Grunde liegt, und überhaupt an jeder Stelle, für die $t = \tau$ ist, verschwindet (vgl. die Bemerkungen über Integralconoide in Art. 317 und 331).

Diese Schwierigkeit kann man leicht dadurch umgehen, dafs man die p_i aus den Relationen:

$$z = V(t, K_1 \,..\, K_m, \Pi_1 \,..\, \Pi_m) + \sum_1^m K_s \Pi_s + c$$

$$\Pi_1 = p_1^0, \; .. \; \Pi_m = p_m^0$$

eliminirt (Art. 313); das so erhaltene vollständige Integral:

$$z = \Omega'(t, q_1 \,..\, q_m, p_1^0 \,..\, p_m^0) + c,$$

besitzt jedoch für die Probleme der Dynamik nicht dieselbe einfache Bedeutung wie das Integral (11).

384. Die bisherigen Entwickelungen dieses § stehen in naher Beziehung zu dem folgenden Problem der Variationsrechnung:

Man soll m Funktionen $q_1 q_2 \ldots q_m$ der unabhängigen Variabeln t so bestimmen, dafs die Variation des Integrals:

$$S \equiv \int_\tau^t \Phi(t, q_1 \ldots q_m, q_1' \ldots q_m')\,dt$$

verschwindet, wenn die Variationen δt, δq_ι an den beiden Integrationsgrenzen gleich Null angenommen werden. Dabei ist:

$$q_\iota' \equiv \frac{dq_\iota}{dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

gesetzt, und von der Funktion Φ wird nur vorausgesetzt, dafs ihre nach $q_1' \ldots q_m'$ genommene Hesse'sche Determinante:

$$(32) \qquad \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_\iota' \partial q_k'} \right| \qquad (i; k = 1, 2, \ldots m)$$

nicht identisch null ist.

Für die Variation δS findet man:

$$\delta S = \int_\tau^t \Phi d(\delta t) + \int_\tau^t \delta \Phi dt = [\Phi \delta t]_\tau^t - \int_\tau^t \frac{d\Phi}{dt} \delta t dt + \int_\tau^t \sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_s} \delta q_s dt$$

$$+ \int_\tau^t \sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_s'} \delta q_s' dt + \int_\tau^t \frac{\partial \Phi}{\partial t} \delta t dt$$

$$= [\Phi \delta t]_\tau^t - \int_\tau^t \sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_s} q_s' \delta t dt - \int_\tau^t \sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_s'} \frac{dq_s'}{dt} \delta t dt - \int_\tau^t \frac{\partial \Phi}{\partial t} \delta t dt$$

$$+ \int_\tau^t \sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_s} \delta q_s dt + \int_\tau^t \sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_s'} \delta q_s' dt + \int_\tau^t \frac{\partial \Phi}{\partial t} \delta t dt.$$

Nun hat man aber durch partielle Integration:

$$\int_\tau^t \frac{\partial \Phi}{\partial q_s'} \frac{dq_s'}{dt} \delta t dt = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial q_s'} q_s' \delta t\right]_\tau^t - \int_\tau^t \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i'} \cdot q_s' \delta t dt,$$

ferner:

$$\int_\tau^t \frac{\partial \Phi}{\partial q_s'} \delta q_s' dt = \int_\tau^t \frac{\partial \Phi}{\partial q_s'} \frac{d}{dt} \delta q_s \cdot dt = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial q_s'} \delta q_s\right]_\tau^t - \int_\tau^t \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial q_s'} \delta q_s dt,$$

und man erhält sonach:

$$(33) \qquad \delta S \equiv [\Phi\,\delta t]_\tau^t + \int_\tau^t \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial q_s'}\right)(\delta q_s - q_s'\,\delta t)\,dt$$
$$+ \left[\sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_s'}(\delta q_s - q_s'\,\delta t)\right]_\tau^t.$$

Da nun die Variationen δt, δq_s an den Integrationsgrenzen verschwinden sollen, so erhält man als notwendige und hinreichende Bedingungen für das identische Verschwinden der Variation δS die folgenden:

$$(34) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial q_s'} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_s} = 0 \qquad (s = 1, 2, .. m),$$

oder etwas ausführlicher geschrieben:

$$\sum_1^m{}_k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i'\,\partial q_k'}\,\frac{d^2 q_k}{dt^2} + \sum_1^m{}_k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i'\,\partial q_k}\,q_k' + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i'\,\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, .. m).$$

Es sind dies m gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich nach den Ableitungen:

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2}, \frac{d^2 q_2}{dt^2} \cdot\cdot \frac{d^2 q_m}{dt^2}$$

auflösen lassen.

385. Es sei nun:

$$\tau, \bar{q}_1, \bar{q}_2 \cdot\cdot \bar{q}_m, \bar{q}_1', \bar{q}_2' \cdot\cdot \bar{q}_m'$$

eine Stelle, an der Φ regulär ist, und die Determinante (32) nicht verschwindet; ferner mögen die Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial q_i'}$ an dieser Stelle bezw. die Werte $\bar{p}_i$ annehmen. Dann lassen sich die Gleichungen:

$$(35) \qquad p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i'} \qquad (i = 1, 2, .. m)$$

folgendermaſsen auflösen:

$$(36) \qquad q_i' = \mathfrak{Q}_i(t - \tau, q_1 - \bar{q}_1 \cdot\cdot q_m - \bar{q}_m, p_1 - \bar{p}_1 \cdot\cdot p_m - \bar{p}_m)$$
$$(i = 1, 2, .. m),$$

und die Potenzreihen $\mathfrak{Q}_i$ reduziren sich vermöge $t = \tau$, $q_i = \bar{q}_i$, $p_i = \bar{p}_i$, bezw. auf die Konstanten $\bar{q}_i'$.

Wir bilden jetzt den Ausdruck:

$$(37) \qquad p_1 q_1' + p_2 q_2' + \cdot\cdot p_m q_m' - \Phi,$$

und substituiren hierin für die $q_i' - \bar{q}_i$ ihre aus (36) folgenden Werte. Dadurch erhalten wir eine Funktion:

$$H(t, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m),$$

die an der Stelle:

(38) $$\tau, \bar{q}_1 \ldots \bar{q}_m, \bar{p}_1 \ldots \bar{p}_m$$

regulär ist; sie wird die „reziproke Funktion“ von Φ genannt.

Ist f irgend eine Funktion der $2m+1$ Variabeln t, q_i, q_i', so bezeichnen wir mit $\{f\}$ die Funktion, die aus ihr entsteht, wenn man die q_i' durch ihre Werte (36) ersetzt. Dann findet man:

(39) $$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \displaystyle\sum_1^m p_s \frac{\partial \mathfrak{Q}_s}{\partial p_i} + \mathfrak{Q}_i - \sum \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial q_s'}\right\} \frac{\partial \mathfrak{Q}_s}{\partial p_i} = \mathfrak{Q}_i \\ \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = \displaystyle\sum_1^m p_s \frac{\partial \mathfrak{Q}_s}{\partial q_i} - \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\right\} - \sum \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial q_s'}\right\} \frac{\partial \mathfrak{Q}_s}{\partial q_i} = - \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\right\} \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} = \dfrac{\partial \mathfrak{Q}_i}{\partial p_k}. \end{cases}$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt, dafs die Determinante:

(28) $$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} \right| \qquad (i, k = 1 \ldots m)$$

an der Stelle (38) nicht null ist. Man hat ferner:

$$\frac{dq_i}{dt} = q_i' = \mathfrak{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

und die Gleichungen (34) nehmen vermöge der Variabelntransformation (35) folgende Form an:

$$\frac{dp_i}{dt} = \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\right\} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Wir erhalten solcherweise das *kanonische System:*

(40) $$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Es sei jetzt:

(41) $$\tau, q_1^0 \ldots q_m^0, q_1'^0 \ldots q_m'^0$$

eine in der Umgebung von $\tau, \bar{q}_i, \bar{q}_i'$ gelegene Stelle, an der Φ regulär und die Determinante (32) nicht null ist. Ferner setzen wir:

(42) $$p_i^0 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i'}\right)_0 \quad (i = 1 \ldots m).$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen entstehen aus den rechten Seiten von (35), indem man darin t, q_i, q_i' bezw. durch $\tau, q_i^0, q_i'^0$ ersetzt, sind also gewöhnliche Potenzreihen der $2m+1$ Gröfsen:

$$t-\tau,\ q_\iota^0-\bar{q}_\iota;\ q_\iota'^0-\bar{q}_\iota'.$$

Ferner ist H an der Stelle:

$$\tau,\ q_1^0\ldots q_m^0,\ p_1^0\ldots p_m^0 \tag{43}$$

regulär, und die Determinante (28) verschwindet daselbst nicht. Aus der Entstehung des kanonischen Systems (40) folgt jetzt ohne weiteres die analytische Thatsache:

Definiren die $2m$ *Gleichungen:*

$$q_\iota=\varkappa_\iota(t,q_1^0\ldots q_m^0,p_1^0\ldots p_m^0)\qquad (i=1,2,\ldots m) \tag{44}$$

$$p_\iota=\pi_i(t,q_1^0\ldots q_m^0,p_1^0\ldots p_m^0)\qquad (i=1,2,\ldots m) \tag{45}$$

diejenigen Integralfunktionen des kanonischen Systems (40), *die sich vermöge* $t=\tau$ *bezw. auf* q_i^0 *und* p_i^0 *reduziren, so liefern die Gleichungen:*

$$q_\iota=\varkappa_\iota\left(t,q_1^0\ldots q_m^0,\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_1'}\right)_0\cdots\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_m'}\right)_0\right)\qquad (i=1,2,\ldots m)$$

die Integralfunktionen des simultanen Systems (34) *von der Eigenschaft, dafs vermöge* $t=\tau$ *die Funktion* q_ι *in die Konstante* q_i^0 *und* q_i' *in* $q_i'^0$ *übergeht. Umgekehrt, stellen die Gleichungen:*

$$q_i=k_i(t,q_1^0\ldots q_m^0,\ q_1'^0\ldots q_m'^0)\qquad (i=1,2,\ldots m)$$

die eben genannten Integralfunktionen des simultanen Systems (34) *dar, so definiren die Relationen:*

$$q_\iota=k_i(t,q_1^0\ldots q_m^0,(\mathfrak{Q}_1)_0,\ldots(\mathfrak{Q}_m)_0)\qquad (i=1\ldots m)$$

$$p_\iota=\frac{\partial\Phi}{\partial q_1'}\qquad (i=1,2,\ldots m) \tag{46}$$

die vorhin erwähnten Integralfunktionen des kanonischen Systems (40), *wenn man auf den rechten Seiten der Gleichungen* (46) *die* q_i' *durch ihre Ausdrücke:*

$$\frac{\partial k_i}{\partial t}$$

ersetzt.

Die Integration des simultanen Systems (34) kommt somit auf diejenige des kanonischen Systems (40) hinaus, und umgekehrt.

386. Vermöge der Formeln (39) hat man:

$$\Phi\equiv p_1\frac{\partial H}{\partial p_1}+\cdots+p_m\frac{\partial H}{\partial p_m}-H;$$

also kann das oben mit S bezeichnete Integral so geschrieben werden:

$$S \equiv \int_\tau^t \left(p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + \cdots + p_m \frac{\partial H}{\partial p_m} - H \right) dt.$$

Wir denken uns in der Funktion unter dem Integralzeichen die p_i, q_i durch ihre Ausdrücke (44) (45) ersetzt, sodann die Integration zwischen den Grenzen τ und t ausgeführt und die so erhaltene Funktion wie früher mit:

$$V(t, q_1^0 \, . \, . \, q_m^0, p_1^0 \, . \, . \, p_m^0)$$

bezeichnet. Um die Variation δV nach der Formel (33) zu berechnen, bezeichnen wir die Variationen von t, q_i^0, p_i^0 an der untern Integrationsgrenze mit $\delta \tau$, δq_i^0, δp_i^0 und beachten, dafs der in (33) unter dem Integralzeichen stehende Teil der Variation δV identisch verschwindet, da ja die $\varkappa_i$, π_i Integralfunktionen des kanonischen Systems (40) sind, und die linken Seiten der Gleichungen (34) vermöge (35) mit den Ausdrücken $\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i}$ übereinstimmen. Man findet sonach, mit Rücksicht auf (35) (37) (44) (45):

$$\delta V \equiv \frac{\partial V}{\partial \tau} \delta \tau + \frac{\partial V}{\partial t} \delta t + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i^0} \delta q_i^0 + \frac{\partial V}{\partial p_i^0} \delta p_i^0$$

$$\equiv H(\tau, q_1^0 \, . \, . \, q_m^0, p_1^0 \, . \, . \, p_m^0) \, \delta \tau - H(t, \varkappa_1 \, . \, . \, \varkappa_m, \pi_1 \, . \, . \, \pi_m) \, dt \tag{47}$$

$$+ \sum_1^m \pi_i \, \delta \varkappa_i - \sum_1^m p_i^0 \, \delta q_i^0.$$

Es ist dies eine Identität, die für jedes beliebige Wertsystem der $2m + 2$ Variabeln:

$$\tau, t, q_1^0 \, . \, . \, q_m^0, p_1^0 \, . \, . \, p_m^0$$

und ihrer Differentiale stattfindet, wenn

$$\delta \varkappa_i \equiv \frac{\partial \varkappa_i}{\partial \tau} \delta \tau + \frac{\partial \varkappa_i}{\partial t} \delta t + \sum \frac{\partial \varkappa_i}{\partial q_s^0} \delta q_s^0 + \sum \frac{\partial \varkappa_i}{\partial p_s^0} \delta p_s^0$$

gesetzt wird.

Identifiziren wir jetzt unsere Funktion H mit dem in Art. 380 ebenso bezeichneten Ausdruck, und verstehen wir unter K_i, Π_i wie früher die Hauptintegrale der linearen partiellen Differentialgleichung (13) hinsichtlich $t = \tau$, so lassen sich die Relationen (15), oder auch, was dasselbe besagt, die Relationen (44) (45) folgendermafsen auflösen:

$$p_i^0 = \omega_i(t, q_1 \, . \, . \, q_m, q_1^0 \, . \, . \, q_m^0) \qquad (i = 1 \, . \, . \, m) \tag{48}$$

$$p_i = \varpi_i(t, q_1 \, . \, . \, q_m, q_1^0 \, . \, . \, q_m^0) \qquad (i = 1 \, . \, . \, m) \tag{49}$$

und die so erhaltenen Ausdrücke für die p_i^0 in V substituiren, wodurch diese Funktion in:

$$\Omega(t, q_1 \,.\,.\, q_m, q_1^0 \,.\,.\, q_m^0)$$

übergehe (Art. 380). Offenbar entstehen die ϖ_i aus den π_i dadurch, daſs man darin die p_i^0 durch ihre Ausdrücke ω_i ersetzt.

Ersetzen wir nun auch in der Identität (47) die p_i^0 überall durch die ω_i und verstehen wir unter $\delta\omega_i$ den Ausdruck:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \tau}\delta\tau + \frac{\partial \omega_i}{\partial t}\delta t + \sum \frac{\partial \omega_i}{\partial q_s}\delta q_s + \sum \frac{\partial \omega_i}{\partial q_s^0}\delta q_s^0,$$

so erhalten wir das Resultat:

$$\begin{aligned}
&\sum \frac{\partial V}{\partial p_i^0}\delta\omega_i + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i^0}\delta q_i^0 + \frac{\partial V}{\partial \tau}\delta\tau + \frac{\partial V}{\partial t}\delta t \\
&\equiv \sum \frac{\partial \Omega}{\partial q_i}\delta q_i + \sum \frac{\partial \Omega}{\partial q_i^0}\delta q_i^0 + \frac{\partial \Omega}{\partial \tau}\delta\tau + \frac{\partial \Omega}{\partial t}\delta t \\
&\equiv H(\tau, q_1^0 \,.\,.\, q_m^0, \omega_1 \,.\,.\, \omega_m)\,\delta\tau - H(t, q_1 \,.\,.\, q_m, \varpi_1 \,.\,.\, \varpi_m)\,d \\
&\quad + \sum \varpi_i \delta q_i - \sum \omega_i \delta q_i^0,
\end{aligned}$$

also gelten die Identitäten:

$$\text{(50)} \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \equiv \varpi_i, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial q_i^0} \equiv -\omega_i;$$

$$\text{(51)} \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial t} \equiv -H(t, q_1 \,.\,.\, q_m, \varpi_1 \,.\,.\, \varpi_m)$$

$$\text{(52)} \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} \equiv H(\tau, q_1^0 \,.\,.\, q_m^0, \omega_1 \,.\,.\, \omega_m).$$

Diese Identitäten bestehen für jedes beliebige Wertsystem der $2m + 2$ Variabeln:

$$t, \tau, q_1 \,.\,.\, q_m, q_1^0 \,.\,.\, q_m^0.$$

Die Beziehungen (50) zeigen, daſs die Relationen:

$$\text{(53)} \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} = p_i; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial q_i^0} = -p_i^0 \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, m)$$

mit den Gleichungen (48) (49) identisch sind, *also die allgemeinen Integralgleichungen des kanonischen Systems* (40) *darstellen.*

Die Gleichungen (51) (52) können nunmehr so geschrieben werden:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} \equiv -H\left(t, q_1 \,.\,.\, q_m, \frac{\partial \Omega}{\partial q_1} \,.\,.\, \frac{\partial \Omega}{\partial q_m}\right),$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} \equiv H\left(\tau, q_1^0 \,.\,.\, q_m^0, -\frac{\partial \Omega}{\partial q_1^0} \,.\,.\, -\frac{\partial \Omega}{\partial q_m^0}\right),$$

sie zeigen also, dafs Ω, als Funktion der Variabeln $t, q_1 \dots q_m$ betrachtet, die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + H\left(t, q_1 \dots q_m, \frac{\partial z}{\partial q_1} \dots \frac{\partial z}{\partial q_m}\right) = 0, \tag{54}$$

und als Funktion von $\tau, q_1^0 \dots q_m^0$ betrachtet, die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} - H\left(\tau, q_1^0 \dots q_m^0, -\frac{\partial z}{\partial q_1^0} \dots -\frac{\partial z}{\partial q_m^0}\right) = 0$$

identisch befriedigt.

Wir wollen noch hervorheben, dafs wir die Funktionen $\varkappa_i, \pi_i$ im Obigen lediglich als Funktionen von t, q_i^0, p_i^0 definirt haben, während die Art und Weise, auf welche die Variable τ in diese Funktionen eingeht, streng genommen noch einer besondern Untersuchung bedarf. Analoges gilt natürlich hinsichtlich der Abhängigkeit der Funktion Ω von der Variabeln τ. Doch wollen wir diese Untersuchung, die übrigens keinerlei prinzipielle Schwierigkeit darbietet, der Kürze halber übergehen und nur hinzufügen, dafs in dem für die Mechanik besonders wichtigen Fall, wo H von t nicht abhängt, die Funktionen $\varkappa_i, \pi_i$ die Variable τ ausschliefslich in der Verbindung $t - \tau$ enthalten, und infolgedessen Ω als Funktion der Variabeln $\tau, q_1^0 \dots q_m^0$ ohne weiteres definirt ist.

Dafs die Funktion Ω die partielle Differentialgleichung (54) erfüllt, wurde schon in Art. 383 bewiesen. Ebenso wissen wir aus Art. 380, dafs die Relationen (53) die allgemeinen Integralgleichungen des kanonischen Systems (40) darstellen, wenn die q_i^0, p_i^0 als arbiträre Konstanten betrachtet werden; doch erkennen wir jetzt überdies, dafs diese Konstanten bezw. mit den Werten, welche die durch (53) definirten Funktionen q_i, p_i an der Stelle $t = \tau$ annehmen, identisch sind.

387. Um die vorstehenden Resultate auf die Probleme der Mechanik anzuwenden, verstehen wir unter t die Zeit und unter $q_1 \dots q_m$ sogenannte Lagrange'sche Koordinaten eines dynamischen Systems, d. h. unabhängige Variable, durch welche die Position des dynamischen Systems definirt wird. Nehmen wir, um die Ideen zu fixiren, an, dafs unser System aus ν materiellen Punkten mit den Massen $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_\nu$ und den cartesischen Koordinaten:

$$x_i, y_i, z_i \qquad (i = 1, 2, \dots \nu)$$

bestehe, und dafs diese 3ν Koordinaten an $3\nu - m$ Bedingungsgleichungen:

$$\varphi_i(x_1 y_1 z_1 x_2 \dots x_\nu y_\nu z_\nu t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots 3\nu - m) \tag{55}$$

gebunden seien, so kann man mittels dieser Gleichungen die Größen $x_\iota y_\iota z_\iota$ als Funktionen von m unabhängigen Variabeln $q_1 \ldots q_m$ und von t in der Form:

$$\left.\begin{aligned} x_\iota &= \xi_\iota(q_1 q_2 \ldots q_m t) \\ y_\iota &= \eta_\iota(q_1 q_2 \ldots q_m t) \\ z_\iota &= \zeta_\iota(q_1 q_2 \ldots q_m t) \end{aligned}\right\} \quad (\iota = 1, 2, \ldots \nu)$$

darstellen. Aus den Formeln:

$$\frac{dx_\iota}{dt} = x_\iota' = \frac{\partial \xi_\iota}{\partial t} + \sum \frac{\partial \xi_\iota}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} \text{ etc.}$$

ergiebt sich dann für die lebendige Kraft des dynamischen Systems:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^\nu m_\iota [(x_\iota')^2 + (y_\iota')^2 + (z_\iota')^2]$$

folgende Darstellung:

$$(56) \qquad T = \frac{1}{2} \sum_1^m{}_i \sum_1^m{}_k a_{ik} q_i' q_k' + \sum b_i q_i' + a \qquad (a_{ik} = a_{ki}),$$

worin die a_{ik}, b_i, a Funktionen der $m+1$ Variabeln $q_1 \ldots q_m t$ bedeuten, und die Determinante $|a_{ik}|$, d. h. also die nach den Variabeln q_i' genommene Hesse'sche Determinante von T nicht identisch null ist. *Wir nehmen ferner an, daſs eine Kräftefunktion:*

$$U(t, q_1 q_2 \ldots q_m)$$

existiere. Durch Angabe der beiden Funktionen T und U ist dann das dynamische Problem vollkommen charakterisirt.

Identifiziren wir jetzt die Funktion Φ des Art. 384 mit der Funktion $T + U$, so nehmen die Differentialgleichungen (34) die Form an:

$$(57) \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Es sind dies die wohlbekannten *Lagrange'schen Differentialgleichungen* der Bewegung unseres dynamischen Systems.

Daraus folgt der Satz:

Die Integralfunktionen q_i der Lagrange'schen Differentialgleichungen (57) *und nur diese haben die Eigenschaft, daſs für sie die Variation des Integrals:*

$$(58) \qquad \int_\tau^t (T + U)\, dt$$

identisch verschwindet, wenn die Variationen von t, $q_1 \dots q_m$ an den beiden Integrationsgrenzen gleich null angenommen werden, m. a. W.:

Sind irgend zwei bezw. den Zeiten τ und t entsprechende Positionen $q_1^0 \dots q_m^0$ bezw. $q_1 \dots q_m$ unseres dynamischen Systems gegeben, so ist die wirklich stattfindende Bewegung zwischen diesen beiden Positionen derart, daſs das Integral (58) *kleiner*[1]) *ist, als wenn das System gezwungen würde, sich unter den gegebenen Bedingungen* (55) *auf irgend eine andere Art, aber innerhalb der gleichen Zeit $t - \tau$ von der ersten Lage in die zweite zu bewegen.*

Dieser Satz ist in Deutschland unter dem Namen „*Hamilton'sches Prinzip*" bekannt.

Ist $H(t, q_1 \dots q_m, p_1 \dots p_m)$ die Funktion, die man aus

$$p_1 q_1' + \dots + p_m q_m' - T - U$$

erhält, wenn daraus die q_i' mittels der Relationen:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}$$

eliminirt werden, so besteht zwischen den Lagrange'schen Gleichungen (57), *dem kanonischen System:*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \dots m) \tag{59}$$

und der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + H\left(t, q_1 \dots q_m, \frac{\partial z}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial z}{\partial q_m}\right) = 0, \tag{60}$$

folgender Zusammenhang:

Aus den allgemeinen Integralgleichungen:

$$q_i = \varkappa_i(t, q_1^0 \dots p_m^0); \; p_i = \pi_i(t, q_1^0 \dots p_m^0) \tag{61}$$

des kanonischen Systems (59) *erhält man durch Differentiationen und Eliminationen die allgemeinen Integralgleichungen des Systems* (57), *d. h. die Bewegungsgleichungen des vorgelegten dynamischen Problems:*

$$\left.\begin{aligned} q_i &= k_i(t, q_1^0 \dots q_m^0, q_1'^0 \dots q_m'^0) \\ q_i' &= \frac{\partial}{\partial t} k_i(t, q_1^0 \dots q_m'^0) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \dots m),$$

und umgekehrt gewinnt man aus den letzteren durch Differentiationen und Eliminationen die ersteren wieder (Art. 385).

---

1) Vorausgesetzt, daſs das Wertsystem $q_1 \dots q_m t$ einer gewissen Umgebung der Stelle $q_1^0 \dots q_m^0, \tau$ angehört; vgl. hierzu Jacobi, Vorlesungen über Dynamik.

Ferner erhält man ein vollständiges Integral:

$$z = \Omega(t, q_1 \,.\,.\, q_m, q_1^0 \,.\,.\, q_m^0) + c$$

der partiellen Differentialgleichung (60), *indem man in dem Ausdruck:*

$$p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + \cdot \cdot + p_m \frac{\partial H}{\partial p_m} - H$$

die q_ι, p_ι *durch ihre Werte* (61) *ersetzt, dann nach* t *zwischen den Grenzen* τ *und* t *integrirt, und hinterher mittels der* m *Gleichungen* $q_\iota^0 = \varkappa_\iota$ *die* p_ι^0 *eliminirt* (Art. 380—382).

Umgekehrt lassen sich mit Hülfe eines beliebigen vollständigen Integrals:

$$z = \psi(t, q_1 \,.\,.\, q_m, c_1 \,.\,.\, c_m) + c$$

der partiellen Differentialgleichung (60) *die allgemeinen Integralgleichungen des kanonischen Systems* (59) *in der Form:*

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_i} = p_i; \quad \frac{\partial \psi}{\partial c_i} = \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, m)$$

darstellen (Art. 380).

Wir erwähnen noch, daſs H als die „Hamilton'sche Funktion" und Ω als die „Prinzipalfunktion" des vorgelegten dynamischen Problems bezeichnet wird.

Die Integration der Lagrange'schen Gleichungen erfordert nach dem vorstehenden Satz nur die Ermittelung eines vollständigen Integrals der partiellen Differentialgleichung (60), die wir so schreiben wollen:

(62) $$p + H(t, q_1 \,.\,.\, q_m, p_1 \,.\,.\, p_m) = 0;$$

hierin haben also die p folgende Bedeutung:

$$p = \frac{\partial z}{\partial t}; \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial q_i}.$$

Die Integration der Gleichung (62) kommt auf diejenige der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung:

(63) $$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_1^m \left(\frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f}{\partial q_s} - \frac{\partial H}{\partial q_s} \frac{\partial f}{\partial p_s} \right) = 0$$

hinaus, und kann nach der Methode des Art. 369 durch je eine Operation:

$$2m, 2m - 2, \,.\,.\, 4, 2, 0$$

erledigt werden.

388. Besonderes Interesse beansprucht der Fall, daſs sowohl die Kräftefunktion U als auch die Bedingungsgleichungen (55) von t frei

sind, und infolge dessen auch H die Variabeln t nicht enthält. Dann besitzt die lebendige Kraft folgende Form:

$$T \equiv \frac{1}{2} \sum \sum a_{ik} q_i' q_k',$$

und man findet:

$$H \equiv \sum p_i q_i' - T - U \equiv \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i' - T - U \equiv T - U,$$

worin natürlich T mittels der Gleichungen $p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}$ durch die Variabeln $q_1 \ldots q_m p_1 \ldots p_m$ auszudrücken ist.

Jetzt ist H ein Integral der linearen partiellen Differentialgleichung (63), und die Integration von (62) erfordert infolgedessen nach Art. 369 nur mehr je eine Operation:

$$(64) \qquad 2m-2,\ 2m-4,\ \ldots\ 4,\ 2,\ 0.$$

Die Thatsache, dafs H die Gleichung (63) erfüllt, kommt offenbar darauf hinaus, dafs die Funktion $T-U$ von t frei wird, wenn man darin die q_i durch die Integralfunktionen der Lagrange'schen Gleichungen ersetzt, m. a. W. dafs im gegenwärtigen Falle der Satz von der lebendigen Kraft gilt.

Die soeben konstatirte Integrationsvereinfachung läfst sich auch folgendermafsen charakterisiren:

Das Integrationsproblem:

$$(65) \qquad p + H(q_1 \ldots q_m p_1 \ldots p_m) = 0$$

kommt darauf hinaus, ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$(66) \qquad H(q_1 \ldots q_m p_1 \ldots p_m) = h$$

zu finden, worin h eine arbiträre Konstante, und $q_1 \ldots q_m$ die Independenten bedeuten.

In der That, ist:

$$z = \Psi(q_1 \ldots q_m, c_1 \ldots c_{m-1}, h) + c$$

ein vollständiges Integral von (66), so ist:

$$z = \Psi(q_1 \ldots q_m, c_1 \ldots c_{m-1}, h) - ht + c$$

ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung (65).[1])

Nach der Regel des Art. 380 sind jetzt die allgemeinen Integralgleichungen des kanonischen Systems (59) die folgenden:

---

1) Dies folgt auch aus Imschenetzky's Theorie der Trennung der Variabeln (Art. 371).

$$\frac{\partial \Psi}{\partial c_1} = \gamma_1, \,.\,.\, \frac{\partial \Psi}{\partial c_{m-1}} = \gamma_{m-1}; \; \frac{\partial \Psi}{\partial h} - t = \gamma_m$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial q_1} = p_1, \,.\,.\, \frac{\partial \Psi}{\partial q_m} = p_m,$$

worin $c_1 \,.\,.\, c_{m-1}$, h, $\gamma_1 \,.\,.\, \gamma_m$ die arbiträren Konstanten bedeuten.

Wie man sieht, kommt jetzt die Integration von (65) auf diejenige der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(H, f) = 0$$

hinaus, erledigt sich also in der That durch die Operationen (64) (Art. 354, 369).

Man hat zu diesem Zwecke $m - 1$ Funktionen:

$$H_i(q_1 \,.\,.\, q_m p_1 \,.\,.\, p_m) \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, m-1)$$

derart zu bestimmen, dafs alle Klammerausdrücke:

$$(HH_i), \; (H_i H_k)$$

identisch verschwinden, und die Funktionen H, $H_1 \,.\,.\, H_{m-1}$ hinsichtlich der Gröfsen $p_1 p_2 \,.\,.\, p_m$ unabhängig werden. Sodann hat man die Gleichungen:

$$H = h, \; H_1 = c_1 \,.\,.\, H_{m-1} = c_{m-1}$$

nach $p_1 \,.\,.\, p_m$ aufzulösen, und die so erhaltenen Werte in den Pfaff'schen Ausdruck:

$$p_1 dq_1 + \cdot\cdot + p_m dq_m$$

zu substituiren; dieser verwandelt sich dadurch in ein exaktes Differential:

$$d\Phi(q_1 \,.\,.\, q_m c_1 \,.\,.\, c_{m-1} h),$$

und die Gleichung $z = \Phi + c$ definirt ein vollständiges Integral der Gleichung (66), womit das vorgelegte dynamische Problem erledigt ist.

Nach dem § 2 dieses Kapitels haben die Funktionen H, $H_1 \,.\,.\, H_{m-1}$ die Eigenschaft, dafs für jedes beliebige Wertsystem der Variabeln $q_i p_i$ und ihrer Differentiale eine Identität der Form:

$$p_1 dq_1 + \cdot\cdot + p_m dq_m \equiv dW + G dH + G_1 dH_1 + \cdot\cdot + G_{m-1} dH_{m-1}$$

besteht, worin W und G_i gewisse Funktionen von $q_1 \,.\,.\, q_m p_1 \,.\,.\, p_m$ bedeuten, und zwar hat man:

$$W(q_1 \,.\,.\, q_m p_1 \,.\,.\, p_m) \equiv \Phi(q_1 \,.\,.\, q_m, H_1 \,.\,.\, H_{m-1}, H)$$

$$G_i \equiv -\frac{\partial}{\partial H_i} \Phi(q_1 \,.\,.\, q_m H_1 \,.\,.\, H_{m-1} H) \qquad (i = 0, 1, \,.\,.\, m-1).$$

Die allgemeinen Integralgleichungen des kanonischen Systems (59) können jetzt, nach den arbiträren Konstanten $g, g_1\, g_{m-1}$, $h, h_1 \,..\, h_{m-1}$ aufgelöst, so geschrieben werden:

$$
(67)\qquad \begin{array}{l} H = h; \qquad H_1 = h_1 \,..\, H_{m-1} = h_{m-1} \\ G = g - t;\; G_1 = g_1 \,..\, G_{m-1} = g_{m-1}, \end{array}
$$

und die Funktionen G_i, H_i besitzen die Eigenschaft, dafs alle Klammerausdrücke $(\varphi\,\psi)$, die aus irgend zweien dieser Funktionen gebildet werden, identisch verschwinden, mit Ausnahme von (GH), $(G_1 H_1)$ etc., die gleich 1 sind.

389. Durch die Gleichungen:

$$
(68)\qquad \begin{array}{l} z' = z + U(q_1 \,..\, q_m p_1 \,..\, p_m) \\ q_i' = Q_i(q_1 \,..\, p_m);\; p_i' = P_i(q_1 \,..\, p_m) \qquad (i = 1 \,..\, m) \end{array}
$$

werde eine Berührungstransformation der $2m + 1$ Variabeln $z q_i p_i$ von der besondern, in Art. 201 definirten Beschaffenheit dargestellt. Dann erfüllen die Funktionen $P_i Q_i$ die Identitäten

$$
\begin{array}{c} (P_i P_k) \equiv (Q_i Q_k) \equiv (P_i Q_k) \equiv 0 \qquad (i, k = 1 \,..\, m;\; i \gtrless k) \\ (P_i Q_i) \equiv 1 \qquad (i = 1, 2, \,..\, m). \end{array}
$$

Sind φ, ψ zwei beliebige Funktionen der $2m$ Variabeln $q_i p_i$, führt man ferner in diese Funktionen mittels (68) die neuen Variabeln Q_k, P_k ein und schreibt man:

$$
(\varphi\psi)_{QP} \equiv \sum_1^m \left(\frac{\partial\varphi}{\partial P_s}\frac{\partial\psi}{\partial Q_s} - \frac{\partial\psi}{\partial P_s}\frac{\partial\varphi}{\partial Q_s} \right),
$$

so erhält man nach pag. 375, Anm.:

$$
(\varphi\psi)_{QP} \equiv (\varphi\psi)_{qp}.
$$

Es sei jetzt ein beliebiges kanonisches System

$$
(69)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i};\; \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \,..\, m)
$$

vorgelegt, worin die Funktion H aufser den $q_i p_i$ auch noch t enthalten kann.

Führen wir dann in (69) *mittels der Formeln* (68) *die neuen Unbekannten Q_i und P_i ein, so verwandelt sich das kanonische System* (69) *in das gleichfalls kanonische System:*

$$
(70)\qquad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i};\; \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} \qquad (i = 1, 2 \,..\, m),
$$

worin H als Funktion der 2_{m+1} Variabeln:

$$t, Q_1 \,.\,.\, Q_m P_1 \,.\,.\, P_m$$

auszudrücken ist.[1])

In der That, die lineare partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (Hf)_{qp} = 0 \tag{71}$$

verwandelt sich vermöge der Transformation (68) in die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (Hf)_{QP} = 0, \tag{72}$$

mithin auch das zu (71) adjungirte simultane System (69) in das zu (72) adjungirte System (70) (vgl. Art. 73).

390. Es sei z. B. ein dynamisches Problem durch die Funktionen T und U charakterisirt, wobei T und U, und infolge dessen auch H von t frei sein mögen; wir bilden dann das zugehörige kanonische System (69). Die allgemeinen Integralgleichungen dieses Systems seien wie in der Nr. 388 durch die Relationen (67) dargestellt. Gleichzeitig betrachten wir nun das dynamische Problem, dessen zugehöriges kanonisches System die Form hat:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial(H+\Omega)}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial(H+\Omega)}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \,.\,.\, m); \tag{73}$$

dabei ist Ω eine beliebige Funktion der $2m+1$ Variabeln t, q_i, p_i.

Führen wir dann mittels der Formeln:

$$\left.\begin{aligned} q_i' &= H_{i-1}(q_1 \,.\,.\, q_m p_1 \,.\,.\, p_m) \\ p_i' &= G_{i-1}(q_1 \,.\,.\, q_m p_1 \,.\,.\, p_m) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, m) \tag{74}$$

statt der $q_i p_i$ die neuen unbekannten Funktionen $q_i' p_i'$ ein, so verwandelt sich nach der vorigen Nr. und nach der Schlufsbemerkung von Art. 388 die lineare partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\Omega + H, f)_{qp} = 0$$

in die nachstehende:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial p_1'} + (\Omega f)_{q'p'} = 0.$$

In der That hat man ja:

$$(\Omega + H, f)_{qp} = (\Omega + q_1', f)_{q'p'} = -\frac{\partial f}{\partial p_1'} + (\Omega f)_{q'p'}.$$

---

1) Lie (IX) hat gezeigt, dafs auch umgekehrt eine Transformation (68), die jedes beliebige kanonische System (69) wiederum in ein kanonisches System (70) überführt, in einer Berührungstransformation von der Kategorie des Art. 201 enthalten ist; er hat ferner die allgemeinsten Transformationen (68) angegeben, die ein *bestimmtes* kanonisches System (69) wieder in ein solches verwandeln.

Darnach nimmt das kanonische System (73) vermöge (74) folgende Gestalt an:

$$\frac{dq_i'}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i'}; \quad \frac{dp_k'}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial q_k'}; \quad \frac{dp_1'}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial q_1'} - 1$$

$$(i = 1, 2, \ldots m; \quad k = 2, 3, \ldots m),$$

worin Ω durch die neuen Variabeln $t, p_1' \ldots p_m', q_1' \ldots q_m'$ auszudrücken ist.

Dieses Resultat können wir offenbar auch so aussprechen:

Führen wir in das kanonische System (73) *mittels der Formeln* (67) *die neuen Variabeln $h, h_1 \ldots h_{m-1}, g, g_1 \ldots g_{m-1}$ ein, und drücken wir Ω als Funktion dieser Gröfsen und von t aus, so erhält das System* (73) *wiederum die kanonische Form:*

$$(75) \qquad \frac{dh_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial g_i}; \quad \frac{dg_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial h_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots m-1).$$

Ω heifst die „*Störungsfunktion*“; das dynamische Problem, zu dem die kanonischen Gleichungen (69) gehören, heifst das „*ungestörte*“ Problem, das Problem mit der Hamilton'schen Funktion $H + \Omega$ das „*gestörte*“.

Die Gröfsen $h_i\, g_i$, die im ungestörten Problem Konstante sind, heifsen die „*Elemente*“ des letzteren, und zwar insbesondere „*kanonische*“ Elemente; sind sie zu irgend einer Zeit bekannt, so ist die Bewegung des ungestörten Systems durch die Gleichungen (67) für alle Zeiten t bestimmt. Die Differentialgleichungen (75) definiren dann die Änderungen, welche diese Elemente infolge des Hinzutritts der Störungsfunktion Ω im Laufe der Zeit erleiden.

Kapitel XIV.

Theorie der Funktionengruppen.

§ 1. Verwertung bekannter Integrale.

391. Wir haben in den beiden letzten Kapiteln zwei Typen von Integrationsmethoden einer partiellen Differentialgleichung 1ter Ordnung, bezw. eines Involutionssystems kennen gelernt. Der erste Typus umfafst die sog. erste Jacobi'sche, oder, was dasselbe besagt, die Cauchy'sche Methode, sowie deren Verallgemeinerung (Art. 367), und ist dadurch charakterisirt, dafs dabei die Aufsuchung *aller* Integrale eines gewissen vollständigen Systems verlangt wird. Der zweite Typus wird durch das in Art. 354 auseinandergesetzte Verfahren repräsentirt,

welches alle in Kap. XIII, § 2 angegebenen Methoden umfaſst, und als die „verallgemeinerte zweite Jacobi'sche Methode" bezeichnet werden kann. Diese Methode kommt darauf hinaus, von mehreren aufeinanderfolgenden vollständigen Systemen immer je *ein* Integral zu ermitteln. In Art. 367 und 376 haben wir überdies gesehen, wie man bei einem und demselben Integrationsproblem beide Methoden kombiniren kann.

Um ein gegebenes ν-gliedriges Involutionssystem:

(1) $$f_i(z, x_1, \dots x_m, p_1, \dots p_m) = c_i \qquad (i = 1, 2, \dots \nu)$$

nach der verallgemeinerten zweiten Jacobi'schen Methode zu integriren, hat man zunächst *ein* von $f_1 \dots f_\nu$ verschiedenes Integral $f_{\nu+1}$ des vollständigen Systems

(2) $$[f_i f] = 0^{1)} \qquad (i = 1, 2, \dots \nu)$$

zu ermitteln, was entweder nach dem in Art. 67 erklärten *Jacobi*'schen Verfahren oder mittels des *Mayer*'schen Satzes (Art. 87) geschehen kann. Bei beiden Methoden aber kann der Fall eintreten, daſs man nicht blos *ein* Integral $f_{\nu+1}$, sondern gleichzeitig mehrere Integrale

(3) $$f_{\nu+1}, f_{\nu+2}, \dots f_r \qquad (r \leqq 2m + 1 - \nu)$$

des Systems (2) erhält. Will man das Involutionssystem (1) nach der verallgemeinerten *Cauchy*'schen Methode (Art. 367) integriren, so bietet die Kenntnis der Lösungen (3) einen unmittelbar ersichtlichen Vorteil: Die Aufsuchung *aller* Integrale von (2) geschieht nämlich nach Art. 88 nunmehr mit Hülfe je einer Operation:

$$2m + 1 - r - \nu,\ 2m + 1 - r - \nu - 1, \dots \quad 3, 2, 1.$$

Ist insbesondere $r = 2m + 1 - \nu$, so erfordert die Integration von (1) blos mehr Differentiationen und Eliminationen.

Ist aber $r < 2m + 1 - \nu$, und will man die verallgemeinerte *Jacobi*'sche Methode gebrauchen, so scheint es zunächst, als ob die Kenntnis der Integrale $f_{\nu+2}, \dots f_r$ von keinem Nutzen sei; denn diese Funktionen befinden sich zwar mit $f_1 \dots f_\nu$, aber im allgemeinen nicht mit $f_{\nu+1}$ in Involution, lassen sich also bei dem nächsten Schritt des Reductionsverfahrens, der die Bestimmung eines von $f_1 \dots f_{\nu+1}$ unabhängigen Integrals des vollständigen Systems

$$[f_1 f] = 0,\ [f_2 f] = 0, \dots [f_{\nu+1} f] = 0$$

verlangt, nicht unmittelbar verwerten.

1) In diesem Kapitel haben die Klammersymbole $[\varphi f]$ und (φf) bezw. die Bedeutungen:

$$\sum_1^m \left[\frac{\partial \varphi}{\partial p_s}\left(\frac{\partial f}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right]; \quad \sum_1^m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_s}\frac{\partial f}{\partial x_s} - \frac{\partial f}{\partial p_s}\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}\right).$$

Es erhebt sich daher die Frage, wie man sich die Kenntnis der Integrale $f_{\nu+2} \dots f_r$ zu Nutzen machen kann, ohne auf die Integrationsvorteile der zweiten *Jacobi*'schen Methode Verzicht leisten zu müssen.

392. Die Beantwortung dieser Frage ergibt sich aus unserer allgemeinen Theorie des Pfaff'schen Problems (Kap. IX, § 4). In der That, es seien die Funktionen:

$$(4) \qquad f_1, f_2, \dots f_\nu, f_{\nu+1}, \dots f_r$$

gegeben, und es sei 2σ der Rang der alternirenden Matrix:

$$(\overline{B}_r) \qquad \| [f_i f_k] \| \qquad (i, k = 1, 2 \dots r),$$

ferner $2\sigma'$ der Rang der Matrix $(\overline{C}_r)$, die aus der eben hingeschriebenen durch Ränderung mit den Elementen $\frac{\partial f_1}{\partial z}, \dots \frac{\partial f_r}{\partial z}$, 0 entsteht. Da die Funktionen $f_1 \dots f_\nu$ unter sich und mit $f_{\nu+1} \dots f_r$ in Involution sind, so ist 2σ auch gleich dem Rang der Matrix:

$$(B_r') \qquad \| [f_{\nu+h}, f_{\nu+k}] \| \qquad (h, k = 1, 2 \dots r - \nu).$$

Ferner befinden sich unter den $2\sigma + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten von $(\overline{C}_r)$ alle Produkte aus je einer 2σ-reihigen Hauptunterdeterminante von (B_r') in einen Ausdruck der Form $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)^2$ $(i = 1, 2, \dots \nu)$. Beschränken wir uns also zunächst auf die Betrachtung des Falles α) (Art. 353), so ist $\sigma' = \sigma + 1$, und der Pfaff'sche Ausdruck

$$\varDelta \equiv dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_m dx_m$$

gestattet nach Kap. IX, § 4 eine Darstellung der Form

$$(5) \quad \varrho . \varDelta \equiv F_1 df_1 + \dots + F_r df_r + F_{r+1} df_{r+1} + \dots + F_s df_s + df_{s+1},$$

wenn mit s die Zahl $\sigma + m$, und mit ϱ eine gewisse Funktion der Variabeln z, x_i, p_i bezeichnet wird. Um die Darstellung (5) zu finden, müssen die Funktionen $f_{r+1} \dots f_{s+1}$ so bestimmt werden, daſs die Matrix

$$(\overline{B}_{s+1}) \qquad \| [f_i f_k] \| \qquad (i, k = 1, 2, \dots s + 1)$$

ebenfalls den Rang 2σ besitzt, und die Funktionen $f_1 \dots f_{s+1}$ hinsichtlich der $2m + 1$ Variabeln $z x_i p_i$ unabhängig werden. Demnach hat zunächst f_{r+1} allen linearen partiellen Differentialgleichungen der Form

$$\eta_1 [f_1 f] + \eta_2 [f_2 f] + \dots + \eta_r [f_r f] = 0$$

zu genügen, deren Koeffizienten η_i die Relationen

$$\eta_1 [f_1 f_k] + \eta_2 [f_2 f_k] + \dots + \eta_r [f_r f_k] = 0 \qquad (k = 1, \dots r)$$

identisch erfüllen. Bezeichnen wir sonach mit

$$\eta^{(i)}_{\nu+1},\ \eta^{(i)}_{\nu+2}\,..\,\eta^{(i)}_{r} \qquad (i = 1,\,..\,r-\nu-2\sigma)$$

die unabhängigen Lösungensysteme der Gleichungen

$$\eta_{\nu+1}[f_{\nu+1}f_{\nu+k}] + \cdot\cdot + \eta_r[f_rf_{\nu+k}] = 0 \qquad (k = 1\,..\,r-\nu),$$

und schreiben wir:

$$X_if \equiv \eta^{(i)}_{\nu+1}[f_{\nu+1}f] + \cdot\cdot + \eta^{(i)}_r[f_rf],$$

so ist für f_{r+1} ein von $f_1\,..\,f_r$ unabhängiges Integral der Gleichungen

(6) $\quad [f_1f] = 0,\,..\,[f_rf] = 0,\ X_if = 0 \qquad (i = 1,\,..\,r-\nu-2\sigma)$

zu wählen. Diese Gleichungen bilden, wie aus Art. 237 und 242 folgt, ein $r - 2\sigma$-gliedriges *vollständiges* System mit r bekannten Integralen $f_1\,..\,f_r$, und die Ermittelung von f_{r+1} erfordert sonach eine Operation

$$2m - 2r + 2\sigma + 1.$$

Die Funktion f_{r+2} ist jetzt so zu bestimmen, daſs alle $2\sigma + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten der Matrix $(\overline{B}_{r+2})$ verschwinden, ist also ein Integral des vollständigen Systems, das aus (6) durch Hinzufügung einer Gleichung der Form:

(7) $$\zeta_{\nu+1}[f_{\nu+1}f] + \cdot\cdot + \zeta_{r+1}[f_{r+1}f] = 0$$

hervorgeht. Dabei haben die ζ den Relationen

$$\zeta_{\nu+1}[f_{\nu+1}f_{\nu+k}] + \cdot\cdot + \zeta_{r+1}[f_{r+1}f_{\nu+k}] = 0 \qquad (k = 1,\,..\,r-\nu+1)$$

zu genügen, derart, daſs ζ_{r+1} nicht verschwindet. Da die Integrale $f_1\,..\,f_{r+1}$ des vollst. Systems (6)(7) bekannt sind, so verlangt die Ermittelung von f_{r+2} eine Operation

$$2m - 2r - 2\sigma - 1.$$

Die Funktion f_{r+3} ist sodann ein beliebiges Integral eines vollständigen Systems, das aus (6)(7) durch Hinzunahme einer weiteren Gleichung entsteht, etc.

393. Hat man auf dem angegebenen Wege $f_{r+1}\,..\,f_{s+1}$ der Reihe nach bestimmt, so ergeben sich die Funktionen ϱ, F_i durch Vergleichung der beiden Seiten der Identität (5) mit Hülfe eines Systems linearer Gleichungen. *Damit ist dann die Integration des gegebenen ν-gliedrigen Involutionssystems* (1) *vollkommen erledigt.*

In der That, aus der Identität (5) folgt zunächst, daſs unter den $2s + 1$ Funktionen $F_1\,..\,F_s, f_1\,..\,f_{s+1}$ genau $2m + 1$ unabhängige vorhanden sind. Demnach gibt es unter den $2m + 2\sigma + 1 - \nu$ Funktionen

(8) $$f_1, f_2,\,..\,f_{s+1},\ F_{\nu+1}, F_{\nu+2},\,..\,F_s$$

genau $2m+1-\nu$ unabhängige, m. a. W.: zwischen den Funktionen (8) bestehen 2σ und nicht mehr identische Relationen, mit deren Hülfe 2σ von den Funktionen $F_{\nu+1}\,..\,F_s$ durch die übrigen Funktionen (8) ausgedrückt werden können. Dafs es nämlich nicht weniger als 2σ solcher Relationen geben kann, folgt aus der sogleich zu beweisenden Thatsache:

Sämtliche Funktionen (8) *sind Integrale des vollständigen Systems* (2).

Um dies einzusehen, schreiben wir wie früher:

$$\frac{d}{dx_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial z}.$$

Aus (5) folgen dann wie auf pag. 386 die Identitäten:

$$(9)\quad \begin{cases} \sum_1^s {}_h \dfrac{dF_h}{dx_k}\dfrac{df_h}{dx_i} - \dfrac{dF_h}{dx_i}\dfrac{df_h}{dx_k} \equiv \sum_1^s {}_h \dfrac{\partial F_h}{\partial p_k}\dfrac{\partial f_h}{\partial p_i} - \dfrac{\partial F_h}{\partial p_i}\dfrac{\partial f_h}{\partial p_k} \equiv 0 \\ \sum_1^s {}_h \dfrac{\partial F_h}{\partial p_k}\dfrac{df_h}{dx_i} - \dfrac{dF_h}{dx_i}\dfrac{\partial f_h}{\partial p_k} \equiv \varrho\,\varepsilon_{ik} \quad (i, k = 1\,..\,m;\ \varepsilon_{ik} = 0,\ \varepsilon_{ii} = 1). \end{cases}$$

Sind dann

$$(10)\qquad \delta x_1, \,..\, \delta x_m,\ \delta p_1, \,..\, \delta p_m$$

willkürliche Incremente, und definiren wir δu wie folgt:

$$(11)\qquad \delta u \equiv \sum \frac{du}{dx_k}\,\delta x_k + \sum \frac{\partial u}{\partial p_k}\,\delta p_k,$$

so hat man die Identitäten:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\,\delta x_i &\equiv \sum{}_h \left(\frac{\partial F_h}{\partial p_i}\,\delta f_h - \frac{\partial f_h}{\partial p_i}\,\delta F_h\right) \\ -\,\varrho\,\delta p_i &\equiv \sum{}_h \left(\frac{dF_h}{dx_i}\,\delta f_h - \frac{df_h}{dx_i}\,\delta F_h\right) \end{aligned}\right\} (i, h = 1, 2, \,..\, m),$$

wie aus (9)(11) unmittelbar hervorgeht. Aus diesen Formeln folgt:

$$\varrho\,\delta u \equiv \sum_1^s {}_h\,[F_h, u]\,\delta f_h - \sum_1^s {}_h\,[f_h, u]\,\delta F_h.$$

Ersetzt man hierin u der Reihe nach durch $f_1\,..\,f_\nu$, so folgt:

$$\varrho\,\delta f_i \equiv [F_1 f_i]\,\delta f_1 + \cdot - + [F_s f_i]\,\delta f_s \qquad (i = 1\,..\,\nu).$$

Nun sind aber die Ausdrücke δf_h, als homogene lineare Funktionen der $2m$ Variabeln (10) betrachtet, linear unabhängig; im entgegengesetzten Falle nämlich würde man ähnlich wie in Art. 282 schliefsen, dafs entweder die Funktionen $f_1\,..\,f_s$ nicht unabhängig wären, oder dafs sich $\varrho\,\Delta$ in der Form $F_1 df_1 + \cdot\cdot\, F_s df_s$ darstellen liefse, was, wie bekannt, nicht der Fall ist. Darnach folgen aus der vorigen Identität die Beziehungen

$$[F_i f_i] \equiv \varrho;\; [F_h f_i] \equiv 0 \qquad (i \gtrless h;\; i = 1\,..\,\nu;\; h = 1,\,..\,s),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Unter den zu Anfang dieses Art. gemachten Voraussetzungen kennt man mithin alle Integrale des vollständigen Systems (2), womit nach Art. 367 die Integration des Involutionssystems (1) erledigt ist.

394. Die Resultate der letzten zwei Nummern lassen sich in folgenden Satz zusammenfassen:

Kennt man r unabhängige Integrale

$$(3) \qquad f_1 f_2 \,..\, f_\nu f_{\nu+1} \,..\, f_r, \qquad (\nu + 2 \leqq r < 2m + 1 - \nu)$$

des vollständigen Systems:

$$(2) \qquad [f_1 f] = 0,\,..\,[f_\nu f] = 0$$

so erfordert die Integration des ν-gliedrigen Involutionssystems:

$$(1) \qquad f_i(z, x_1, \,..\, x_m, p_1, \,..\, p_m) = c_i \qquad (i = 1, 2, \,..\, \nu)$$

noch je eine Integrationsoperation der Ordnung:

$$2m - 2r + 2\sigma + 1,\; 2m - 2r + 2\sigma - 1,\,..\,3,\, 1,$$

wenn mit 2σ der Rang der r — ν-zeiligen Matrix:

$$\| [f_i f_k] \| \qquad (i, k = \nu + 1, \nu + 2, \,..\, r)$$

bezeichnet wird.

Der ungünstigste Fall tritt ein, wenn der Rang 2σ seinen größten Wert erreicht. Dieses Maximum beträgt $r - \nu$ oder $r - \nu - 1$, je nachdem $r - \nu$ gerade oder ungerade ist. Ist im ersten Fall insbesondere $r = \nu + 2$, d. h. kennt man von dem vollständigen System (2) außer $f_1 \,..\, f_\nu$ noch zwei Integrale $f_{\nu+1}$ und $f_{\nu+2}$, für welche der Ausdruck $[f_{\nu+1} f_{\nu+2}]$ nicht verschwindet, so reducirt sich die eben durchgeführte Methode darauf, das Involutionssystem

$$f_1 = c_1 \,..\, f_{\nu+1} = c_{\nu+1}$$

nach der verallgemeinerten zweiten Jacobi'schen Methode zu integriren, und aus der Kenntnis von $f_{\nu+2}$ läßt sich demnach kein weiterer Nutzen ziehen.[1])

Der günstigste Fall findet statt, wenn 2σ seinen Minimalwert erreicht. Dieser ist Null, wenn $r \leqq m + 1$, und die Funktionen $f_1 \,..\, f_r$

1) Vgl. indes den § 4 dieses Kapitels.

bilden dann ein Involutionssystem. Für $r > m + 1$ ist σ mindestens gleich $r - m - 1$ (Art. 243); erreicht σ diesen Minimalwert, so gestattet $\varDelta$ nach Kap. IX § 4 eine Darstellung:

$$\varrho \varDelta \equiv F_1 df_1 + \cdots + F_{r-1} df_{r-1} + df_r,$$

und die Integration des gegebenen Involutionssystems (1) ist damit nach dem vorigen Art. erledigt.

395. Indem wir uns nunmehr zu der Betrachtung des Falles β) (Art. 353), d. h. eines ν-gliedrigen Involutionssystems der Form:

(12) $$f_i(x_1 x_2 \ldots x_m p_1 p_2 \ldots p_m) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots \nu)$$

wenden, nehmen wir an, daſs von dem ν-gliedrigen Jacobi'schen System:

(13) $$(f_1 f) = 0, \ldots (f_\nu f) = 0$$

die r Integrale $f_1 \ldots f_\nu, f_{\nu+1} \ldots f_r$ bereits bekannt seien. Dann stimmt der Rang der r-reihigen alternirenden Matrix

(14) $$\| (f_i f_k) \| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots r)$$

mit dem Rang 2σ der Matrix:

(15) $$\| (f_i f_k) \| \qquad (i, k, = \nu + 1, \nu + 2, \ldots r)$$

überein. Setzen wir ferner

$$(f) \equiv p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m},$$

so besitzt die Matrix, die aus (14) durch Ränderung mit den Elementen $(f_1), (f_2), \ldots (f_r), 0$ hervorgeht, offenbar den Rang $2\sigma + 2$, da die Funktionen (12) der Annahme nach in den p_i nicht alle homogen nullter Ordnung sind. Nach Art. 237 und 238 gestattet demnach der Pfaff'sche Ausdruck:

$$\varDelta' \equiv p_1 dx_1 + \ldots + p_m dx_m$$

eine Darstellung der Form:

(16) $$\varDelta' \equiv d\Omega + F_1 df_1 + \cdots F_r df_r + F_{r+1} df_{r+1} + \cdots + F_s df_s,$$

wenn mit s wiederum die Zahl $\sigma + m$ bezeichnet wird. Die Funktionen $f_{r+1} \ldots f_s$ müssen dabei so bestimmt werden, daſs die Matrix

$$\| (f_i f_k) \| \qquad (i, k = \nu + 1, \nu + 2, \cdots s)$$

den Rang 2σ besitzt, d. h. f_{r+1} ist ein beliebiges, von $f_1 \ldots f_r$ unabhängiges Integral des $r - 2\sigma$-gliedrigen vollständigen Systems:

(17) $$(f_i f) = 0, \; X_k f = 0 \qquad (i = 1 \ldots \nu;\ k = 1, \ldots r - \nu - 2\sigma),$$

worin

$$X_k f \equiv \eta_{\nu+1}^{(k)} (f_{\nu+1} f) + \cdots + \eta_r^{(k)} (f_r f)$$

gesetzt ist, und mit

$$\eta_{\nu+1}^{(k)}, \eta_{\nu+2}^{(k)} \cdots \eta_r^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots r - \nu - 2\sigma)$$

die linear unabhängigen Lösungen der linearen Gleichungen

$$\eta_{\nu+1}(f_{\nu+1}f_i) + \cdots + \eta_r(f_r f_i) = 0 \qquad (i = \nu + 1, \ldots r)$$

bezeichnet werden. Ferner ist f_{r+2} ein beliebiges, von $f_1 \ldots f_{r+1}$ unabhängiges Integral des $r - 2\sigma + 1$-gliedrigen vollständigen Systems, das aus (17) durch Hinzufügung einer neuen Gleichung

$$\zeta_{\nu+1}(f_{\nu+1}f) + \cdots + \zeta_{r+1}(f_{r+1}f) = 0$$

entsteht, wobei die ζ_i den linearen Gleichungen

$$\zeta_{\nu+1}(f_{\nu+1}f_i) + \cdots + \zeta_{r+1}(f_{r+1}f_i) = 0 \qquad (i = \nu + 1, \ldots r + 1)$$

zu genügen haben, und ζ_{r+1} nicht null ist, u. s. w. f. Hat man solcherweise die f_i bestimmt, so ergibt sich die Funktion Ω in (16) durch eine Quadratur (Art. 237), die F_i sodann durch Auflösung linearer Gleichungen.

396. Die Identität (16) schreiben wir folgendermaßen:

$$\Delta = d(z - \Omega) - F_1 df_1 - \cdots - F_s df_s.$$

Bedeutet jetzt u eine Funktion der $2m$ Variabeln x_i, p_i, so folgt aus Art. 393 die Identität:

$$\delta u = (f_1, u)\delta F_1 + \cdots + (f_s, u)\delta F_s - (F_1, u)\delta f_1 - \cdots - (F_s, u)\delta f_s,$$

oder, wenn man u durch f_i ersetzt:

$$\delta f_i = - (F_1 f_i)\delta f_1 - \cdots - (F_s f_i)\delta f_s \qquad (i = 1 \ldots \nu),$$

woraus ähnlich wie in Art. 393 folgt:

$$(F_i f_i) = -1; \; (F_h f_i) = 0 \qquad (h = 1, \ldots s; \; i = 1, \ldots \nu; \; i \gtrless h).$$

Demnach sind sämtliche Funktionen:

$$(18) \qquad f_1, f_2, \ldots f_\nu, F_{\nu+1}, F_{\nu+2}, \ldots F_s$$

Lösungen des vollständigen Systems (13); überdies befinden sich darunter genau $2m - \nu$ unabhängige Funktionen, d. h. 2σ und nicht weniger von den Funktionen $F_{\nu+1}, \ldots F_s$ lassen sich durch die übrigen Funktionen (18) ausdrücken. Beachten wir ferner die aus (16) folgenden Identitäten:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_k} = p_k - \sum^i F_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k}; \; - \frac{\partial \Omega}{\partial p_k} \equiv \sum^i F_i \frac{\partial f_i}{\partial p_k},$$

so erhalten wir der Reihe nach:

$$[f_i, z - \Omega] \equiv \sum_1^m{}^k p_k \frac{\partial f_i}{\partial p_k} - \sum_1^m{}^k \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_k}\frac{\partial \Omega}{\partial x_k} - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{\partial \Omega}{\partial p_k}\right)$$

$$\equiv \sum_1^s{}^h F_h(f_i f_h) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots \nu).$$

Demnach stellen die Funktionen (18) zusammen mit $z - \Omega$ alle $2m + 1 - \nu$ unabhängigen Lösungen des ν-gliedrigen vollständigen Systems:

$$[f_1 f] = 0 \;..\; [f_\nu f] = 0$$

dar. Sind also die Funktionen $f_{r+1}, \,..\, f_s$, Ω bekannt, so erfordert die Integration des gegebenen Involutionssystems (12) nur mehr Eliminationen (Art. 367); damit ist gezeigt:

Kennt man von dem ν-gliedrigen vollständigen System:

$$(13) \qquad (f_1 f) = 0, \;..\; (f_\nu f) = 0,$$

die r unabhängigen Lösungen $f_1 \,..\, f_\nu$, $f_{\nu+1} \,..\, f_r$, so erfordert die Integration des ν-gliedrigen Involutionssystems vom Typus β):

$$(12) \qquad f_i(x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m) = c_i \qquad (i = 1, 2, \,..\, \nu)$$

je eine Operation:

$$2m - 2r + 2\sigma,\; 2m - 2r + 2\sigma - 2,\; ..\; 4,\; 2,\; 0,$$

wenn mit 2σ der Rang der Matrix:

$$\| (f_i f_k) \| \qquad (i, k = \nu + 1, \nu + 2, \,..\, r)$$

bezeichnet wird.

Der Typus γ) gestattet unter Umständen noch weitere Integrationsvereinfachungen; doch wollen wir die Betrachtung dieses Falls auf den übernächsten § verschieben.

§ 2. Nichthomogene Funktionengruppen.[1]

397. Es seien $u_1, u_2, \,..\, u_k$ $(k < 2m)$ irgend welche unabhängige Funktionen der $2m$ Variabeln:

$$(1) \qquad x_1, x_2, \,..\, x_m, p_1, p_2, \,..\, p_m.$$

Bildet man alle Klammerausdrücke $(u_i u_k)$ und bezeichnet diejenigen unter ihnen, die von den übrigen und von den u unabhängig sind, mit $u_{k+1}, \,..\, u_{k'}$, so läſst sich auf das Funktionensystem $u_1 \,..\, u_{k'}$ dasselbe Verfahren anwenden, etc., und man gelangt nach einer endlichen Anzahl von Operationen schlieſslich zu einem Funktionensystem:

$$(2) \qquad u_1, u_2, \,..\, u_r \qquad (r \leqq 2m)$$

von folgenden Eigenschaften:

1) Die Funktionen $u_1 \,..\, u_r$ sind hinsichtlich der $2m$ Variabeln (1) von einander unabhängig;

1) Lie II, Abteilung 2.

2) es bestehen Beziehungen folgender Form:

$$(3) \qquad (u_i u_k) = f_{ik}(u_1, u_2, \ldots u_r) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots r),$$

d. h. alle Klammerausdrücke $(u_i u_k)$ lassen sich als Funktionen der u allein darstellen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so nennen wir den Inbegriff aller Funktionen der Form:

$$\varphi(u_1 u_2 \ldots u_r),$$

(wo φ eine arbiträre Funktion der beigefügten Argumente bezeichnet), eine „*r-gliedrige Funktionengruppe*". Wir sagen ferner, die r Funktionen (2) „*definiren*" oder „*bilden*" eine r-gliedrige Funktionengruppe; diese letztere bezeichnen wir auch kurz als „die Funktionengruppe $u_1 \ldots u_r$".

Aus dieser Definition und aus dem *Poisson*'schen Theorem (Art 272, Satz 1) folgt jetzt unmittelbar: Sind außer $f_1 \ldots f_\nu$ irgend welche weiteren Integrale $f_{\nu+1}, f_{\nu+2} \ldots$ des ν-gliedrigen Jacobi'schen Systems:

$$(f_i f) = 0 \qquad (i = 1, \ldots \nu;\ f_i \text{ Funktionen der Variabeln (1)})$$

gegeben, so definiren die $f_1 \ldots f_\nu, f_{\nu+1} \ldots$ entweder an sich schon eine Funktionengruppe, oder die wiederholte Anwendung des *Poisson*'schen Satzes liefert eine gewisse Anzahl neuer Integrale, die mit den vorigen zusammen eine Funktionengruppe bilden.

In allen Fällen dürfen wir daher in den Entwickelungen der Art. 395 und 396, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, daß die dort mit $f_1 \ldots f_r$ bezeichneten Lösungen eine r-gliedrige Funktionengruppe bilden.

Um zu zeigen, welche weiteren Vereinfachungen sich für die Integrationstheorien des vorigen § durch die Heranziehung des *Poisson*'schen Theorems ergeben, wollen wir in den fünf nächsten Artikeln die wichtigsten Eigenschaften der Funktionengruppen zusammenstellen.

398. Wir wollen die r-gliedrige Funktionengruppe (2) mit G bezeichnen. Bedeuten dann φ, ψ irgend zwei Funktionen von G, so hat man:

$$(\varphi\psi) = \sum\sum \frac{\partial\varphi}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial u_k}(u_i u_k) \qquad (i, k = 1 \ldots r),$$

also ist $(\varphi\psi)$ wiederum eine Funktion von G. Man schließt daraus leicht: Die gegebene r-gliedrige Gruppe G kann auch durch jedes beliebige, in ihr enthaltene System von r unabhängigen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r$ definirt werden.

Ferner gilt der wichtige Satz: *Damit die partiellen Differentialgleichungen:*

$$(4) \qquad (u_1 f) = 0 \;.\,.\; (u_r f) = 0$$

ein r-gliedriges vollständiges System bilden, ist hinreichend und notwendig, dafs die Funktionen (2) *eine r-gliedrige Funktionengruppe definiren.*

In der That, schreibt man $U_i f$ statt $(u_i f)$, so nimmt die Jacobi'sche Identität (Art. 270):

$$(u_i(u_k f)) + (u_k(f u_i)) + (f(u_i u_k)) \equiv 0$$

folgende Gestalt an:

$$U_i U_k f - U_k U_i f \equiv ((u_i u_k) f).$$

Damit nun die Gleichung $((u_i u_k) f) = 0$ eine Folge von (4) sei, ist nach Art. 39 offenbar notwendig, dafs der Ausdruck $(u_i u_k)$ eine Funktion von $u_1 \,.\,.\, u_r$ allein sei. Umgekehrt, gilt die Beziehung (3), so hat man:

$$((u_i u_k) f) \equiv \sum_h \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_h} U_h f,$$

was zu zeigen war.

Sind die Funktionen:

$$(5) \qquad v_1, v_2, \,.\,.\, v_{2m-r}$$

die $2m - r$ unabhängigen Lösungen des vollständigen Systems (4), so ist nach dem Poisson'schen Satze auch jeder Ausdruck $(v_i v_k)$ eine Lösung von (4), also eine Funktion der Gröfsen (5), m. a. W.: die Funktionen (5) bilden eine $2m - r$-gliedrige Funktionengruppe Γ, welche die *Polargruppe von G* genannt wird. Offenbar ist auch umgekehrt G mit der Polargruppe von Γ identisch.

Eine in der Gruppe G enthaltene Funktion w, welche auch der Gruppe Γ angehört, also mit allen Funktionen der Gruppe G (und der Gruppe Γ) sich in Involution befindet, heifst eine *ausgezeichnete Funktion* der Gruppe G. Eine solche Funktion ist offenbar auch eine ausgezeichnete Funktion von Γ.

Um alle ausgezeichneten Funktionen von G zu finden, hat man alle diejenigen Lösungen f des vollständigen Systems (4) aufzusuchen, die Funktionen von $u_1 \,.\,.\, u_r$ allein sind. Man hat nun unter der Annahme, dafs f nur von den u abhängt:

$$(u_i f) \equiv \sum_k (u_i u_k) \frac{\partial f}{\partial u_k} \qquad (i, k = 1, 2, \,.\,.\, r).$$

Ist jetzt 2σ der Rang der alternirenden Matrix:

$$(6) \qquad \| (u_i u_k) \| \qquad (i, k, = 1, 2, \,.\,.\, r),$$

so stellen die Gleichungen:

$$(7)\qquad \sum_k (u_i u_k)\frac{\partial f}{\partial u_k} = 0 \qquad (i, k = 1, .. r)$$

ein 2σ-gliedriges System linearer partieller Differentialgleichungen mit den Independenten $u_1 .. u_r$ dar, dessen Koeffizienten wegen (3) nur von den u abhängen. Dieses System ist *vollständig*. Denn bezeichnet $U_i f$ die linke Seite von (7), so folgt mit Hülfe der Jacobi'schen Identität unter der Annahme eines nur von den u abhängigen f und mit Rücksicht auf (3):

$$U_i U_k f - U_k U_i f \equiv ((u_i u_k) f) = \sum_h \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_h} U_h f.$$

Demnach können wir folgenden Satz aussprechen:

Besitzt die Matrix (6) *den Rang* 2σ, *so enthält die* r-*gliedrige Funktionengruppe* G (*oder, was dasselbe besagt, ihre Polargruppe*):

$$\varrho = r - 2\sigma$$

und nicht mehr unabhängige ausgezeichnete Funktionen:

$$(8)\qquad w_1, w_2, .. w_\varrho,$$

und die allgemeinste ausgezeichnete Funktion ist eine arbiträre Funktion der letzteren.

Die Zahl σ ist für $r > m$ nicht kleiner als $r - m$ (Art. 241); darnach ist die Anzahl ϱ der ausgezeichneten Funktionen im Falle $r > m$ höchstens gleich $2m - r$; im Falle $r \leqq m$ dagegen kann sie gleich r sein, und die Funktionen (2) bilden dann ein Involutionssystem.

Die Funktionen (8) bilden ein ϱ gliedriges Involutionssystem, also stellen die Gleichungen:

$$(9)\qquad (w_1 f) = 0, .. (w_\varrho f) = 0$$

ein ϱ-gliedriges vollständiges System mit den Independenten (1) dar. Sind die Funktionen (8) unbekannt, so läfst sich gleichwohl ohne Integration ein vollständiges System aufstellen, das mit (9) äquivalent ist. Unter den oben gemachten Annahmen besitzen nämlich die r linearen Gleichungen:

$$\eta_1(u_1 u_k) + \eta_2(u_2 u_k) + \cdots + \eta_r(u_r u_k) = 0 \qquad (k = 1, \cdots r)$$

genau ϱ linear unabhängige Lösungensysteme:

$$\eta_1^{(h)}, \eta_2^{(h)} .. \eta_r^{(h)} \qquad (h = 1, .. \varrho),$$

und das Gleichungensystem:

$$(10)\qquad \eta_1^{(h)}(u_1 f) + \cdots + \eta_r^{(h)}(u_r f) = 0 \qquad (h = 1, .. \varrho)$$

ist, wie wir behaupten, mit (9) äquivalent.

In der That, das System (10) ist zunächst ebenfalls ϱ-gliedrig, da andernfalls, wie man leicht erkennt, die Gleichungen (9) nicht linear unabhängig wären. Ferner sind sämtliche Funktionen:

$$(11)\qquad u_1, u_2, \ldots u_r, v_1, v_2, \ldots v_{2m-r}$$

Integrale sowohl des Systems (9), als auch des Systems (10). Unter den Funktionen (11) sind also höchstens $2m - \varrho$ unabhängige vorhanden. Dafs aber die Funktionen (11) sich nicht auf weniger als $2m - \varrho$ unabhängige reduziren können, folgt daraus, dafs andernfalls die Funktionen (11) zusammen eine weniger als $2m - \varrho$-gliedrige Funktionengruppe definiren würden, die Polargruppe derselben also mehr als ϱ Funktionen enthielte; die letzteren wären aber ausgezeichnete Funktionen von G, und dies widerspricht der oben bewiesenen Thatsache, dafs die Anzahl der unabhängigen ausgezeichneten Funktionen von G nicht gröfser als ϱ sein kann.

Demnach haben die beiden ϱ-gliedrigen Systeme (9) und (10) dieselben $2m - \varrho$ unabhängigen Lösungen und sind also äquivalent.

Der hiermit gleichzeitig nachgewiesene Satz, dafs das System (10) vollständig ist, erweist sich übrigens auch als ein einfaches Korollar der in Kap. IX, § 4 entwickelten allgemeinen Theorie.

399. Vermöge einer beliebigen Berührungstransformation der Form:

$$(12)\qquad z' = z + \Omega(x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m);\; x_\iota' = X_\iota(x, p);\; p_\iota' = P_\iota(x, p),$$

(vgl. Art. 201) verwandele sich u_i in $u_i'(x_1' \ldots x_m' p_1' \ldots p_m')$; nach Art. 276 hat man dann vermöge (12) identisch:

$$(u_i u_k)_{xp} \equiv (u_i' u_k')_{x'p'},$$

und die Relationen (3) liefern sonach:

$$(u_i' u_k')_{x'p'} \equiv f_{ik}(u_1' u_2' \ldots u_r') \qquad (i, k = 1 \ldots r),$$

d. h. die u_i' bilden, als Funktionen der x', p' betrachtet, wiederum eine r-gliedrige Funktionengruppe. Offenbar besitzt auch die Matrix:

$$(13)\qquad \| (u_i' u_k')_{x'p'} \| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots r)$$

wiederum der Rang 2σ. Wir wollen nun in diesem und dem folgenden Artikel den Satz beweisen;

Damit zwei r-gliedrige Funktionengruppen:

$$(G)\qquad u_i(x_1 x_2 \ldots x_m p_1 p_2 \ldots p_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

$$(G')\qquad u_i'(x_1' x_2' \ldots x_m' p_1' p_2' \ldots p_m') \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

vermöge einer Berührungstransformation (12) *in einander übergeführt werden können, ist nicht nur* (wie soeben gezeigt wurde) *notwendig,* *sondern auch hinreichend, dafs die Anzahl der unabhängigen ausgezeichneten Funktionen für beide Gruppen dieselbe sei, d. h. also, dafs die Matrices* (6) *und* (13) *beide denselben Rang* 2σ *besitzen.*

Der Satz ist für $\sigma = 0$ schon bewiesen worden, da dann $r \leqq m$ und die beiden Gruppen G, G' je ein r-gliedriges Involutionssystem bilden (Art. 357).

Wir beschränken uns daher auf die Annahme $\sigma \geqq 1$. Dann existirt in G jedenfalls *eine* Funktion u_1 derart, dafs nicht alle Klammern:

$$(u_1 u_2),\ (u_1 u_3),\ \ldots\ (u_1 u_r)$$

identisch verschwinden, und es giebt dann in G auch eine Funktion F, die der Bedingung:

$$(u_1 F) = 1$$

genügt. In der That schreibt sich diese Bedingung so:

$$(u_1 u_2)\frac{\partial F}{\partial u_2} + \cdots + (u_1 u_r)\frac{\partial F}{\partial u_r} = 1,$$

und dies ist nach dem eben Gesagten eine nichthomogene, lineare partielle Differentialgleichung, die jedenfalls gewisse Lösungen F zuläfst. Wählen wir eine derselben, und schreiben wir u_2 statt F, so hat man

$$(u_1 u_2) = 1$$

und die linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(14)\quad 0 = (u_1 f) = \sum_1^r{}_h (u_1 u_h)\frac{\partial f}{\partial u_h};\ 0 = (u_2 f) = \sum_1^r (u_2 u_h)\frac{\partial f}{\partial u_h}$$

bilden nach dem vorigen Art. ein zweigliedriges vollständiges System mit $r-2$ in G enthaltenen Integralen $\bar{u}_3, u_4, \ldots \bar{u}_r$. Offenbar sind die Funktionen:

$$(15)\qquad u_1,\ u_2,\ \bar{u}_3,\ \bar{u}_4,\ \ldots\ \bar{u}_r$$

unabhängig. Denn es ist u_1 keine Funktion der $\bar{u}_h$ allein, da u_1 dem System (14) nicht genügt; ebensowenig hat man:

$$u_1 = \psi(u_2, \bar{u}_3 \ldots \bar{u}_r),$$

da hieraus folgen würde:

$$1 \equiv (u_1 u_2) \equiv \sum_3^m{}_h \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}_h}(\bar{u}_h u_2) \equiv 0,$$

und analoges gilt auch für u_2. Darnach ist die Gruppe G auch durch die Funktionen (15) definirt. Die Funktionen $\bar{u}$ bilden nach dem *Poisson*'schen Theorem als Integrale des vollständigen Systems (14) für sich eine $r-2$-gliedrige Gruppe $\overline{G}$, deren ausgezeichnete Funktionen offenbar mit denen der Gruppe G identisch sind. Auf $\overline{G}$ können wir jetzt dieselbe Schlufsweise anwenden, wie soeben auf G u. s. w., und erhalten durch Änderung der Bezeichnungsweise folgendes Theorem:

Jede r-gliedrige Gruppe G mit $\varrho = r - 2\sigma$ ausgezeichneten Funktionen kann die Form erhalten:

$$(16) \qquad \begin{cases} X_1, P_1;\ X_2, P_2;\ \ldots X_\sigma, P_\sigma; \\ X_{\sigma+1},\ X_{\sigma+2},\ \ldots X_{\sigma+\varrho}, \end{cases}$$

wobei die folgenden Identitäten bestehen:

$$(17) \qquad 0 \equiv (X_i P_h) \equiv (X_i X_l) \equiv (P_k P_j);\ 1 \equiv (P_k X_k)$$
$$(i, l = 1 \ldots \varrho + \sigma;\ h, k, j = 1 \ldots \sigma;\ i \gtrless h).$$

Jede Darstellung (16) unserer Gruppe G heifst eine *kanonische Form* derselben; die ϱ ausgezeichneten Funktionen derselben sind $X_{\sigma+1} \ldots X_{\sigma+\varrho}$.

400. Ist $\varrho > 0$, d. h. enthält G überhaupt ausgezeichnete Funktionen, so entsteht durch Weglassung von $X_{\sigma+1}$ aus (16) eine $r-1$-gliedrige Gruppe G_0, deren Polargruppe Γ_0 unter anderm auch die Funktion $X_{\sigma+1}$ enthält. Da diese Funktion in G_0 nicht vorkommt, so ist sie in Γ_0 nicht ausgezeichnet; mithin giebt es nach dem vorigen Artikel in Γ_0 eine Funktion $P_{\sigma+1}$ derart, dafs identisch:

$$(P_{\sigma+1} X_{\sigma+1}) \equiv 1.$$

Fügt man $P_{\sigma+1}$ zu (16) hinzu, so entsteht eine $r+1$-gliedrige Gruppe mit den ausgezeichneten Funktionen $X_{\sigma+2} \ldots X_{\sigma+\varrho}$; wendet man auf diese letztere dieselbe Schlufsweise an, wie soeben auf G, etc., so erkennt man die Richtigkeit des Satzes:

„Zu jeder r-gliedrigen Gruppe G mit ϱ ausgezeichneten Funktionen, die auf die kanonische Form (16) gebracht ist, lassen sich ϱ Funktionen $P_{\sigma+1} \ldots P_{\sigma+\varrho}$ hinzufügen, derart, dafs die Funktionen:

$$(18) \qquad P_1, X_1;\ P_2, X_2;\ \ldots P_{\varrho+\sigma}, X_{\varrho+\sigma}$$

die kanonische Form einer $2r - 2\sigma$-gliedrigen Gruppe ohne ausgezeichnete Funktionen definiren.“

Ist jetzt $X_{\sigma+\varrho+1}$ eine beliebige Funktion der zu (18) gehörigen Polargruppe, so bilden die Funktionen:

$$P_1, X_1;\ \ldots P_{\varrho+\sigma}, X_{\varrho+\sigma};\ X_{\varrho+\sigma+1}$$

die kanonische Form einer Funktionengruppe mit der *einen* ausgezeichneten Funktion $X_{\varrho+\sigma+1}$; auf diese Gruppe können wir jetzt wieder den soeben ausgesprochenen Satz anwenden, etc., und gelangen schliefslich zu dem Resultat:

Zu jeder r-gliedrigen Funktionengruppe mit der kanonischen Form:

(16) $$X_1, P_1; \,.\,.\, X_\sigma, P_\sigma; \; X_{\sigma+1}, \,.\,.\, X_{\sigma+\varrho} \qquad (\varrho = r - 2\sigma),$$

lassen sich $2m - r$ *weitere Funktionen:*

(19) $$X_{\sigma+\varrho+1}, \,.\,.\, X_m; \; P_{\sigma+1} \,.\,.\, P_m$$

derart hinzufügen, dafs die $2m$ *Funktionen* (16) (19) *unabhängig sind, und den Relationen*

(20) $$(P_k X_i) = \delta_{ik}; \; (P_i P_k) = (X_i X_k) = 0 \quad (i, k = 1 \,.\,.\, m)$$

identisch genügen. Damit erhält man gleichzeitig eine kanonische Form der Polargruppe von G:

$$P_{\sigma+\varrho+1}, X_{\sigma+\varrho+1}; \,.\,.\, P_m, X_m; \; X_{\sigma+1}, \,.\,.\, X_{\sigma+\varrho}.$$

Nunmehr kann man mittels einer Quadratur (Art. 291) eine Funktion $\Omega(x_1 \,.\,.\, p_m)$ so bestimmen, dafs die Relationen:

(21) $$\zeta = z + \Omega; \; \xi_i = X_i; \; \pi_i = P_i \qquad (i = 1, \,.\,.\, m)$$

eine Berührungstransformation der $2m + 1$ Variabeln z, x_i, p_i darstellen. Durch diese Transformation erhält G die Form:

(22) $$\xi_1, \pi_1; \,.\,.\, \xi_\sigma, \pi_\sigma; \; \xi_{\sigma+1} \,.\,.\, \xi_{\sigma+\varrho}.$$

Ist jetzt G' eine zweite r-gliedrige Funktionengruppe:

$$u_i'(x_1' \,.\,.\, x_m', p_1' \,.\,.\, p_m') \qquad (i = 1, \,.\,.\, r)$$

in den Variabeln $x_i' p_i'$ und mit $\varrho = r - 2\sigma$ ausgezeichneten Funktionen, so gibt es nach dem eben Gesagten eine Berührungstransformation:

(23) $$\zeta = z' + \Omega'(x'p'); \; \xi_i = X_i'(x'p'); \; \pi_i = P_i'(x'p') \qquad (i = 1 \,.\,.\, m),$$

vermöge deren auch G' die Form (22) annimmt. Löst man also die Gleichungen:

$$z + \Omega = z' + \Omega'; \; X_i = X_i'; \; P_i = P_i' \qquad (i = 1 \,.\,.\, m)$$

nach einer der beiden Variabelngruppen $z' x_i' p_i'$, $z x_i p_i$ auf, so entsteht eine Berührungstransformation (Art. 201), welche die Funktionengruppe G direkt in G' überführt, womit der Satz des Art. 399 bewiesen ist. Wir wollen das erhaltene Resultat noch in folgender Form aussprechen:

Gegenüber beliebigen Berührungstransformationen der Form (12) *besitzt eine Funktionengruppe keine andere invariante Eigenschaft, als ihre Gliederzahl und die Anzahl ihrer unabhängigen ausgezeichneten Funktionen.*

401. Aus der kanonischen Form (16) ist ersichtlich, dafs die Gruppe G ein $r - \sigma$-gliedriges Involutionssystem

$$X_1, X_2, .. X_{\varrho+\sigma} \qquad (\varrho + \sigma = r - \sigma)$$

enthält. Soll umgekehrt in G ein ν-gliedriges Involutionssystem:

$$\Phi_1, \Phi_2, .. \Phi_\nu$$

enthalten sein, und denkt man sich wie im vorigen Artikel die Funktionen (19) bestimmt, so wird durch:

$$\Phi_1, \Phi_2, .. \Phi_\nu, X_{\varrho+\sigma+1}, X_{\varrho+\sigma+2} .. X_m$$

ein $m - \varrho - \sigma + \nu$-gliedriges Involutionssystem dargestellt, also hat man:

$$m - \varrho - \sigma + \nu \leqq m; \text{ d. h. } \nu \leqq r - \sigma.$$

Damit also eine r-gliedrige Funktionengruppe $u_1 .. u_r$ ein ν-gliedriges Involutionssystem enthalte, ist notwendig und hinreichend, dafs der Rang 2σ der Matrix $\| (u_\iota u_k) \|$ die Zahl $2r - 2\nu$ nicht übersteige.

Um das allgemeinste in G enthaltene $\varrho + \sigma$-gliedrige Involutionssystem:

$$(24) \qquad \Phi_1, \Phi_2, .. \Phi_{\varrho+\sigma} \qquad (\varrho = r - 2\sigma)$$

zu bestimmen, bemerken wir, dafs jede ausgezeichnete Funktion w_ι der Gruppe G in der $\varrho + \sigma$-gliedrigen Funktionengruppe (24) enthalten sein mufs; andernfalls nämlich enthielte G im Widerspruch mit dem vorhin Gesagten ein $\varrho + \sigma + 1$-gliedriges Involutionssystem. Wir können daher die Funktionengruppe (24) auf die Form:

$$w_1, w_2, .. w_\varrho, \Phi_1, \Phi_2, .. \Phi_\sigma$$

gebracht denken. Für Φ_1 wählen wir eine beliebige nicht ausgezeichnete Funktion von G. Unter der Annahme, dafs f eine Funktion von $u_1 .. u_r$ sei, schreibt sich die Gleichung $(\Phi_1 f) = 0$ folgendermafsen:

$$(\Phi_1 f) \equiv (\Phi_1 u_1) \frac{\partial f}{\partial u_1} + \cdots + (\Phi_1 u_r) \frac{\partial f}{\partial u_r} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt die schon bekannten Integrale $\Phi_1, w_1 .. w_\varrho$, und die Bestimmung eines neuen Integrals Φ_2 fordert eine Operation:

$$r - \varrho - 2 = 2\sigma - 2.$$

Ist Φ_2 als Funktion von $u_1 .. u_r$ gefunden, so bilden die Gleichungen:

$$(\Phi_i f) \equiv \sum_h (\Phi_i u_h) \frac{\partial f}{\partial u_h} = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

ein zweigliedriges vollständiges System mit den Independenten u_i und den bekannten Integralen $\Phi_1, \Phi_2, w_1, \ldots w_\varrho$; ein neues Integral wird also durch eine Operation $2\sigma - 4$ ermittelt etc.

Die Herstellung des allgemeinsten in G enthaltenen $\varrho + \sigma$-gliedrigen Involutionssystems verlangt also, wenn wir die zur Bestimmung der w nötigen Operationen hinzurechnen, je eine Operation

$$\varrho, \varrho - 1, \ldots 2, 1; 2\sigma - 2, 2\sigma - 4, \ldots 4, 2.$$

402. Soll G ein m-gliedriges Involutionssystem enthalten, so mufs $\sigma \leqq r - m$ sein; da aber andererseits $\sigma \geqq r - m$, so gilt der wichtige Satz:

Eine Funktionengruppe, deren Gliederzahl $r \geqq m$ ist, enthält dann und nur dann ein m-gliedriges Involutionssystem, wenn die Matrix (6) den Rang $2\sigma = 2r - 2m$ besitzt.

Hieraus und aus den allgemeinen Sätzen von Kap. IX, § 4 (vgl. auch den vorigen §) folgt jetzt ohne weiteres:

Enthält die r-gliedrige Funktionengruppe $u_1 \ldots u_r$ ein m-gliedriges Involutionssystem, dann und nur dann besteht eine Identität der Form

$$d\Omega + U_1 du_1 + \cdots + U_r du_r \equiv p_1 dx_1 + \cdots p_m dx_m, \tag{25}$$

worin die Ω, U_i gewisse Funktionen der $2m$ Variabeln x, p bedeuten.

Um aber in derselben Ideenfolge zu bleiben, wollen wir diesen Satz auch noch ohne Zuhilfenahme der allgemeinen Theorie des Pfaff'schen Problems erweisen.

Enthält die Funktionengruppe G ein m-gliedriges Involutionssystem:

$$X_1, X_2, \ldots X_m,$$

so besteht nach Art. 291 eine Identität

$$dV + P_1 dX_1 + \cdots + P_m dX_m \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m. \tag{26}$$

Da aber die X sich als Funktionen der u_i darstellen lassen, so besteht auch eine Identität (25).

Wir nehmen jetzt umgekehrt an, dafs die u_i eine Identität der Form (25) befriedigen. Ist dann

$$X_1, X_2, \ldots X_\alpha; P_1, P_2, \ldots P_\beta \qquad (\alpha + \beta = r;\ \beta \leqq \alpha) \tag{27}$$

eine nach Art. 399 zu ermittelnde kanonische Form von G, so lassen sich $2m - r$ Funktionen

$$X_{\alpha+1} \ldots X_m; P_{\beta+1} \ldots P_m \tag{28}$$

so bestimmen, dafs die X, P die rechten Seiten einer Berührungstransformation darstellen, d. h. dafs eine Identität (26) stattfindet.

Drückt man andererseits die u_ι durch die Funktionen (27) aus, so nimmt die Identität (25) folgende Form an:

$$d\Omega + \sum_1^\alpha {}^h A_h dX_h + \sum_1^\beta {}^k B_k dP_k \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m.$$

Subtrahirt man hiervon die Identität (26), so folgt:

$$d(\Omega - V) + \sum_1^\alpha {}^h (A_h - P_h) dX_h - \sum_{\alpha+1}^m {}^\iota P_\iota dX_\iota + \sum_1^\beta {}^k B_k dP_k \equiv 0.$$

Denkt man sich jetzt $\Omega - V$, A_h, B_k als Funktionen der $2m$ Variabeln (27) (28) ausgedrückt, und ist $\alpha < m$ (also auch $\beta < m$), so schliefsen wir aus obiger Identität:

$$\frac{\partial(\Omega - V)}{\partial P_m} \equiv 0; \quad \frac{\partial(\Omega - V)}{\partial X_m} \equiv P_m,$$

was nicht möglich ist. Also hat man $\alpha = m$, d. h. G enthält ein m-gliedriges Involutionssystem, was zu zeigen war.

403. Die in den Artikeln 398—402 entwickelte Theorie der Funktionengruppen setzt uns in den Stand, die Integrationsmethoden des vorigen § nicht nur auf einem neuen, von der allgemeinen Theorie des Pfaff'schen Problems unabhängigen Wege zu begründen, sondern gleichzeitig in einigen wesentlichen Punkten zu vervollständigen.

Werden wie im vorigen § die Integrale

(29) $$f_1, f_2, \ldots f_\nu, f_{\nu+1}, f_{\nu+2}, \ldots f_r \qquad (r < 2m - \nu)$$

des ν-gliedrigen Jacobi'schen Systems

(30) $$(f_1 f) = 0, \ldots (f_\nu f) = 0$$

als bekannt vorausgesetzt, so können wir nach Art. 397 von vorneherein annehmen, dafs die Funktionen (29) eine r-gliedrige Funktionengruppe G definiren. Diese Gruppe G enthält die ausgezeichneten Funktionen $f_1 \ldots f_\nu$ und aufserdem noch

$$\tau = r - 2\sigma - \nu$$

andere, wenn 2σ den Rang der Matrix

(31) $$\| (f_\iota f_k) \| \qquad (i, k = \nu + 1, \ldots r)$$

bezeichnet. Es seien $w_1, w_2, \ldots w_\tau$ diese (unbekannten) ausgezeichneten Funktionen. Ist $r \geq m$, und $\sigma = r - m$, so enthält G ein m-gliedriges Involutionssystem, und es folgt aus Art. 402 (oder auch aus 395) das Bestehen einer Identität

(32) $$d\Omega + F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m.$$

Mithin läfst sich die Integration des gegebenen Involutionssystems

(33) $$f_i(x_1 \,.\,. x_m p_1 \,.\,. p_m) = c_i \qquad (i = 1 \,.\,. \nu)$$

nach Art. 396 durch eine Quadratur erledigen.

Es sei jetzt $\sigma > r - m$. Bestimmen wir dann nach Art. 398 das $\nu + \tau$-gliedrige vollständige System, welches mit

(34) $$(f_1 f) = 0, \,.\,. (f_\nu f) = 0, (w_1 f) = 0, \,.\,. (w_\tau f) = 0$$

äquivalent ist, so werden wir auf das System (17) (pag. 550) des vorigen § zurückgeführt. Wir wollen dieses System zur Abkürzung mit J bezeichnen.

Nun ermitteln wir wie in Art. 395 durch eine Operation

(35) $$2m - \nu - \tau - r = 2m - 2r + 2\sigma$$

ein beliebiges, von $f_1 \,.\,. f_r$ unabhängiges Integral f_{r+1} des Systems J; ein solches Integral existirt natürlich dann und nur dann, wenn $2m - \nu - \tau > r$, d. h. wenn $\sigma > r - m$, was vorausgesetzt wurde. Da nun $f_{\nu+1} \,.\,. f_{r+1}$ dem System (34) (d. h. dem System J) genügen, so sind auch alle Funktionen

$$(f_{\nu+1} f_{r+1}), (f_{\nu+2} f_{r+1}) \,.\,. (f_r f_{r+1})$$

nach dem *Poisson*'schen Theorem Integrale von J, und es ist möglich, dafs man solcherweise neue Integrale erhält, ferner, dafs diese neuen Integrale unter sich und mit den alten kombinirt, wiederum neue Lösungen ergeben etc. Solcherweise erhält man in allen Fällen ein System von Funktionen:

(36) $$f_1 \,.\,. f_\nu, f_{\nu+1}, \,.\,. f_r, f_{r+1}, \,.\,. f_{r_1} \qquad (r_1 > r),$$

die eine r_1-gliedrige Gruppe G_1 bilden. Die Funktionen $f_1 \,.\,. f_\nu$, $w_1 \,.\,. w_\tau$ sind offenbar auch innerhalb G_1 ausgezeichnet. Aufserdem aber kann G_1 noch andere ausgezeichnete Funktionen

$$w_{\tau+1}, \,.\,. w_{\tau_1}$$

enthalten. Die Zahl τ_1 wird durch Ermittelung der Rangzahl $2\sigma_1$ der $r_1 - \nu$-reihigen alternirenden Matrix

$$\| (f_i f_k) \| \qquad (i, k = \nu + 1, \nu + 2, \,.\,. r_1)$$

in der Form

(37) $$\tau_1 = r_1 - 2\sigma_1 - \nu$$

erhalten. Wir bilden jetzt das $\nu + \tau_1$-gliedrige vollständige System J_1, das zu G_1 in derselben Beziehung steht, wie J zu G, also mit den Gleichungen

$$(f_1 f) = 0, \ldots (f_\nu f) = 0, (w_1 f) = 0, \ldots (w_{\tau_1} f) = 0$$

äquivalent ist. Dieses System umfafst J und besitzt die r_1 bekannten Integrale (36). Ist nun

$$2m - \nu - \tau_1 > r_1, \text{ d. h. } \sigma_1 > r_1 - m \quad \text{(vgl. die Relation (37))},$$

so besitzt J_1 wenigstens *ein* von den Funktionen (36) unabhängiges Integral f_{r_1+1}. Dieses wird durch eine Operation

$$2m - \nu - \tau_1 - r_1 = 2m - 2r_1 + 2\sigma_1$$

gefunden. Nun ist aber $\nu + \tau_1 + r_1$ eine gerade Zahl, und $>$ als die ebenfalls gerade Zahl $\nu + \tau + r$, also folgt mit Rücksicht auf (35): Die Ordnung der Integrationsoperation, durch die f_{r_1+1} gefunden wird, ist um eine gerade Zahl, mindestens aber um zwei kleiner als die Zahl $2m - 2r + 2\sigma$.

Die Funktion f_{r_1+1} giebt nun, ähnlich wie vorhin, zu einer Funktionengruppe

$$f_1, \ldots f_{r_1+1} \ldots f_{r_2} \qquad (r_2 > r_1)$$

Anlafs, die mit G_2 bezeichnet werde; auf diese können wir dieselbe Schlufsweise anwenden, wie vorhin auf G_1 etc. und erhalten solcherweise eine gewisse Serie von Funktionengruppen

$$G, \; G_1, \; G_2, \ldots$$

bezw. mit den Gliederzahlen

$$r, \; r_1, \; r_2, \ldots \qquad (r < r_1 < r_2 < \ldots).$$

Zu diesen Gruppen, von denen jede alle vorangehenden enthält, gehören gewisse vollständige Systeme

$$J, \; J_1, \; J_2, \ldots$$

welche bezw. aus $\nu + \tau$, $\nu + \tau_1$, .. Gleichungen bestehen, und von denen jedes alle vorhergehenden enthält; ferner hat man

$$\tau \leqq \tau_1 \leqq \tau_2 \leqq \ldots$$

Das vollständige System J_h besitzt aufser den r_h Funktionen der Gruppe G_h noch weitere Integrale, deren Anzahl gleich

$$(38) \qquad 2m - \nu - \tau_h - r_h = 2m - 2r_h + 2\sigma_h$$

ist, worin $2\sigma_h$ den Rang der alternirenden Matrix

$$\| (f_i f_k) \| \qquad (i, k = \nu + 1, \; \nu + 2, \ldots r_h)$$

bedeutet. Aus den Ungleichungen, denen die r und τ genügen, folgt, dafs die Anzahl (38), wenn h um eine Einheit wächst, mindestens um zwei, immer aber um eine gerade Zahl abnimmt. Also mufs es einen Index h von der Beschaffenheit geben, dafs die Zahl (38) gleich null wird. Wegen

$$2m - \nu - \tau_h - r_h = 0$$

folgt dann aus der Beziehung (38)

$$\sigma_h = r_h - m,$$

d. h. die Gruppe G_h enthält ein m-gliedriges Involutionssystem (Art. 402), und die Integration des ursprünglich gegebenen Involutionssystems (33) erledigt sich durch eine Quadratur.

Daraus ergiebt sich nachstehendes Theorem:

Kennt man von dem ν-gliedrigen vollständigen System

(30) $$(f_1 f) = 0, \,.\,.\, (f_\nu f) = 0$$

die Integrale

(G) $$f_1, \,.\,.\, f_\nu, f_{\nu+1} \,.\,.\, f_r,$$

die eine r-gliedrige Funktionengruppe mit $r - 2\sigma$ ausgezeichneten Funktionen bilden, so erfordert die Integration des Involutionssystems

(33) $$f_i(x_1 \,.\,.\, x_m p_1 \,.\,.\, p_m) = c_i \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, \nu)$$

eine Operation der Ordnung

$$2m - 2r + 2\sigma,$$

aufserdem im ungünstigsten Falle noch je eine Operation

(39) $$2m - 2r + 2\sigma - 2,\ 2m - 2r + 2\sigma - 4, \,.\,.\, 4,\ 2,$$

sowie eine Quadratur; doch können die Operationen (39) auch ganz oder teilweise wegfallen.

404. *Lie* hat noch zwei andere Methoden angegeben, um die Kenntnis einer Funktionengruppe G, die aus Lösungen des Systems (30) besteht, für die Integration des vorgelegten Involutionssystems (33) zu verwerten.

Die erste derselben kommt darauf hinaus, zunächst eines der in G enthaltenen $r - \sigma$-gliedrigen Involutionssysteme zu bestimmen. Hat man nämlich eines dieser Systeme in der Form

(40) $$f_1, \,.\,.\, f_\nu, w_1, w_2, \,.\,.\, w_\tau, \varphi_1, \varphi_2, \,.\,.\, \varphi_\sigma \qquad (\tau = r - 2\sigma - \nu)$$

ermittelt, so erfordert die Integration von (33) nach der verallgemeinerten zweiten Jacobi'schen Methode noch je eine Operation

$$2m - 2r + 2\sigma,\ 2m - 2r + 2\sigma - 2, \,.\,.\, 4, 2, 0.$$

Die Bestimmung der Funktionen (40) geschieht nach der Vorschrift des Art. 401.

Die andere Methode verlangt nur die vorherige Ermittelung aller in G enthaltenen ausgezeichneten Funktionen

$$(41) \qquad f_1 f_2 \,.\,.\, f_\nu,\; w_1, w_2, \,.\,.\, w_\tau,$$

was durch die Methode des Art. 398 erreicht wird. Dann kann man G auf die Form

$$f_1, \,.\,.\, f_\nu,\; w_1, \,.\,.\, w_\tau,\; \omega_1, \omega_2, \,.\,.\, \omega_{2\sigma}$$

bringen. Das r-gliedrige vollständige System:

$$(42) \quad (f_i f) = (w_k f) = (\omega_l f) = 0 \quad (i = 1 \,.\,.\, \nu;\, k = 1 \,.\,.\, \tau;\, l = 1 \,.\,.\, 2\sigma)$$

besitzt jetzt die $r - 2\sigma$ bekannten Integrale (41), und die Bestimmung einer weiteren Lösung φ_1 erfordert sonach eine Operation $2m - 2r + 2\sigma$. Die Funktion φ_1 bildet nun mit G zusammen eine $r + 1$-gliedrige Gruppe $G^{(1)}$; denn wäre φ_1 in G enthalten, so wäre es darin ausgezeichnet, mithin durch die Funktionen (41) allein darstellbar, was nicht der Fall ist.

Die Gruppe $G^{(1)}$ besitzt $r - 2\sigma + 1$ ausgezeichnete Funktionen, nämlich φ_1 und die Funktionen (41). Bestimmen wir nun mittels einer Operation

$$2m - 2r + 2\sigma - 2$$

ein nicht in $G^{(1)}$ enthaltenes Integral φ_2 des vollständigen Systems, das aus (42) durch Beifügung der Gleichung $(\varphi_1 f) = 0$ entsteht, so definirt φ_2 mit $G^{(1)}$ zusammen eine $r + 2$-gliedrige Gruppe $G^{(2)}$ mit $r - 2\sigma + 2$ ausgezeichneten Funktionen, u. s. w. So gelangen wir schliefslich zu einer aus Lösungen von (30) bestehenden $m + \sigma$-gliedrigen Gruppe $G^{(m-r+\sigma)}$ mit $m - \sigma$ ausgezeichneten Funktionen; diese enthält dann nach Art. 402 ein m-gliedriges Involutionssystem, und die Integration des vorgelegten Involutionssystems (33) verlangt nur noch eine Quadratur.

Beide Methoden sind weniger vorteilhaft als die des Art. 403, da die Bestimmung der ausgezeichneten Funktionen, bezw. eines in G enthaltenen $r - \sigma$-gliedrigen Involutionssystems gewisse Integrationen erfordert, die nach dem Verfahren des Art. 403 nicht nötig sind.

§ 3. Homogene Funktionengruppen.

405. Es bleibt noch der Fall zu betrachten, dafs das zur Integration vorgelegte ν-gliedrige Involutionssystem

$$(1) \qquad f_i(x_1 x_2 \,.\,.\, x_m p_1 p_2 \,.\,.\, p_m) = c_i \qquad (i = 1, 2, \,.\,.\, \nu)$$

dem Typus γ) angehört (Art. 353), d. h. daſs die f_ι *homogen*[1]) nullter Ordnung sind. Es seien wie früher

$$f_1, f_2, \dots f_\nu, f_{\nu+1} \dots f_r \tag{2}$$

bekannte Lösungen des vollständigen Systems

$$(f_1 f) = 0 \dots (f_\nu f) = 0, \tag{3}$$

und es werde mit (φ) (statt, wie früher, mit $(\varphi)_0$) der Ausdruck

$$p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \dots + p_m \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}$$

bezeichnet. Ist dann 2σ der Rang der Matrix

$$\| (f_i f_k) \| \qquad (i, k, = \nu + 1, \nu + 2 \dots r), \tag{4}$$

ferner $2\sigma'$ der Rang der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} 0 & (f_{\nu+1} f_{\nu+2}) & \dots & (f_{\nu+1} f_r), & (f_{\nu+1}) \\ (f_{\nu+2} f_{\nu+1}) & 0 & \dots & (f_{\nu+2} f_r), & (f_{\nu+2}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (f_r f_{\nu+1}) & (f_r f_{\nu+2}) & \dots & 0 & (f_r) \\ (f_{\nu+1}) & (f_{\nu+2}) & \dots & (f_r) & 0 \end{matrix} \right\|, \tag{5}$$

und schreiben wir s statt $\sigma + m$, so gestattet der Pfaff'sche Ausdruck

$$\Delta' = p_1 dx_1 + \dots + p_m dx_m$$

nach Kap. IX, § 4 eine Darstellung der Form

$$\Delta' = d\Omega + F_1 df_1 + \dots + F_r df_r + \dots + F_s df_s,$$

oder eine Darstellung der Form

$$\Delta' = F_1 df_1 + \dots + F_r df_r + \dots + F_s df_s, \tag{6}$$

je nachdem die Zahl σ' gleich $\sigma + 1$ oder gleich σ ist. Im ersten Fall sind die Funktionen $\Omega, f_1, \dots f_s$, im zweiten die Funktionen $f_1 \dots f_s$ von einander unabhängig.

Im Falle $\sigma' = \sigma + 1$ erfolgt die successive Bestimmung der Funktionen $f_{r+1} \dots f_s$, Ω durch genau dieselben Integrationsoperationen wie in Art. 396; im Falle $\sigma' = \sigma$ dagegen bietet sich folgende Vereinfachung dar:

Die Funktionen $f_1 \dots f_s$ genügen nach Kap. IX, § 4 dann und nur dann einer Identität (6), wenn die $f_{r+1} \dots f_s$ so bestimmt sind, daſs der Rang der Matrix

---

1) In diesem § handelt es sich stets um Homogenität in Bezug auf die Variabeln $p_1 \dots p_m$.

$$\left\| \begin{matrix} (f_i f_k) & (f_i) \\ (f_k) & 0 \end{matrix} \right\| \qquad (i, k = \nu + 1, \nu + 2, \ldots s)$$

ebenfalls gleich 2σ wird.

Bezeichnet man demnach mit

$$\zeta_{\nu+1}^{(h)}, \zeta_{\nu+2}^{(h)} \ldots \zeta_r^{(h)}, \zeta^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots r - \nu - 2\sigma + 1)$$

die unabhängigen Lösungensysteme der linearen Gleichungen

$$\zeta_{\nu+1}(f_{\nu+1} f_k) + \cdots + \zeta_r(f_r f_k) + \zeta(f_k) = 0 \qquad (k = \nu + 1, \ldots r);$$
$$\zeta_{\nu+1}(f_{\nu+1}) \quad + \cdots + \zeta_r(f_r) \qquad\qquad = 0,$$

und schreiben wir

$$X_h f \equiv \zeta_{\nu+1}^{(h)}(f_{\nu+1} f) + \cdots + \zeta_r^{(h)}(f_r f) + \zeta^{(h)}(f),$$

so mufs für f_{r+1} ein beliebiges, von $f_1 \ldots f_r$ unabhängiges Integral des Gleichungensystems

(7) $\quad (f_1 f) = 0 \ldots (f_\nu f) = 0, \; X_h f = 0 \quad (h = 1 \ldots r - \nu - 2\sigma + 1)$

gewählt werden. Dieses System ist nach Kap. IX, § 4 vollständig und $r - 2\sigma + 1$-gliedrig; es besitzt ferner r bekannte Lösungen $f_1 \ldots f_r$, und die Bestimmung eines neuen Integrals geschieht sonach durch eine Operation

$$2m - 2r + 2\sigma - 1.$$

Ebenso zeigt man, dafs f_{r+2} einem vollständigen System zu genügen hat, das aus (7) durch Beifügung *einer* weiteren Gleichung entsteht und die Lösungen $f_1 \ldots f_{r+1}$ besitzt, etc. Die successive Bestimmung von $f_{r+1} \ldots f_s$ erfordert demnach je eine Operation

$$2m - 2r + 2\sigma - 1, \; 2m - 2r + 2\sigma - 3, \ldots 3, 1,$$

worauf die F_ι auf der rechten Seite von (6) durch Auflösung linearer Gleichungen folgen. Da jetzt identisch

$$dz - \sum p_i dx_i \equiv dz - F_1 df_1 - \cdots - F_s df_s,$$

so liefern nach Art. 393 die Funktionen

$$z, f_1 \ldots f_s, \; F_{\nu+1} \ldots F_s$$

die sämtlichen unabhängigen Lösungen des vollständigen Systems

$$0 = [f_i f] \equiv (f_i f) \qquad (i = 1, 2, \ldots \nu),$$

womit die Integration des gegebenen ν-gliedrigen Involutionssystems (1) erledigt ist (Art. 367).

Ist $r \geqq m$ und $\sigma = r - m$, also $s = r$, so erfordert demnach die Integration von (1) überhaupt nur gewisse Eliminationen.

406. Nach Art. 397 dürfen wir auch hier wieder annehmen, daſs die bekannten Integrale (2) eine r-gliedrige Gruppe bilden; doch läſst sich im gegenwärtigen Fall das *Poisson*'sche Theorem folgendermaſsen ergänzen:

Ist die Funktion $\varphi(x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m)$ homogen[1], *und bedeutet ψ eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung*

$$(\varphi f) = 0,$$

so ist auch der Ausdruck (ψ) eine Lösung dieser Gleichung.

Dieser Satz folgt wie in Art. 271 aus der Identität

$$((\varphi)\psi) + (\varphi(\psi)) + (\psi\varphi) + ((\psi\varphi)) \equiv 0.$$

Da nämlich φ der Annahme nach homogen ist, so ist $(\varphi) = \text{const.}\,\varphi$, also verschwinden in der eben hingeschriebenen Identität der erste, dritte und vierte Term, und infolgedessen auch der zweite, was zu zeigen war.

Im gegenwärtigen Falle γ) können also nicht nur durch die Klammeroperation $(\varphi\psi)$, sondern eventuell auch durch die Operation (φ) aus den bekannten Integralen neue gewonnen werden; auf diese denken wir uns dasselbe Verfahren abermals angewendet etc., bis durch die genannten beiden Operationen kein neues Integral mehr erhalten werden kann.

Wir werden solcherweise dazu geführt, folgende Definition aufzustellen: Sind die Funktionen $u_1, u_2, \,..\, u_r$ der $2m$ Variabeln x_i, p_i von einander unabhängig und gelten Beziehungen der Form:

(8) $\qquad (u_i) = \psi_i(u_1, u_2, \,..\, u_r) \qquad (i = 1, 2, \,..\, r),$

(9) $\qquad (u_i u_k) = \psi_{ik}(u_1, u_2, \,..\, u_r) \qquad (i, k = 1, 2, \,..\, r),$

d. h. lassen sich sämtliche Ausdrücke (u_i), $(u_i u_k)$ durch die Funktionen u allein ausdrücken, so bezeichnen wir den Inbegriff aller Funktionen $\varphi(u_1 \,..\, u_r)$ als eine „*homogene* r-gliedrige Funktionengruppe“.

Wir wollen nunmehr die wichtigsten Eigenschaften der homogenen Funktionengruppen auseinandersetzen.

407. Sind φ, ψ zwei beliebige Funktionen der homogenen Gruppe Γ, die durch $u_1 \,..\, u_r$ definirt wird, so gilt dasselbe offenbar von den Ausdrücken (φ), (ψ), $(\varphi\psi)$; wie in Art. 398 schlieſsen wir daraus, daſs Γ auch durch jedes beliebige in ihr enthaltene System von r unabhängigen Funktionen definirt werden kann.

---

1) Vgl. die Anmerkung p. 567.

Die Polargruppe von Γ ist offenbar ebenfalls homogen.

Verschwinden alle ψ_i auf den rechten Seiten von (8) identisch, dann und nur dann sind alle u_i, und infolgedessen überhaupt alle Funktionen von Γ nullter Ordnung.[1] Die Funktionen u_i bilden dann ein r-gliedriges *Involutionssystem*. In der That, jeder Klammerausdruck $(u_i u_k)$ ist einerseits durch die u darstellbar, andererseits von der Ordnung -1, verschwindet also notwendig identisch.

Sind dagegen nicht alle ψ_i identisch null, und bedeutet f eine Funktion von Γ, so besitzt die lineare partielle Differentialgleichung

$$0 = (f) \equiv \sum (u_h) \frac{\partial f}{\partial u_h} \equiv \sum \psi_h(u_1 \,.\,.\, u_r) \frac{\partial f}{\partial u_h}$$

genau $r-1$ unabhängige Integrale, d. h. Γ enthält $r-1$ unabhängige Funktionen nullter Ordnung. Da ferner die nichthomogene Differentialgleichung

$$(f) = f, \text{ oder} \sum \psi_h \frac{\partial f}{\partial u_h} = f$$

jedenfalls Integrale besitzt, so folgt der Satz:

Enthält die homogene Gruppe Γ nicht lauter Funktionen nullter Ordnung, so läſst sie sich stets auf die Form

$$(10) \qquad N_1, N_2, \,.\,.\, N_{r-1}, H$$

bringen, worin H eine Funktion erster Ordnung, die N_i Funktionen nullter Ordnung bedeuten. Umgekehrt, besitzt eine Gruppe Γ die eben hingeschriebene Form, so ist sie offenbar homogen.

Überhaupt ist eine r-gliedrige Gruppe immer dann homogen, wenn sie r unabhängige Funktionen enthält, die in den p homogen irgend welcher Ordnungen sind.

408. Ist 2σ der Rang der Matrix

$$(11) \qquad \| (u_i u_k) \| \qquad (i, k = 1, 2, \,.\,.\, r),$$

so besitzt unsere r-gliedrige homogene Gruppe Γ genau $\varrho = r - 2\sigma$ unabhängige ausgezeichnete Funktionen

$$(12) \qquad w_1, w_2 \,.\,.\, w_\varrho,$$

die ein Involutionssystem, und mithin eine ϱ-gliedrige Funktionengruppe bilden. Diese Gruppe ist *homogen*. In der That, erfüllt eine in Γ enthaltene Funktion f das vollständige System

$$(13) \qquad (u_1 f) = 0, \; (u_2 f) = 0 \,.\,.\, (u_r f) = 0,$$

---

[1] Wir sagen im Folgenden „eine Funktion ν^{ter} Ordnung" anstatt: „eine Funktion, die hinsichtlich der p_i homogen ν^{ter} Ordnung ist".

so ist sie in der Funktionengruppe (12) enthalten, und umgekehrt. Nach Art. 407 dürfen wir aber sämtliche u_i als homogen voraussetzen; aus Art. 406 schliefsen wir jetzt, dafs alle Ausdrücke (w_i) ebenfalls dem System (13) genügen, und da sie in Γ enthalten sind, folgt unsere Behauptung ohne weiteres.

Nach dem vorigen Art. enthält die Gruppe (12) entweder lauter Funktionen nullter Ordnung, oder sie wird von *einer* Funktion erster und $\varrho - 1$ Funktionen nullter Ordnung gebildet. Offenbar tritt der erste oder der zweite dieser Fälle ein, je nachdem die lineare partielle Differentialgleichung

$$(14) \qquad 0 = (f) \equiv (u_1)\frac{\partial f}{\partial u_1} + \cdots + (u_r)\frac{\partial f}{\partial u_r}$$

eine Folge der partiellen Differentialgleichungen

$$(15) \qquad 0 = (u_i f) \equiv \sum_k (u_i u_k)\frac{\partial f}{\partial u_k} \qquad (i = 1, \ldots r)$$

ist, oder nicht, d. h. je nachdem der Rang $2\sigma'$ der Matrix:

$$(16) \qquad \left\| \begin{matrix} 0 & (u_1 u_2) & \ldots & (u_1 u_r) & (u_1) \\ (u_2 u_1) & 0 & \ldots & (u_2 u_r) & (u_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ (u_r u_1) & (u_r u_2) & \ldots & 0 & (u_r) \\ (u_1) & (u_2) & \ldots & (u_r) & 0 \end{matrix} \right\|$$

gleich 2σ oder gleich $2\sigma + 2$ ist. Im letzteren Falle stellen die Gleichungen (14)(15) ein $2\sigma + 1$-gliedriges vollständiges System mit den Independenten $u_1 \ldots u_r$ dar; seine Integrale sind die $r - 2\sigma - 1$ ausgezeichneten Funktionen nullter Ordnung.

409. Verstehen wir im Falle $2\sigma' = 2\sigma$ unter

$$\lambda_1^{(h)}, \lambda_2^{(h)} \ldots \lambda_r^{(h)}, \lambda_{r+1}^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots r - 2\sigma + 1)$$

irgend $r - 2\sigma + 1$ linear unabhängige Lösungen der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1(u_1 u_k) + \cdots + \lambda_r(u_r u_k) + \lambda_{r+1}(u_k) &= 0 \qquad (k = 1, \ldots r) \\ \lambda_1(u_1) \quad + \ldots + \lambda_r(u_r) \qquad\qquad &= 0, \end{aligned}$$

so bilden die linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(17) \quad 0 = X_h f \equiv \sum_i \lambda_i^{(h)}(u_i f) + \lambda_{r+1}^{(h)}(f) \qquad (h = 1, \ldots r - 2\sigma + 1),$$

falls $\sigma > r - m$, ein $r - 2\sigma + 1$-gliedriges vollständiges System mit den Independenten $x_1 \ldots x_m, p_1 \ldots p_m$.

Dieser Satz folgt als Korollar aus Kap. IX § 4, und zwar ganz unabhängig davon, daſs die u eine Gruppe bilden; um ihn direkt zu beweisen, bemerken wir, daſs die lineare partielle Differentialgleichung:

$$(18) \qquad (f) = 0$$

dann und nur dann eine Folge des Systems

$$(19) \qquad (u_1 f) = 0 \,..\, (u_r f) = 0$$

ist, wenn alle Funktionen der Polargruppe $\bar{\Gamma}$ nullter Ordnung sind. Dann aber bildet die Polargruppe ein $2m - r$-gliedriges Involutionssystem (Art. 407), d. h. man hat $2m - r \leqq m$, also $r \geqq m$; ferner enthält Γ sämtliche Funktionen von $\bar{\Gamma}$, da diese ja alle in $\bar{\Gamma}$ ausgezeichnet sind. Demnach ist die Zahl $r - 2\sigma$ der ausgezeichneten Funktionen von Γ gleich $2m - r$, d. h. man hat

$$\sigma = r - m.$$

Umgekehrt, ist dies der Fall, und hat man $2\sigma = 2\sigma'$, so ist die Gleichung (18) eine Folge von (19); denn $\bar{\Gamma}$ ist dann mit dem Involutionssystem identisch, das aus den $r - 2\sigma = 2m - r$ ausgezeichneten Funktionen von Γ besteht, also sind alle Funktionen von $\bar{\Gamma}$ nullter Ordnung.

Setzen wir daher $\sigma > r - m$ und $2\sigma' = 2\sigma$ voraus, so sind die Gleichungen (18) (19) linear unabhängig, und dasselbe gilt dann offenbar auch von den Gleichungen (17), da die Gröſsensysteme $\lambda_i^{(h)}$ als linear unabhängig angenommen wurden. Die Gleichungen (17) werden nun ihrer Entstehung nach erfüllt von allen Funktionen $u_1 \,..\, u_r$, und offenbar auch von den $2m - r - 1$ unabhängigen, in der Polargruppe enthaltenen Funktionen nullter Ordnung. Die letzteren bilden mit den ersteren zusammen

$$r + (2m - r - 1) - (r - 2\sigma) = 2m - r + 2\sigma - 1$$

unabhängige Lösungen, da die $r - 2\sigma$ ausgezeichneten Funktionen den beiden Gruppen Γ, $\bar{\Gamma}$ gemeinsam sind. Das System (17) ist also in der That vollständig (Art. 64).

410. Vermöge einer beliebigen *homogenen* Berührungstransformation:

$$(20) \quad x_i' = X_i(x_1 \,..\, x_m p_1 \,..\, p_m);\ p_i' = P_i(x_1 \,..\, p_m) \quad (i = 1 \,..\, m)$$

verwandelt sich jede r-gliedrige homogene Funktionengruppe $\Gamma(u_1 \,..\, u_r)$ wiederum in eine r-gliedrige homogene Funktionengruppe $\Gamma'(u_1' \,..\, u_r')$. Dies folgt unmittelbar daraus, daſs jede Funktion h^{ter} Ordnung vermöge der homogenen Berührungstransformation (20) in eine Funktion übergeht, die hinsichtlich der p_i' homogen der h^{ten} Ordnung ist, m. a. W., daſs vermöge (20), wie man leicht verificirt, die Identität:

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m} = p_1' \frac{\partial f}{\partial p_1'} + \cdots + p_m' \frac{\partial f}{\partial p_m'}$$

stattfindet. Die Gruppe Γ', in die Γ vermöge (20) übergeht, besitzt augenscheinlich wiederum $\varrho = r - 2\sigma$ ausgezeichnete Funktionen, die alle oder nicht alle nullter Ordnung sind, je nachdem dies für Γ gilt, oder nicht. Die Gliederzahl r und die Rangzahlen 2σ, $2\sigma'$ der beiden Matrices (11) und (16) sind demnach Invarianten der Gruppe Γ gegenüber beliebigen homogenen Berührungstransformationen; dafs sie die *einzigen* Invarianten sind, zeigen wir ähnlich wie im vorigen § dadurch, dafs wir Γ auf eine kanonische Form bringen.

Zu diesem Zwecke verstehen wir unter X_ι allgemein eine Funktion nullter, unter P_ι eine Funktion erster Ordnung, und nehmen zunächst an, dafs Γ lauter ausgezeichnete Funktionen enthalte. Sind diese alle nullter Ordnung, so hat Γ an sich schon die kanonische Form:

$$X_1,\ X_2, \ldots X_r. \qquad (r \leqq m)$$

Im entgegengesetzten Falle kann Γ die kanonische Form

$$P_1,\ P_2, \ldots P_r \qquad (r \leqq m)$$

erhalten. In der That, ist Γ auf die Form (10) gebracht, so brauchen wir nur zu setzen:

$$P_1 = N_1 H, \ldots P_{r-1} = N_{r-1} H;\ P_r = H.$$

Zweitens nehmen wir an, dafs Γ nicht lauter ausgezeichnete Funktionen enthalte. Da jetzt die Anzahl der letzteren höchstens $r - 2$ ist, so sind nicht alle Funktionen $N_1, \ldots N_{r-1}$ ausgezeichnet; es sei etwa N_1 nicht ausgezeichnet. Dann gibt es stets eine Funktion Φ erster Ordnung, derart, dafs $(\Phi N_1) = 1$. Um ein solches Φ zu finden, schreiben wir:

$$\Phi = H \,.\, F(N_1, N_2, \ldots N_{r-1}).$$

Man hat dann:

$$(21) \qquad 1 = (\Phi N_1) = (HN_1) \,.\, F + \sum_1^{r-1} {}_h H \,.\, (N_h N_1) \frac{\partial F}{\partial N_h}.$$

Die Funktionen (HN_1), $H \,.\, (N_h N_1)$ verschwinden nicht alle identisch und sind nullter Ordnung, also durch die N allein darstellbar. Die Gleichung (21) ist sonach eine lineare nicht homogene partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit den Independenten $N_1, \ldots N_{r-1}$, besitzt also jedenfalls gewisse Integrale F. Hat man solcher Weise Φ bestimmt, und schreibt man X_1 statt N_1, P_1 statt Φ, so bilden die Gleichungen

$$0 = (X_1 f) = \sum (X_1 u_h) \frac{\partial f}{\partial u_h},\ 0 = (P_1 f) = \sum (P_1 u_h) \frac{\partial f}{\partial u_h}$$

ein zweigliedriges vollständiges System mit den r Independenten $u_1 \ldots u_r$

und $r - 2$ Integralen $u_3' \dots u_r'$. Die Gruppe Γ ist jetzt durch die folgenden r Funktionen definirt:

$$X_1, P_1, u_3' \dots u_r'.$$

Die u' sind mit X_1 und P_1 in Involution und bilden für sich eine r-gliedrige Gruppe Γ'; diese Gruppe ist homogen, da wegen der Homogenität von X_1 und P_1 alle Ausdrücke (u_h') ebenfalls Lösungen des obigen zweigliedrigen Systems sind (Art. 406), und die ausgezeichneten Funktionen von Γ sind mit denen von Γ' identisch. Wendet man jetzt auf Γ' dieselbe Schlufsweise an, wie soeben auf Γ etc., so gelangt man schliefslich zu folgender Darstellung von Γ:

$$(22) \qquad X_1, P_1; \dots X_\sigma, P_\sigma; u_1, u_2, \dots u_{r-2\sigma}.$$

Dabei ist jede der Funktionen (22) mit allen andern in Involution, nur die Ausdrücke $(P_h X_h)$ sind alle gleich 1; die u sind also die ausgezeichneten Funktionen von Γ. Je nachdem die letzteren alle nullter Ordnung sind oder nicht, können wir $X_{\sigma+\iota}$ oder $P_{\sigma+\iota}$ statt u_ι schreiben, und haben damit den Satz bewiesen:

Eine r-gliedrige homogene Funktionengruppe mit $r - 2\sigma$ ausgezeichneten Funktionen kann auf die kanonische Form:

$$(23) \qquad X_1 \dots X_\sigma; P_1 \dots P_\sigma; X_{\sigma+1}, X_{\sigma+2}, \dots X_{r-\sigma}$$

oder auf die kanonische Form:

$$(24) \qquad X_1, \dots X_\sigma; P_1, \dots P_\sigma; P_{\sigma+1}, P_{\sigma+2} \dots P_{r-\sigma}$$

gebracht werden, je nachdem alle oder nicht alle ausgezeichneten Funktionen von der nullten Ordnung sind. Dabei sind alle X_i von der nullten, alle P_i von der ersten Ordnung, und es verschwinden alle Klammern $(X_i P_k)$, $(X_i X_k)$, $(P_i P_k)$, mit Ausnahme der σ Ausdrücke $(P_h X_h)$, die der Einheit gleich sind.

411. Ist in der kanonischen Form (23) die Zahl $r - 2\sigma > 0$, so lassen wir aus Γ die ausgezeichnete Funktion $X_{\sigma+1}$ fort; die andern Funktionen (23) bilden dann eine homogene $r - 1$-gliedrige Gruppe Γ_1, deren (ebenfalls homogene) Polargruppe Γ_1' die Funktion $X_{\sigma+1}$ als nicht ausgezeichnete Funktion enthält. Nach Art. 410 gibt es also in der Gruppe Γ_1' eine Funktion $P_{\sigma+1}$ erster Ordnung, derart dafs $(P_{\sigma+1} X_{\sigma+1}) \equiv 1$. Die Funktionen (23) definiren jetzt mit $P_{\sigma+1}$ zusammen eine $r + 1$-gliedrige homogene Gruppe mit $r - 2\sigma - 1$ ausgezeichneten Funktionen; auf diese Gruppe können wir dieselbe Schlufsweise wie soeben auf Γ anwenden, etc., und erhalten solcherweise $2r - 2\sigma$ unabhängige Funktionen

$$(25) \qquad X_1 \dots X_{r-\sigma}, P_1, \dots P_{r-\sigma}$$

welche die Funktionen (23) umfassen und die kanonische Form einer homogenen $2r - 2\sigma$-gliedrigen Gruppe ohne ausgezeichnete Funktionen darstellen. Ist jetzt $r - \sigma < m$, so besitzt die Polargruppe von (25) wenigstens *eine* Funktion nullter Ordnung $X_{r-\sigma+1}$; da diese mit (25) zusammen eine $2r - 2\sigma + 1$-gliedrige Gruppe mit der ausgezeichneten Funktion $X_{r-\sigma+1}$ definirt, so gibt es nach dem vorigen eine Funktion erster Ordnung $P_{r-\sigma+1}$ derart, dafs

$$(P_{r-\sigma+1}, X_{r-\sigma+1}) \equiv 1.$$

Durch Wiederholung dieser Schlufsweise gelangen wir schliefslich zu dem Resultat: Stellen die r Funktionen (23) die kanonische Form einer r-gliedrigen homogenen Gruppe dar, so lassen sich stets $2m - r$ weitere Funktionen P_i, X_k so bestimmen, dafs die Gleichungen (20) eine homogene Berührungstransformation der $2m$ Variabeln x, p definiren.

412. Wir betrachten nunmehr zweitens die kanonische Form (24). Ist $r - 2\sigma > 0$, und lassen wir $P_{\sigma+1}$ aus (24) fort, so entsteht eine $r - 1$-gliedrige homogene Gruppe Γ_1, deren $2m - r + 1$-gliedrige Polargruppe Γ_1' die Funktion erster Ordnung $P_{\sigma+1}$ als nicht ausgezeichnete Funktion enthält. Es gibt dann, behaupten wir, in Γ_1' eine Funktion nullter Ordnung $X_{\sigma+1}$ derart, dafs identisch

$$(P_{\sigma+1} X_{\sigma+1}) \equiv 1.$$

In der That, bringen wir Γ_1' nach Art. 402 auf die Form:

$$N_1, N_2, \ldots N_{2m-r}, P_{\sigma+1},$$

und bedeutet F eine Funktion der N_i, so sind in der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$1 = (P_{\sigma+1} F) \equiv \sum_1^{2m-r} {}_h (P_{\sigma+1} N_h) \frac{\partial F}{\partial N_h}$$

die Koefficienten $(P_{\sigma+1} N_h)$ als Funktionen nullter Ordnung der Gruppe Γ_1' durch die N_i allein ausdrückbar und nicht alle identisch null; es gibt also eine Funktion F der $2m - r$ Variabeln N_i, welche diese Gleichung erfüllt, was zu zeigen war.

Wählt man für $X_{\sigma+1}$ eine solche Funktion F, so können wir auf die Gruppe, die aus Γ durch Beifügung von $X_{\sigma+1}$ entsteht, die gleiche Schlufsweise anwenden, etc., und gelangen so schliefslich zu einer $2r - 2\sigma$-gliedrigen homogenen Gruppe (25) ohne ausgezeichnete Funktionen. Wie im vorigen Artikel schliefsen wir jetzt: Stellen die Funktionen (24) die kanonische Form einer homogenen r-gliedrigen Gruppe dar, so lassen sich stets $2m - r$ weitere Funktionen P_i, X_h so bestimmen, dafs die Gleichungen (20) eine homogene Berührungstransformation darstellen.

Ganz ähnlich wie in Art. 400 folgt hieraus: *Ist eine zweite, ebenfalls r-gliedrige homogene Funktionengruppe*

$$(\Gamma') \qquad u_i'(x_1'x_2' \ldots x_m'p_1'p_2' \ldots p_m') \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

vorgelegt, und sind die Rangzahlen 2σ, $2\sigma'$ für Γ' dieselben wie für Γ, so existirt stets eine homogene Berührungstransformation (20), *welche die Gruppe Γ in Γ' überführt.*

Die Zahlen r, 2σ, $2\sigma'$ sind also die einzigen Invarianten einer homogenen Funktionengruppe gegenüber allen homogenen Berührungstransformationen.

413. Eine r-gliedrige homogene Funktionengruppe Γ mit $r - 2\sigma$ ausgezeichneten Funktionen, die alle nullter Ordnung sind, enthält notwendig $r - \sigma$-gliedrige Involutionssysteme nullter Ordnung; ein solches ist z. B.

$$X_1, X_2, \ldots X_{r-\sigma},$$

wenn (23) eine kanonische Form unserer Gruppe bedeutet. Umgekehrt kann, wie man leicht einsieht, eine homogene r-gliedrige Gruppe Γ, für welche die Matrix (11) den Rang 2σ besitzt, nur dann ein $r - \sigma$-gliedriges Involutionssystem *nullter Ordnung* enthalten, wenn auch die Matrix (16) den Rang 2σ besitzt, d. h. wenn alle ausgezeichneten Funktionen von Γ nullter Ordnung sind. Das allgemeinste in Γ enthaltene $r - \sigma$-gliedrige Involutionssystem nullter Ordnung wird ganz ähnlich wie in Art. 401 durch je eine Operation

$$r - 2\sigma - 1, \; r - 2\sigma - 2, \ldots 2, 1; \; 2\sigma - 3, \; 2\sigma - 5, \ldots 3, 1$$

gefunden, indem man zuerst die ausgezeichneten Funktionen bestimmt; auch erkennt man sofort, dafs Γ unter den gemachten Annahmen kein mehr als $r - \sigma$-gliedriges Involutionssystem enthalten kann. Soll Γ ein m-gliedriges Involutionssystem nullter Ordnung umfassen, so mufs $r \geqq m$ und $\sigma = r - m$ sein; es ist dies der kleinste Wert, den σ erreichen kann. Demnach können wir sagen:

Damit die r-gliedrige homogene Gruppe $u_1 \ldots u_r$ ein m-gliedriges Involutionssystem nullter Ordnung enthalte, ist notwendig und hinreichend, dafs $r \geqq m$ sei, und die Matrices (11) *und* (16) *alle beide den Rang $2r - 2m$ besitzen.*

Ferner gilt die Thatsache:

Damit die Funktionen $u_1 \ldots u_r$ einer r-gliedrigen homogenen Gruppe Γ eine Identität der Form

$$(26) \qquad U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots U_r du_r \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m$$

befriedigen, ist notwendig und hinreichend, dafs Γ m-gliedrige Involutionssysteme nullter Ordnung enthalte.

Dieser Satz ergibt sich mit Rücksicht auf den vorangehenden unmittelbar aus Kap. IX, § 4; wir wollen ihn indes auch noch direkt begründen.

Enthält Γ ein m-gliedriges Involutionssystem $X_1 \dots X_m$ nullter Ordnung, so besteht nach Art. 278 eine Identität

(27) $$P_1 dX_1 + \cdots + P_m dX_m \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m,$$

mithin, da die X_i sich durch die u_h ausdrücken lassen, auch eine Identität (26). Umgekehrt, ist letzteres der Fall, und bedeutet

(28) $$X_1, X_2 \dots X_\alpha;\ P_1, P_2, \dots P_\beta \qquad (\alpha + \beta = r)$$

eine kanonische Form von Γ, so lassen sich nach Art. 411 und 412 $2m - r$ weitere Funktionen

(29) $$X_{\alpha+1}, X_{\alpha+2}, \dots X_m;\ P_{\beta+1}, P_{\beta+2} \dots P_m$$

so bestimmen, daſs die Identität (27) stattfindet; also hat man:

(30) $$U_1 du_1 + \cdots + U_r du_r \equiv P_1 dX_1 + \cdots + P_m dX_m.$$

Denken wir uns die U, u als Funktionen der $2m$ Variabeln (28)(29) ausgedrückt, und wäre $\alpha < m$, so hätte man, da die u dann von X_m nicht abhingen, aus (30) durch Vergleichung der beiderseitigen Koeffizienten von dX_m:

$$0 \equiv P_m,$$

was nicht der Fall ist. Also ist $\alpha = m$, was zu zeigen war.

414. Wir wollen nunmehr das Integrationsverfahren des Art. 405 durch Heranziehung der Theorie der homogenen Funktionengruppen in ähnlicher Weise vervollständigen, wie wir es im vorigen § bei der Methode des Art. 396 gethan haben. Es sei wiederum

(31) $$f_i(x_1 x_2 \dots x_m p_1 p_2 \dots p_m) = c_i \qquad (i = 1, 2, \dots \nu)$$

ein beliebig vorgegebenes Involutionssystem vom Typus γ) (Art. 353), ferner seien

(32) $$f_1, \dots f_\nu, f_{\nu+1}, \dots f_r$$

r bekannte Lösungen des Jacobi'schen Systems:

(33) $$(f_1 f) = 0,\ (f_2 f) = 0, \dots (f_\nu f) = 0.$$

Nach Art. 406 können wir dann annehmen, daſs die Funktionen (32) eine r-gliedrige *homogene* Gruppe Γ definiren. Sind alle f_i nullter Ordnung, so ist die Integration von (31) auf diejenige des r-gliedrigen Involutionssystems:

(34) $$f_1' = c_1 \dots f_r' = c_r$$

vom Typus γ) zurückgeführt, erledigt sich also durch je eine Operation:

$$2m - 2r - 1,\ 2m - 2r - 3, \dots 3, 1.$$

Sind alle Funktionen von Γ ausgezeichnet, aber nicht alle nullter Ordnung, so ist das Involutionssystem (34) vom Typus β) (Art. 353), und seine Integration erfordert je eine Operation:

$$2m - 2r,\ 2m - 2r - 2, \ldots 4, 2, 0.$$

Es sei jetzt allgemein 2σ der Rang der Matrix (4). Ist dann $2\sigma + 2$ derjenige von (5), so gebrauchen wir das Integrationsverfahren des Art. 403. Dabei lassen sich jetzt, wenn die Funktion f_{r+1} bestimmt ist, nicht nur auf Grund des *Poisson*'schen Theorems, sondern eventuell auch mit Hülfe der Operation (φ) (Art. 406) neue Integrale finden, und dasselbe gilt natürlich auch bei allen folgenden Schritten des citirten Verfahrens; ein anderer Vorteil läfst sich dagegen aus dem Umstand, dafs Γ *homogen* ist, unter der gemachten Annahme nicht ziehen.

Es sei jetzt zweitens der Rang der Matrix (5) ebenfalls gleich 2σ, m. a. W. sämtliche $r - 2\sigma$ ausgezeichnete Funktionen von Γ seien von der nullten Ordnung. Ist dann $r \geqq m$, und $\sigma = r - m$, so enthält Γ m-gliedrige Involutionssysteme nullter Ordnung, d. h. es besteht eine Identität

$$F_1 df_1 + \cdots + F_r df_r \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m,$$

womit das Integrationsproblem (31) nach Art. 405 erledigt ist.

Ist ferner $r < m$, oder $r \geqq m$ und $\sigma > r - m$, dann bestimmen wir nach Art. 405 mittels einer Operation

$$2m - 2r + 2\sigma - 1$$

ein von $f_1 \ldots f_r$ unabhängiges Integral f_{r+1} des l. c. definirten vollständigen Systems (7), das wir mit J bezeichnen wollen; durch wiederholte Anwendung der beiden Klammeroperationen $(\varphi\psi)$ und (φ) erhalten wir in allen Fällen eine gewisse Zahl von Funktionen

$$f_1 \ldots f_r, \ldots f_{r_1} \qquad (r_1 > r),$$

die alle dem vollständigen System (33) genügen, und eine r_1-gliedrige homogene Gruppe Γ_1 bilden. Bezeichnen wir mit

$$(35) \qquad f_1 \ldots f_\nu, w_1, w_2, \ldots w_\tau \qquad (\tau = r - 2\sigma - \nu)$$

die unabhängigen ausgezeichneten Funktionen von Γ, die unserer Voraussetzung nach alle nullter Ordnung sind, so sind die Funktionen (35) auch innerhalb Γ_1 ausgezeichnet. In der That umfafst ja das vollständige System J, wie man aus seiner Entstehung und aus Art. 398 sofort erkennt, u. a. die Gleichungen:

$$(w_1 f) = 0 \ldots (w_\tau f) = 0,$$

und da die w_i homogen sind, so sind nach dem Theorem des Art. 406 nicht nur $f_1 \ldots f_{r+1}$, sondern auch alle hieraus durch die Operationen $(\varphi\psi)$ und (φ) entstehenden Funktionen mit den w_i involutorisch. Aufser den Funktionen (35) kann nun Γ_1 noch andere ausgezeichnete Funktionen $w_{\tau+1}, \ldots w_{\tau_1}$ enthalten. Ist $2\sigma_1$ der Rang der Matrix

$$\| (f_i f_k) \| \qquad (i, k = \nu + 1, \nu + 2, \ldots r_1),$$

so ist die Zahl τ_1 definirt durch die Gleichung:

$$\tau_1 = r_1 - 2\sigma_1 - \nu. \tag{36}$$

Wir behaupten nun: *Alle ausgezeichneten Funktionen in Γ_1 sind von der nullten Ordnung.*

In der That, die Gruppe Γ besitzt eine kanonische Form (23), und es gibt nach Art. 411 ein System von $2m - r$ anderen Funktionen

$$P_{\sigma+1}, \ldots P_m;\ X_{r-\sigma+1}, \ldots X_m,$$

die mit (23) zusammen die rechten Seiten einer homogenen Berührungstransformation bilden. Die Polargruppe von Γ hat also die kanonische Form:

$$X_{\sigma+1}, \ldots X_{r-\sigma};\ X_{r-\sigma+1} \ldots X_m;\ P_{r-\sigma+1}, \ldots P_m.$$

Nun genügen dem System J alle Funktionen von Γ und alle in der Polargruppe von Γ enthaltenen Funktionen nullter Ordnung (Art. 409), m. a. W. das allgemeine Integral von J hat die Form:

$$\Phi\left(X_1, \ldots X_m, P_1, \ldots P_\sigma, \frac{P_{r-\sigma+1}}{P_m}, \ldots \frac{P_{m-1}}{P_m}\right). \tag{37}$$

Diese Form haben also auch alle Funktionen von Γ_1; denn f_{r+1} hat diese Form, und durch Anwendung der beiden Klammeroperationen $(\varphi\psi)$ und (φ) auf die Funktionen (23) und irgend welche Ausdrücke (37) erhält man augenscheinlich immer wieder Funktionen der Form (37). Soll aber die Funktion Φ innerhalb Γ_1 ausgezeichnet sein, so mufs sie sich jedenfalls mit $X_1, \ldots X_\sigma$ in Involution befinden, also hat man identisch:

$$(\Phi X_h) \equiv 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots \sigma).$$

Führt man hierin statt der x, p die $2m$ Funktionen X_i, P_i als neue Independente ein (Art. 276), so folgt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots \sigma),$$

d. h. Φ enthält $P_1, \ldots P_\sigma$ nicht, ist also in der That nullter Ordnung.

Darnach ist Γ_1 eine homogene Funktionengruppe derselben Beschaffenheit wie Γ. Wir bilden jetzt das vollständige System J_1, das zu Γ_1 in derselben Beziehung steht wie J zu Γ; dieses System J_1 enthält

$$\tau_1 + \nu + 1 = r_1 - 2\sigma_1 + 1 \tag{38}$$

Gleichungen, und umfaſst offenbar das System J. Es besitzt ferner die r_1 unabhängigen Integrale $f_1 \ldots f_{r_1}$, und die Ermittelung einer weiteren Lösung f_{r_1+1} geschieht durch eine Operation

$$2m - \tau_1 - \nu - r_1 - 1 = 2m - 2r_1 + 2\sigma_1 - 1. \tag{39}$$

Nun ist $\tau_1 + \nu + r_1$ wegen (38) eine gerade Zahl, und gröſser als die ebenfalls gerade Zahl:

$$\tau + \nu + r = 2r - 2\sigma.$$

Darnach ist die Zahl (39) um eine gerade Zahl, mindestens aber um zwei Einheiten kleiner als die Zahl $2m - 2r + 2\sigma - 1$.

Die Funktionen $f_1 \ldots f_{r_1+1}$ geben nun in ähnlicher Weise zu einer homogenen Gruppe Γ_2 Anlaſs, deren Gliederzahl $r_2 > r_1$ ist, und deren ausgezeichnete Funktionen alle nullter Ordnung sind, u. s. w. f. Wir erhalten so eine gewisse Serie von homogenen Funktionengruppen

$$\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$$

bezw. mit den Gliederzahlen $r, r_1, r_2, \ldots$ und man hat $r < r_1 < r_2 < \ldots$ Die Funktionen aller dieser Gruppen sind Lösungen des vollständigen Systems (33), und jede Gruppe enthält alle vorangehenden. Die Zahl der ausgezeichneten Funktionen von Γ_h ist $\nu + \tau_h$; sie sind alle nullter Ordnung, und man hat $\tau \leqq \tau_1 \leqq \tau_2 \ldots$ Zu jeder Gruppe Γ_h gehört ein vollständiges System J_h, das alle vorangehenden Systeme $J, J_1 \ldots J_{h-1}$ umfaſst und aus:

$$\tau_h + \nu + 1 = r_h - 2\sigma_h + 1 \tag{40}$$

Gleichungen besteht; dabei ist $2\sigma_h$ der Rang der Matrix:

$$\| (f_i f_k) \| \qquad (i, k = \nu + 1, \nu + 2, \ldots r_h);$$

J_h hat u. a. alle Funktionen $f_1 \ldots f_{r_h}$ von Γ_h zu Integralen. Die Bestimmung eines weiteren Integrals von J_h erfordert sonach eine Operation

$$2m - 2r_h + 2\sigma_h - 1. \tag{41}$$

Ein solches Integral existirt natürlich nur, solange

$$\sigma_h > r_h - m.$$

Nun nimmt aber beim Übergang von h zu $h + 1$ die Zahl (41) um eine gerade Zahl, mindestens aber um zwei Einheiten ab, wie aus (40) und aus den Ungleichungen, denen die τ_h und r_h genügen, sofort hervorgeht.

Ist nun h der kleinste Index derart, daſs die Zahl (41) negativ wird, so ist σ_h notwendig gleich $r_h - m$, da ja σ_h nicht kleiner sein kann als diese Zahl. Nach Art. 413 enthält also Γ_h m-gliedrige Involutionssysteme, womit die Integration des vorgelegten Integrationsproblems (31) geleistet ist (Art. 405 und 413).

Wir haben demnach folgenden Satz bewiesen:

Ist ein ν-gliedriges Involutionssystem der Form:

$$f_i\left(x_1 \,.\,. x_m, \frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_1}, \,.\,. \frac{p_m}{p_1}\right) = c_i \qquad (i = 1, \,.\,. \nu) \tag{42}$$

zur Integration vorgelegt, kennt man ferner von dem vollständigen System:

$$(f_1 f) = 0, \,.\,. (f_\nu f) = 0$$

ein System von Integralen

$$f_1, \cdot, f_\nu, f_{\nu+1}, \cdot\cdot f_r,$$

die eine r-gliedrige homogene Gruppe Γ definiren, und besitzt die letztere $r - 2\sigma$ unabhängige ausgezeichnete Funktionen, sämtlich von nullter Ordnung, so erfordert die Integration von (42) eine Operation

$$2m - 2r + 2\sigma - 1$$

und aufserdem im ungünstigsten Fall noch je eine Operation:

$$2m - 2r + 2\sigma - 3,\ 2m - 2r + 2\sigma - 5, \,.\,. 5, 3, 1.$$

Doch können diese letzteren Operationen ganz oder teilweise wegfallen.

Unter den Voraussetzungen des soeben ausgesprochenen Satzes lassen sich noch zwei andere Integrationsmethoden entwickeln, die den in Art. 404 angedeuteten ganz analog sind, und von denen die eine die Ermittelung eines in Γ enthaltenen $r - \sigma$-gliedrigen Involutionssystems nullter Ordnung, die andere dagegen nur die Bestimmung aller ausgezeichneten Funktionen von Γ erfordert. Beide Methoden sind indes weniger vorteilhaft als das soeben geschilderte Verfahren.

§ 4. Anwendung der Theorie der Funktionengruppen auf partielle Differentialgleichungen, die z explicite enthalten.

415. Um die Theorie der Funktionengruppen auch für Integrationsprobleme vom Typus α) nutzbar zu machen (Art. 391 u. f.), müssen wir diese Probleme zunächst auf den Typus γ) zurückführen (Art. 378). Warum sich die Theorie der Gruppen nicht ohne weiteres auf den Fall α) übertragen läfst, ist unmittelbar ersichtlich: es existirt in diesem Fall kein dem *Poisson*'schen Theorem analoger Satz. In der That, die *Mayer*'sche Identität (Art. 271)

$$[F[\Phi\Psi]] + [\Phi[\Psi F]] + [\Psi[F\Phi]] \equiv \frac{\partial F}{\partial z}[\Phi\Psi] + \frac{\partial \Phi}{\partial z}[\Psi F] + \frac{\partial \Psi}{\partial z}[F\Phi]$$

lehrt, daſs der aus zwei Lösungen Φ und Ψ der linearen partiellen Differentialgleichung

(1) $$[Ff] = 0$$

gebildete Ausdruck $[\Phi\Psi]$ kein Integral dieser Gleichung liefert, es sei denn, daſs er identisch verschwindet, oder daſs F von z nicht abhängt.

Der Übergang von einem Involutionssystem in den $2m + 1$ Variabeln:

(2) $$z, x_1, \ldots x_m, p_1, \ldots p_m$$

zu einem Involutionssystem vom Typus γ) vollzieht sich nach Art. 378 durch die Substitution:

(3) $$z = x_{m+1}; \; p_i = -\frac{q_i}{q_{m+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Vermöge dieser Substitution verwandelt sich jede Funktion $\Phi(z, \ldots p_m)$ der $2m + 1$ Variabeln (2) in eine Funktion nullter Ordnung[1]) der $2m + 2$ Variabeln

(4) $$x_1, x_2, \ldots x_{m+1}, q_1, q_2, \ldots q_{m+1},$$

die wir folgendermaſsen bezeichnen:

$$\overline{\Phi}(x_1 \ldots x_{m+1}, q_1, \ldots q_{m+1}) \equiv \Phi\left(x_{m+1}, x_1, \ldots x_m, \frac{-q_1}{q_{m+1}} \ldots \frac{-q_m}{q_{m+1}}\right).$$

Bezeichnet Ψ, $\overline{\Psi}$ irgend ein zweites in diesem Sinne zusammengehöriges Paar von Funktionen der Variabeln (2) bezw. (4), so hat man nach Art. 378 vermöge (3) identisch:

(5) $$(\overline{\Phi}\,\overline{\Psi}) \equiv -\frac{1}{q_{m+1}}[\Phi\Psi],$$

wenn gesetzt wird:

$$(\overline{\Phi}\,\overline{\Psi}) \equiv \sum_1^{m+1} {}_h \left(\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial q_h}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x_h} - \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_h}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial q_h}\right).$$

Ferner hat man:

(6) $$(\overline{\Phi}, q_{m+1}\overline{\Psi}) \equiv q_{m+1}(\overline{\Phi}\,\overline{\Psi}) + \overline{\Psi}(\overline{\Phi} q_{m+1}) \equiv$$
$$\equiv q_{m+1}(\overline{\Phi}\,\overline{\Psi}) - \overline{\Psi}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_{m+1}} \equiv [\Psi\Phi] - \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

(7) $$(q_{m+1}\overline{\Phi}, q_{m+1}\overline{\Psi}) \equiv (\overline{\Phi}, q_{m+1}\overline{\Psi})\cdot q_{m+1} + \overline{\Phi}(q_{m+1}, q_{m+1}\overline{\Psi})$$
$$\equiv q_{m+1}\left\{[\Psi\Phi] - \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right\}.$$

416. Die soeben erhaltenen Identitäten gestatten mehrere wichtige Folgerungen. Den Ausdruck

(8) $$Xf \equiv [Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z},$$

---

1) Als Funktion s^{ter} Ordnung bezeichnen wir in diesem § jede Funktion der $2m + 2$ Variabeln (4), die hinsichtlich der q_i homogen s^{ter} Ordnung ist.

worin W irgend eine Funktion der Variabeln (2) bedeutet, definirten wir in Art. 267 als das Symbol einer *infinitesimalen Berührungstransformation* der $2m+1$ Variabeln (2); die Funktion W bezeichnen wir als die *„charakteristische Funktion“* dieser infinitesimalen Transformation. Verstehen wir unter Ω eine Funktion *erster* Ordnung der $2m+2$ Variabeln x, q, so stellt der Ausdruck

$$(\Omega f) \equiv \sum_1^{m+1} h \left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_h} \frac{\partial f}{\partial x_h} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_h} \frac{\partial f}{\partial q_h} \right)$$

nach Art. 268 eine *infinitesimale homogene Berührungstransformation* der $2m+2$ Variabeln (4) dar; Ω heißt die charakteristische Funktion dieser inf. Transformation. Die Identität (6) zeigt jetzt: *Vermöge der Substitution* (3) *verwandelt sich das Symbol der infinitesimalen Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion* $W\,(z \,..\, p_m)$ *in das Symbol der infinitesimalen homogenen Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion* $-q_{m+1} \cdot \overline{W}$, *und umgekehrt.*

Besteht die Identität:

$$XF \equiv [WF] - W \frac{\partial F}{\partial z} \equiv 0,$$

so sagen wir: die partielle Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$F(z, x_1 \,..\, x_m,\ p_1 \,..\, p_m) = \text{const.} \tag{9}$$

gestattet die infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion W (Art. 55); dann gestattet natürlich auch die *homogene* partielle Differentialgleichung:

$$F(x_1, x_2, \,..\, x_{m+1}, q_1, q_2, \,..\, q_{m+1}) = c \tag{10}$$

die homogene infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion $-q_{m+1} \cdot \overline{W}$, d. h. man hat dann:

$$(q_{m+1} \overline{W}, \overline{F}) \equiv 0.$$

417. Es seien jetzt Φ und Ψ zwei Integrale der linearen partiellen Differentialgleichung (1), worin F eine gegebene Funktion der Variabeln (2) bedeutet. Dann sind wegen (5) auch $\overline{\Phi}$ und $\overline{\Psi}$ Integrale der Gleichung:

$$(\overline{F} f) = 0, \tag{1'}$$

und infolgedessen ist nach dem *Poisson*'schen Theorem auch $(\overline{\Phi}\,\overline{\Psi})$ ein Integral dieser Gleichung. Dieser Ausdruck ist eine Funktion — 1ter Ordnung; ist sie also nicht identisch null, so ist ihr reziproker Wert die charakteristische Funktion einer homogenen infinitesimalen Berührungstransformation; die partielle Differentialgleichung (10) gestattet offenbar diese Transformation, und aus dem vorigen Art. folgt jetzt der Satz:

1) *Sind Φ und Ψ zwei Integrale der linearen partiellen Differentialgleichung*

$$(1) \qquad [Ff] = 0,$$

und ist $[\Phi \Psi]$ *nicht null, so gestattet die partielle Differentialgleichung*

$$(9) \qquad F(z, x_1 \,.\,.\, x_m, p_1, \,.\,.\, p_m) = c$$

die inf. Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion

$$\frac{1}{[\Phi \Psi]}.$$

Es sei jetzt Φ eine Lösung von (1), ferner gestatte die partielle Differentialgleichung (9) die inf. Berührungstransformation mit der char. Funktion W. Dann sind $\overline{\Phi}$ und $q_{m+1} \cdot \overline{W}$ wegen (5) und (6) Lösungen der linearen Differentialgleichung (1'), also ist auch der Ausdruck $(\overline{\Phi}, q_{m+1} \overline{W})$ ein Integral dieser Gleichung. Dieser Ausdruck ist von der nullten Ordnung, liefert also vermöge (3) ein Integral der Gleichung (1). Demnach folgt aus der Identität (6) der Satz:

2) *Ist Φ eine Lösung der Gleichung*

$$(1) \qquad [Ff] = 0$$

und gestattet die partielle Differentialgleichung $F = c$ die inf. Berührungstransformation mit der char. Funktion W, so ist der Ausdruck

$$[W\Phi] - W\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

wiederum ein Integral von (1).

Endlich nehmen wir an, die partielle Differentialgleichung $F = c$ gestatte die beiden infinitesimalen Berührungstransformationen W_1 und W_2; dann sind $q_{m+1} \overline{W}_1$ und $q_{m+1} \overline{W}_2$ und infolgedessen auch der Ausdruck $(q_{m+1} \overline{W}_1, q_{m+1} \overline{W}_2)$ Lösungen von (1'); der zuletzt genannte Ausdruck ist von der ersten Ordnung, also die char. Funktion einer inf. homogenen Berührungstransformation; die Identität (7) liefert jetzt den Satz[1])

3) *Gestattet die partielle Differentialgleichung $F = c$ die infinitesimalen Berührungstransformationen mit den char. Funktionen W_1 und W_2, so gestattet sie auch die infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion*

$$(11) \qquad \mathfrak{W} \equiv [W_1 W_2] + W_2 \frac{\partial W_1}{\partial z} - W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z}.$$

1) Lie II, Kap. 15.

Dieser Satz ist im Wesentlichen gleichbedeutend mit dem folgenden: Setzt man

$$X_1 f \equiv [W_1 f] - W_1 \frac{\partial f}{\partial z};\ X_2 f \equiv [W_2 f] - W_2 \frac{\partial f}{\partial z},$$

so hat man die Identität:

$$X_1 X_2 f - X_2 X_1 f \equiv [\mathfrak{W} f] - \mathfrak{W} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Die Richtigkeit dieser Formel wird am leichtesten erkannt, wenn man auf die drei Funktionen $f, q_{m+1} W_1, q_{m+1} W_2$ die Jacobi'sche Identität (Art. 270) anwendet, und die drei Gleichungen (5) (6) (7) beachtet.

Die Sätze 1), 2), 3) lassen sich auch sehr leicht mittels der Mayer'schen Identität beweisen.

418. Wir sagen, ein ν-gliedriges Involutionssystem

$$(12) \qquad F_i(z, x_1, .. x_m p_1 .. p_m) = c_i \qquad (i = 1 .. \nu)$$

gestattet die infinitesimale Berührungstransformation:

$$Xf \equiv [Wf] - W \frac{\partial f}{\partial z},$$

wenn alle Ausdrücke XF_i identisch null sind. Kennt man nun von dem ν-gliedrigen vollständigen System

$$(13) \qquad [F_1 f] = 0,\ [F_2 f] = 0 .. [F_\nu f] = 0$$

gewisse Integrale

$$(14) \qquad F_1, .. F_\nu,\ F_{\nu+1}, .. F_\lambda \qquad (\lambda > \nu + 1),$$

so sind entweder alle aus (14) zu bildenden eckigen Klammerausdrücke null, und die Integration von (12) kommt auf die des λ-gliedrigen Involutionssystems $F_1 = c_1 .. F_\lambda = c_\lambda$ hinaus, oder der Satz 1) erlaubt infinitesimale Berührungstransformationen aufzustellen, die das gegebene Involutionssystem gestattet. Nehmen wir nun allgemein an, daſs auſser den Integralen (14) noch gewisse inf. Berührungstransformationen bekannt seien, die das System (12) gestattet, und die bezw. die charakteristischen Funktionen

$$(15) \qquad W_1,\ W_2,\ ..\ W_\mu$$

besitzen mögen. Betrachten wir dann eine Funktion der Form:

$$(16) \qquad \Phi(F_1,\ F_2,\ ..\ F_\lambda,\ W_1,\ W_2,\ ..\ W_\mu),$$

so folgt aus den Beziehungen:

$$[F_i F_h] \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots \nu;\ h = 1, \ldots \lambda);$$

$$[W_k F_i] \equiv W_k \frac{\partial F_i}{\partial z} \qquad (k = 1 \ldots \mu;\ i = 1 \ldots \nu)$$

die Identität:

$$[\Phi F_i] \equiv \frac{\partial F_i}{\partial z} \sum_1^{\mu}{}_k W_k \frac{\partial \Phi}{\partial W_k}.$$

Schliefsen wir daher den Fall aus, dafs alle F_i von z frei sind, so können wir den Satz aussprechen:

Eine Funktion der Form (16) genügt dann und nur dann dem vollständigen System (13), wenn sie in den W_h homogen nullter Ordnung ist. Das Involutionssystem (12) gestattet dann und nur dann die infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion (16), wenn diese Funktion in den W_h homogen erster Ordnung ist.

419. Indem wir jetzt auf die bekannten Funktionen (14) (15) die drei Sätze des Art. 417 wiederholt anwenden, gelangen wir nach einer endlichen Zahl von Operationen zu einem System von Funktionen

(17) $$F_1, F_2, \ldots F_\nu, F_{\nu+1} \ldots F_\varrho, W_1, W_2, \ldots W_\sigma$$

von folgenden Eigenschaften:

a) alle $\varrho + \sigma$ Funktionen (17) sind unabhängig;

b) alle Ausdrücke der Form:

$$[F_i F_k];\ [W_h F_i] - W_h \frac{\partial F_i}{\partial z};\ [W_h W_l] + W_l \frac{\partial W_h}{\partial z} - W_h \frac{\partial W_l}{\partial z}$$

sind durch die Funktionen (17) allein ausdrückbar.

c) Die F_i sind Lösungen des vollständigen Systems (13), die W_h charakteristische Funktionen von infinitesimalen Berührungstransformationen, die das Involutionssystem (12) gestattet.

Die Zahl σ ist $\geqq 1$; andernfalls wären alle $[F_i F_k]$ null, was wir ausschliefsen wollen, oder durch $F_1 \ldots F_\varrho$ allein darstellbar und infolgedessen Integrale von (13), was nach Art. 415 nur möglich ist, wenn das Involutionssystem (12) nicht dem Typus α) angehört. Ist $\sigma \geqq 2$, so sind die Ausdrücke:

$$\frac{W_2}{W_1}, \frac{W_3}{W_1}, \ldots \frac{W_\sigma}{W_1}$$

nach Art. 418 Integrale des vollständigen Systems (13); daher können wir uns das Funktionensystem (17) immer auf die Form:

(18) $$F_1, F_2, \ldots F_{r-1}, W$$

gebracht denken. Diese r Funktionen sind unabhängig und es bestehen offenbar Identitäten der Form:

$$[F_i F_k] = \frac{1}{W} \Psi_{ik}(F_1 F_2 \,..\, F_{r-1}) \quad (i, k = 1 \,..\, r-1)$$

$$[WF_i] - W\frac{\partial F_i}{\partial z} \equiv \Psi_i(F_1 \,..\, F_{r-1}) \quad (i = 1, .. \, r-1).$$

Die Sätze 1) 2) 3) des Art. 417 können zusammen als Analogon des Poisson'schen Theorems, ein Funktionensystem (18) von der soeben genannten Beschaffenheit als Analogon einer r-gliedrigen Funktionengruppe betrachtet werden. Der Zusammenhang mit den Entwickelungen des vorigen § ist unmittelbar evident: Besitzt ein Funktionensystem (18) die oben erwähnten Eigenschaften, so bilden die Funktionen:

$$\overline{F}_1, .. \overline{F}_{r-1}, \; q_{m+1}\overline{W}$$

eine r-gliedrige homogene Funktionengruppe mit den $2m+2$ Variabeln x, q, und zwar erscheint diese Funktionengruppe in der reduzirten Form, die in Art. 407 unter (10) angegeben wurde; die Umkehrung dieses Satzes ist offenbar ebenfalls richtig.

Ist demnach ein ν-gliedriges Involutionssystem (12) zur Integration vorgelegt, und kennt man von vorneherein gewisse infinitesimale Berührungstransformationen, die das gegebene System gestattet, und gewisse Integrale des zugehörigen vollständigen Systems (13), so lehren die Entwickelungen dieses und des vorigen §, wie man aus den genannten Umständen für das gegebene Integrationsproblem den grösstmöglichen Vorteil ziehen kann.

420. Gehört das Involutionssystem (12) dem Typus β) an (Art. 353), so gestattet es die infinitesimale Transformation $\frac{\partial f}{\partial z}$, m. a. W.: die infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion -1. Sind in diesem Falle Φ und Ψ zwei Lösungen des ν-gliedrigen vollständigen Systems (13), so gilt nach Nr. 415 und 417 dasselbe von den drei Ausdrücken:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \; \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \; [\Phi \Psi];$$

gestattet ferner das System (12) eine infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion W, so ist W ein Integral von (13), und umgekehrt. Kennt man also von vorneherein gewisse Integrale des vollständigen Systems (13), so gelangt man durch wiederholte Anwendung der Klammeroperation $[\Phi \Psi]$ und der

Operation $\frac{\partial}{\partial z}$ in allen Fällen zu einem System von unabhängigen Ingralen:

(19) $$F_1, \ldots F_\nu, F_{\nu+1} \ldots F_{r-1}$$

von der Eigenschaft, daſs identisch:

$$[F_i F_k] \equiv \Psi_{ik}(F_1, \ldots F_{r-1}) \qquad (i, k = 1, \ldots r-1)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial z} \equiv \Psi_i(F_1, \ldots F_{r-1}) \qquad (i = 1, \ldots r-1).$$

Sind alle Ψ_i null, so bilden die F_i im Sinne von § 2 eine $r-1$-gliedrige Funktionengruppe in den $2m$ Variabeln x, p, und lassen sich nach der daselbst entwickelten Theorie für die Integration von (12) verwerten. Im entgegengesetzten Falle kann das System (19), wie man leicht erkennt, durch ein anderes von der Form:

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{r-2}, H$$

ersetzt werden, worin die Φ_i von z frei sind und für sich eine $r-2$-gliedrige Funktionengruppe im Sinne von Art. 397 bilden, während H die Form:

$$z + \Omega(x_1 \ldots x_m p_1 \ldots p_m)$$

besitzt, und $r-2$ Identitäten der Form:

$$[H\Phi_i] \equiv \Psi_i(\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{r-2}) \qquad (i = 1, \ldots r-2)$$

befriedigt. Die Verwertung dieses Funktionensystems für die Integration von (12) erfolgt dann wie oben durch den Übergang zu der zugehörigen homogenen Funktionengruppe in den $2m+2$ Variabeln x, q.

Im Falle γ) gestattet das Involutionssystem die infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion z; in der That hat man ja in diesem Fall:

$$[zF_i] - z\frac{\partial F_i}{\partial z} \equiv -\sum p_h \frac{\partial F_i}{\partial p_h} \equiv 0.$$

Man verifizirt sofort, daſs auch hier die Verwertung bekannter Integrale des Systems (13) unmittelbar auf die Theorie des vorigen § zurückführt.

421. Ein Involutionssystem vom Typus β) ist nach dem Vorigen dadurch charakterisirt, daſs es die infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion 1 gestattet, ein System vom Typus γ) dadurch, daſs es auſserdem noch die Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion z gestattet. Auf diese Weise erklären sich die Integrationsvereinfachungen, welche die ge-

nannten Fälle dem allgemeinen Fall α) gegenüber darbieten. In der That, ist das gegebene Involutionssystem (12) von z frei, dann und nur dann bilden die Funktionen:

$$\overline{F}_1,\ \overline{F}_2,\ \ldots\ \overline{F}_\nu,\ q_{m+1}$$

eine $\nu + 1$-gliedrige homogene Funktionengruppe in den $2m + 2$ Variabeln x, q, und zwar ein Involutionssystem, dessen Integration nach Art. 414 je eine Operation

$$2m + 2 - 2(\nu + 1),\ 2m + 2 - 2(\nu + 1) - 2 \text{ etc.}$$

d. h. also die Operationen $2m - 2\nu$, $2m - 2\nu - 2$ etc. erfordert.

Im Falle γ) und nur in diesem bilden die Funktionen

$$\overline{F}_1\ \ldots\ \overline{F}_\nu,\ q_{m+1},\ q_{m+1}x_{m+1},$$

oder, was dasselbe sagt, die Funktionen

$$\overline{F}_1\ \ldots\ \overline{F}_\nu,\ q_{m+1},\ x_{m+1}$$

eine $\nu + 2$-gliedrige homogene Funktionengruppe, deren ausgezeichnete Funktionen $\overline{F}_1\ \ldots\ \overline{F}_\nu$, alle nullter Ordnung sind. Nach Art. 414 erfordert also die Integration des Involutionssystems (12) in diesem Falle je eine Operation

$$2m + 2 - 2(\nu + 2) + 2 - 1 = 2m - 2\nu - 1;\ 2m - 2\nu - 3, \ldots 3, 1,$$

was mit den Ergebnissen von Kap. XIII übereinstimmt.

422. Die vorstehenden Resultate sind Spezialfälle der beiden folgenden Sätze:

Gestattet ein ν-gliedriges Involutionssystem

$$(12) \qquad F_i(z, x_1 \ldots x_m, p_1, \ldots p_m) = c_i \qquad (i = 1, \ldots \nu)$$

eine bekannte infinitesimale Berührungstransformation, so erfordert seine Integration je eine Operation

$$2m - 2\nu,\ 2m - 2\nu - 2, \ldots 4, 2, 0.$$

Gestattet es zwei infinitesimale Berührungstransformationen mit den charakteristischen Funktionen W_1 und W_2, und ist der Ausdruck

$$(20) \qquad [W_1 W_2] + W_2 \frac{\partial W_1}{\partial z} - W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z}$$

nicht null, so erfordert die Integration des Systems (12) *je eine Operation:*

$$2m - 2\nu - 1,\ 2m - 2\nu - 3, \ldots 3, 1;$$

verschwindet dagegen der Ausdruck (20) *identisch, so verlangt diese Integration nur je eine Operation:*

$$2m - 2\nu - 2,\ 2m - 2\nu - 4, \ldots 4, 2, 0.$$

Die Richtigkeit der letzten Behauptung erkennt man sofort durch die Betrachtung der $\nu + 2$-gliedrigen homogenen Funktionengruppe:

$$\overline{F}_1, \ldots \overline{F}_\nu, \; q_{m+1}\overline{W}_1, \; q_{m+1}\overline{W}_2,$$

welche unter der gemachten Annahme ein $\nu + 2$-gliedriges Involutionssystem bildet; die übrigen Sätze fliefsen unmittelbar aus Art. 419.

Enthält beispielsweise eine partielle Differentialgleichung:

$$F(x, y, z, p, q) = \text{const.} \tag{21}$$

irgend *eine* der Variabeln x, y, z nicht, so gestattet sie eine der infinitesimalen Berührungstransformationen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, deren charakteristische Funktionen bezw. gleich p, q, -1 sind; ihre Integration erfordert also je eine Operation 2 und 0; enthält sie irgend zwei der Variabeln x, y, z nicht, so verlangt ihre Integration nur eine Quadratur (vgl. Art. 370).

423. Als weiteres Beispiel betrachten wir diejenigen partiellen Differentialgleichungen der Form (21), welche die infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

gestatten. Diese infinitesimale Transformation hat die Form:

$$Xf \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \left(p \frac{\partial f}{\partial x} + q \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \right);$$

die lineare partielle Differentialgleichung $Xf = 0$ besitzt die Integrale

$$p, \; q, \; x + pz, \; y + qz.$$

Soll also $XF \equiv 0$ sein, so mufs (21) die Form

$$F(p, q, x + pz, y + qz) = c \quad ^{1)} \tag{22}$$

haben. Schreibt man

$$r_1 \equiv x_2 q_3 - x_3 q_2; \; r_2 = x_3 q_1 - x_1 q_3; \; r_3 \equiv x_1 q_2 - x_2 q_1, \tag{23}$$

so läfst sich die Gleichung $\overline{F} = c$, die aus (22) durch die Substitution

$$x = x_1; \; y = x_2; \; z = x_3; \; p = \frac{-q_1}{q_3}; \; q = \frac{-q_2}{q_3} \tag{24}$$

hervorgeht, in folgender Form schreiben:

$$\overline{F} \equiv \Phi(q_1, q_2, q_3, r_1, r_2, r_3) = c, \tag{25}$$

---

1) Die Gleichungen dieser Art wurden zuerst von *Abel Transon* betrachtet, Journal de l'École polyt., cah. 38, Bd. 22. (1861); vgl. Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen I, p. 273, 676 ff.

worin die Funktion Φ hinsichtlich der 6 Variabeln

(26) $$q_1, q_2, q_3, r_1, r_2, r_3,$$

homogen nullter Ordnung ist. Die 6 Gröfsen (26) sind dabei durch die Identität

(27) $$R \equiv q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3 = 0$$

an einander geknüpft. Umgekehrt führt jede Gleichung der Form (25), deren linke Seite hinsichtlich der 6 Variabeln (26) homogen nullter Ordnung ist, vermöge der Substitutionen (23) und (24) zu einer Relation der Gestalt (22) zurück.

Die Funktionen Φ und $q_3\sqrt{1 + \frac{q_1^2}{q_3^2} + \frac{q_2^2}{q_3^2}}$, oder, was dasselbe besagt, die Funktionen

$$\Phi \text{ und } Q \equiv q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

bilden, wie aus Art. 417 oder auch durch direkte Rechnung leicht folgt, ein zweigliedriges Involutionssystem mit den 6 Variabeln x_i, q_i; nach Art. 354 verlangt also die Integration der Gleichung (25) zunächst die Bestimmung eines von Φ und von Q unabhängigen Integrals des zweigliedrigen Jacobi'schen Systems:

(28) $$0 = (\Phi f) = \sum_1^3 {}_h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_h} \frac{\partial f}{\partial x_h} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_h} \frac{\partial f}{\partial q_h} \right)$$

(29) $$0 = (Qf) = q_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + q_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (29) ist eine arbiträre Funktion der 6 Gröfsen (26); unser Problem kommt also darauf hinaus, von der Gleichung (28) ein Integral zu bestimmen, das nur von den 6 Variabeln (26) abhängt, aber nicht durch die Funktionen Φ, Q, R allein ausdrückbar ist. Unter der Annahme, dafs f nur von den Variabeln (26) abhängt, schreibt sich aber die Gleichung (28) folgendermafsen:

(30) $$0 = \sum (\Phi q_h) \frac{\partial f}{\partial q_h} + \sum (\Phi r_h) \frac{\partial f}{\partial r_h},$$

und man hat:

$$(\Phi q_1) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial r_2} q_3 - \frac{\partial \Phi}{\partial r_3} q_2,$$

$$(\Phi r_1) = -q_2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} + q_3 \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} + r_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r_2} - r_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_3},$$

und die 4 analogen Gleichungen, die hieraus durch cyclische Vertauschung der Indices entstehen. Die Koeffizienten der Gleichung (30) hängen also ebenfalls nur von den Variabeln (26) ab, und wir können unser Integrationsproblem so formuliren: man sucht ein nicht durch Φ, Q, R *allein* ausdrückbares Integral der linearen partiellen Differentialgleichung (30), in der jetzt die 6 Variabeln q_i, r_i als ebensoviele *Independente* betrachtet werden dürfen. Ist jetzt die Determinante

$$(31)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}, & \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}, & \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \\ q_1, & q_2, & q_3 \\ r_1, & r_2, & r_3 \end{vmatrix}$$

vermöge $R = 0$ nicht null, so sind die drei Funktionen Φ, Q, R hinsichtlich der Variabeln $q_1 q_2 q_3$ unabhängig. Ist dann $q_1{}^0 q_2{}^0 q_3{}^0 r_1{}^0 r_2{}^0 r_3{}^0$ eine Stelle, an der diese drei Funktionen bezw. die Werte Φ^0, Q^0, 0 annehmen, und an der Φ regulär ist, so kann man in die partielle Differentialgleichung (30) die Variabeln Φ, Q, R statt der q_i als neue Independente einführen, und die Koeffizienten der transformirten Gleichung werden an der Stelle

$$(32)\qquad \Phi^0,\ Q^0,\ 0,\ r_1{}^0,\ r_2{}^0,\ r_3{}^0$$

regulär. Man hat nun:

$$(\Phi f) \equiv \frac{\partial f}{\partial \Phi}(\Phi\Phi) + \frac{\partial f}{\partial Q}(\Phi Q) + \frac{\partial f}{\partial R}(\Phi R) + \sum \frac{\partial f}{\partial r_i}(\Phi r_i).$$

Aber der Ausdruck $(Q\Phi)$ ist null, und, wie die Ausrechnung lehrt, auch $(R\Phi)$; die Relation (30) erhält also die Form

$$(33)\qquad (\Phi r_1)\frac{\partial f}{\partial r_1} + (\Phi r_2)\frac{\partial f}{\partial r_2} + (\Phi r_3)\frac{\partial f}{\partial r_3} = 0.$$

Die Koeffizienten dieser Gleichung sind Funktionen von Φ, Q, R, $r_1 r_2 r_3$, und an der Stelle (32) regulär. Sie verschwinden nicht alle vermöge $R = 0$, da andernfalls auch die Determinante (31) vermöge $R = 0$ null wäre; wir dürfen daher annehmen, dafs sie insbesondere an der Stelle (32) nicht alle verschwinden.

Man kann jetzt mittels einer Operation 2 ein Integral

$$\Omega(\Phi, R, Q, r_1, r_2, r_3)$$

der Gleichung (33) augenscheinlich immer so bestimmen, dafs es an der Stelle (32) regulär ist und wenigstens eine der Variabeln r_i wirklich enthält, auch wenn R darin durch Null ersetzt wird. Substituirt man für die Ausdrücke r_i ihre Werte (23), so reduzirt sich Ω nicht auf eine Funktion der 5 Gröfsen Φ, Q, x_1, x_2, x_3 allein, d. h. die drei Funktionen Φ, Q, Ω sind hinsichtlich $q_1 q_2 q_3$ unabhängig. Drückt man nunmehr mittels der Relationen:

$$\Phi = c,\ Q = c',\ \Omega = c'',$$

die q_i als Funktionen von $x_1 x_2 x_3 c c' c''$ aus, und substituirt die erhaltenen Werte in den Ausdruck

$$q_1 dx_1 + q_2 dx_2 + q_3 dx_3,$$

so verwandelt sich dieser in ein exaktes Differential $dV(x_1 x_2 x_3 c c' c'')$, und V wird durch eine Quadratur gefunden (Art. 369). Die Gleichung $\zeta = V +$ const. ist ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung (25), wenn darin unter den q_i die Ableitungen $\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}$ verstanden werden; nach Art. 314 erhält man hieraus ohne weiteres ein vollständiges Integral der Gleichung (25) im Sinne der zweiten l. c. gegebenen Definition.

Ist die Determinante (31) vermöge $R = 0$ identisch null, so darf man Φ, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, als eine homogene Funktion nullter Ordnung der vier Gröfsen $\sqrt{Q}$, r_1, r_2, r_3 voraussetzen; dann bilden die drei Funktionen Φ, Ω, $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ ein dreigliedriges Involutionssystem, und die Integration von (25) geschieht mittels einer Quadratur. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, dafs aufser (31) auch noch alle drei Funktionen (Φr_i) vermöge $R = 0$ verschwinden. Dann aber kann die Gleichung (25) auf die Form

$$\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{Q} = \text{const.} \tag{34}$$

gebracht werden, und die drei Funktionen

$$\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{Q},\quad \frac{r_1}{\sqrt{Q}},\quad \frac{r_2}{\sqrt{Q}}$$

bilden ein dreigliedriges Involutionssystem *nullter* Ordnung, womit die Integration von (34) nach Art. 369 erledigt ist.[1])

§ 5. Die Bäcklund'sche Theorie.

424. Durch die Entwickelungen des Kapitels XIII ist die Frage nach den etwa vorhandenen gemeinsamen Integral-M_m mehrerer beliebig vorgegebener Gleichungen

$$F_i(z, x_1, x_2, \ldots x_m, p_1, p_2, \ldots p_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots r) \tag{1}$$

vollkommen erledigt. In diesem § wollen wir untersuchen, auf welche

1) Weitere Beispiele von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit bekannten infinitesimalen Transformationen s. in dem pag. 590 zitirten Buch von Lie-Scheffers, Kap. 13 u. 14.

Weise man überhaupt *alle* gemeinsamen Integralmannigfaltigkeiten eines gegebenen Gleichungensystems (1) ermitteln kann, m. a. W.: wir wollen für jede Zahl ν der Reihe $1, 2, \ldots m$ entscheiden, ob die gegebenen Gleichungen (1) gemeinsame ν-fach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeiten besitzen können, oder nicht, und im ersteren Falle die Gesamtheit der Integral-M_ν auch wirklich bestimmen.

Die Beantwortung dieser Frage geschieht im Wesentlichen durch einen von *A. V. Bäcklund*[1]) auf synthetischem Wege gefundenen Satz, der sich uns als einfache Folgerung aus der allgemeinen Theorie des Pfaff'schen Problems darstellen wird. Dieser letztere Umstand rechtfertigt auch die Einordnung dieser Untersuchung in das vorliegende Kapitel über Funktionengruppen; beiden Theorien liegen nämlich dieselben analytischen Thatsachen zu Grunde, und zwar die Sätze von Kap. IX, § 4.

Im Hinblick auf die grofse Anzahl der sich hier darbietenden Möglichkeiten erscheint es nicht thunlich, das eben genannte allgemeine Problem mit der Ausführlichkeit zu behandeln, die wir in Kap. XIII dem Spezialfall $\nu = m$ zu teil werden liefsen; wir beschränken uns daher auf die Hervorhebung der wichtigsten Resultate, während wir die genauere Ausführung derselben und zum Teil auch die Verifikationen dem Leser überlassen.

425. Vorab erinnern wir auch hier wieder daran, dafs wir uns das Gleichungssystem (1) von vorneherein auf eine Form gebracht denken, in der es hinsichtlich der $2m + 1$ Variabeln

$$z, x_1, \ldots x_m, p_1, \ldots p_m \tag{2}$$

den Bedingungen des Art. 40 genügt. Wir bezeichnen nun wie früher mit

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{2m+1} \tag{3}$$

die Variabeln (2) in irgend einer bestimmten Reihenfolge. Setzen wir noch

$$r + s = 2m + 1,$$

so dürfen wir annehmen, dafs die Relationen (1) in der Form:

$$\lambda_{s+h} = \varphi_h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s) \qquad (h = 1, 2, \ldots r) \tag{4}$$

auflösbar seien. Der Pfaff'sche Ausdruck:

$$\Delta \equiv dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m$$

verwandelt sich dann, wenn man die Gröfsen λ_{s+h} durch ihre Werte (4) ersetzt, in einen Pfaff'schen Ausdruck

1) Bäcklund I.

$$\varDelta_0 \equiv a_1(\lambda_1 \cdots \lambda_s)\,d\lambda_1 + \cdots + a_s(\lambda_1 \,..\, \lambda_s)\,d\lambda_s,$$

welcher nach Art. 236 die Klasse

$$(5) \qquad \varkappa_0 = \sigma + \sigma' + 2m + 1 - 2r$$

besitzt; dabei bedeuten 2σ und $2\sigma'$ die Rangzahlen, die den Matrices

$$(B_r) \qquad \| [F_i F_k] \|; \qquad (C_r) \left\| \begin{matrix} [F_i F_k] & \dfrac{\partial F_i}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_k}{\partial z} & 0 \end{matrix} \right\| \qquad (i, k = 1 \,..\, r)$$

vermöge des Gleichungensystems (1) zukommen.

Ist zunächst $\varkappa_0 = 0$, so verschwindet $\varDelta_0$ identisch, d. h. die Gleichungen (1) stellen an sich schon eine Element-M_{2m+1-r} des Raums $R_{m+1}(zx_1 \,..\, x_m)$ dar; natürlich mufs dann $r \geqq m + 1$ sein. Man hat jetzt

$$\sigma = \sigma' - 1 = r - m - 1,$$

und das Problem, alle gemeinsamen Integralmannigfaltigkeiten des Systems (1) zu finden, wird trivial; man braucht ja zu diesem Zweck nur den Gleichungen (1) beliebige weitere Relationen hinzuzufügen. Es sei noch daran erinnert, dafs im Falle $r \geqq m + 1$ die Zahl $r - m - 1$ der Minimalwert ist, den σ annehmen kann, wenn die gegebenen Gleichungen (1) wirklich ein r-gliedriges Gleichungensystem im Sinne von Art. 40 darstellen sollen (Art. 243).

Es sei zweitens $\varkappa_0 \geqq 1$. Da σ' entweder gleich σ oder gleich $\sigma + 1$ ist, so folgt aus (5), dafs die Pfaff'sche Gleichung $\varDelta_0 = 0$ in allen Fällen auf eine reduzirte Form

$$(6) \qquad d\zeta - \pi_1 d\xi_1 - \cdots - \pi_{\tau-1} d\xi_{\tau-1} = 0$$

gebracht werden kann, wenn man mit τ die Zahl

$$\tau = \sigma + m + 1 - r,$$

und mit ζ, π_i, ξ_i gewisse $2\tau - 1$ unabhängige Funktionen der Variabeln λ_1, λ_2, .. λ_s bezeichnet.

Die Herstellung der reduzirten Form (6) erfolgt, wie man mit Hülfe von Kap. IX, § 4 leicht erkennt, durch je eine Integrationsoperation

$$2\tau - 1,\ 2\tau - 3,\ ..\ 3,\ 1.$$

Es seien

$$\eta_1^{(k)} \eta_2^{(k)} \,..\, \eta_r^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \,..\, r - 2\sigma)$$

die linear unabhängigen Lösungen, die das Gleichungensystem

$$\eta_1[F_1F_i] + \eta_2[F_2F_i] + \cdots + \eta_r[F_rF_i] = 0 \qquad (i = 1 \,..\, r)$$

vermöge (1) besitzt. Setzt man dann

$$X_kf \equiv \eta_1^{(k)}[F_1f] + \cdots + \eta_r^{(k)}[F_rf] \qquad (k = 1 \,..\, r - 2\sigma),$$

substituirt man ferner in den Koeffizienten der Gleichungen

$$X_1f = 0,\ X_2f = 0,\ ..\ X_{r-2\sigma}f = 0$$

für die $\lambda_{s+1}\ ..\ \lambda_{2m+1}$ ihre Ausdrücke (4) und läfst die mit

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_{s+1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial \lambda_{2m+1}}$$

multiplizirten Terme fort, so entsteht ein $r - 2\sigma$-gliedriges vollständiges System J mit den unabhängigen Variabeln λ_1, λ_2, .. λ_s; die $2\tau - 1$ Funktionen ζ, π_i, ξ_i bilden ein System unabhängiger Lösungen desselben, und zwar kann z. B. für ξ_1 ein beliebiges Integral von J gewählt werden.

426. Die Relationen (1) definiren zusammen mit den folgenden:

(7) $$\zeta = c;\ \xi_1 = c_1,\ ..\ \xi_{\tau-1} = c_{\tau-1}$$

τ-fach unendlich viele gemeinsame Integral-$M_{m-\sigma}$ der vorgelegten Gleichungen (1); jedes gemeinsame Flächenelement dieser Gleichungen ist im allgemeinen auf einer und nur einer derartigen Element-$M_{m-\sigma}$ enthalten. Wir bezeichnen die Gesamtheit der durch (1) (7) definirten Integral-$M_{m-\sigma}$ als ein „vollständiges Integral" der gegebenen Gleichungen (1).

Die Integral-$M_{m-\sigma}$ eines vollständigen Integrals sind also dadurch charakterisirt, dafs sie zusammen alle ∞^{2m+1-r} Flächenelemente umfassen, die durch die Relationen (1) definirt werden.

Die allgemeinste Integral-$M_{m-\sigma}$ des Systems (1) wird erhalten, indem man nach den Regeln von Kap. VII die Pfaff'sche Gleichung (6) durch τ Relationen zwischen den Variabeln ζ, ξ, π befriedigt. Der Übergang von einem bestimmten vollständigen Integral zu einem beliebigen andern vollständigen Integral vollzieht sich wie in Art. 318 durch eine Berührungstransformation der $2\tau - 1$ Variabeln $\zeta\pi\xi$.

Um alle weniger als $m - \sigma$-fach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten der gegebenen Gleichungen zu finden, hat man der Pfaff'schen Gleichung (6) durch ein System von mehr als τ Relationen in allgemeinster Weise zu genügen; nach Kap. VII, § 2 entstehen dadurch Gleichungensysteme, die aufser den Variabeln ζ, ξ_i, π_i auch noch λ_1 .. λ_s explicite enthalten können.

427. Die Relationen

$$\zeta = c,\ \xi_i = c_i,\ \pi_i = \gamma_i \quad (i = 1, .. \tau - 1;\ c, c_i, \gamma_i \text{ arb. Konstante})$$

definiren unter der Annahme $r > 2\sigma$ mit (1) zusammen ein System von $\infty^{2\tau-1}$-fach unendlich vielen, $r - 2\sigma$-fach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten von (1), welche wir als „Charakteristiken“ oder „charakteristische $M_{r-2\sigma}$“ des gegebenen Gleichungsystems (1) bezeichnen wollen. Diese Charakteristiken sind auch definirt durch die Relationen:

$$\omega_i(\lambda_1 \lambda_2 \, .. \, \lambda_s) = c_i \qquad (i = 1, 2, .. \, 2\tau - 1),$$

worin die linken Seiten ein System unabhängiger Lösungen des vorhin definirten vollständigen Systems J darstellen (Art. 425).

Wir nennen das Wertsystem

$$z^0 x_1^0, \cdot\cdot\, x_m^0, p_1^0, \cdot\cdot\, p_m^0 \tag{8}$$

ein *nichtsinguläres Flächenelement* des gegebenen Gleichungensystems (1), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) alle Funktionen $F_1, \, .. \, F_r$ sind an der Stelle (8) regulär und verschwinden daselbst.

2) Es verschwinden an der Stelle (8) weder alle 2σ-reihigen Determinanten der Matrix (B_r) noch auch alle r-reihigen Determinanten des Schemas:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, & \cdot\cdot & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}, & \frac{\partial F_1}{\partial z}, & \frac{\partial F_1}{\partial p_1}, & \cdot\cdot \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_1}, & \cdot\cdot & \frac{\partial F_r}{\partial x_m}, & \frac{\partial F_r}{\partial z}, & \frac{\partial F_r}{\partial p_1}, & \cdot\cdot \quad \frac{\partial F_r}{\partial p_m} \end{array} \right\| . \tag{9}$$

Ein Wertsystem (8), das zwar die Bedingung 1), nicht aber 2) erfüllt, wird ein *singuläres* Flächenelement genannt. Unter einer *singulären Integralmannigfaltigkeit* verstehen wir dem entsprechend eine solche, die aus lauter singulären Flächenelementen besteht. Dies vorausgeschickt, erkennt man leicht die Richtigkeit folgender Sätze:

Jedes nichtsinguläre Flächenelement des Systems (1) *ist auf einer und nur einer charakteristischen $M_{r-2\sigma}$ enthalten.*

Liegen zwei benachbarte nicht singuläre Flächenelemente, die dem System (1) *genügen, vereinigt, so liegen die bezw. von ihnen ausgehenden charakteristischen $M_{r-2\sigma}$ ihrer ganzen Ausdehnung nach vereinigt.*

Enthält eine nicht singuläre Integral-$M_{m-\sigma}$ ein gewisses Flächenelement (8), *so enthält sie auch die ganze von ihm ausgehende Charakteristik,* m. a. W.: *Jede nicht singuläre Integral-$M_{m-\sigma}$ ist von $\infty^{m-r+\sigma}$ charakteristischen $M_{r-2\sigma}$ erzeugt.*

428. Aufser den in Art. 426 genannten Integraläquivalenten, welche

mit Hülfe einer reduzirten Form (6) durch Gleichungensysteme in $\zeta, \xi_i \pi_i$ dargestellt werden, kann das gegebene System (1) nur noch singuläre Integraläquivalente besitzen (Kap. VII, § 2).

Diese müssen, soferne sie überhaupt existiren, aufser (1) auch noch diejenigen Relationen erfüllen, die durch Nullsetzen aller 2σ-reihigen Hauptunterdeterminanten von (B_r) oder aller r-reihigen Determinanten in dem Schema (9) erhalten werden; ihre Ermittelung kommt darnach, wie man leicht einsieht, in allen Fällen darauf hinaus, alle gemeinsamen nichtsingulären Integralmannigfaltigkeiten eines Gleichungensystems zu finden, das aus (1) durch Hinzufügung gewisser Relationen entsteht.

Von besonderem Interesse ist die Frage nach den etwa vorhandenen *mehr als $m - \sigma$-fach ausgedehnten* Integralmannigfaltigkeiten, die nach Art. 191 notwendig singulär sind; dieser Frage wollen wir uns jetzt zuwenden.

429. Sollen die Gleichungen (1) eine Integral-$M_{m-\varrho}$ gemein haben, wobei

$$m - \varrho > m - \sigma, \text{ also } \varrho < \sigma$$

angenommen wird, und $m - \varrho$, wie sich von selbst versteht, nicht gröfser als $2m + 1 - r$ sein darf, so mufs es nach Art. 243 ein Gleichungensystem

$$(10) \qquad F_1 = 0, \ldots F_r = 0, F_{r+1} = 0, \ldots F_{m+\varrho+1} = 0$$

geben, vermöge dessen der Rang der Matrix $(B_{m+\varrho+1})$ gleich 2ϱ wird. Eine gemeinsame Integral-$M_{m-\varrho}$ des gegebenen Gleichungensystems (1) mufs demnach auch alle diejenigen Relationen erfüllen, die durch Nullsetzen aller $2\varrho + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten der Matrix (B_r) entstehen. Da $2\varrho < 2\sigma$, wo 2σ den Rang von (B_r) bedeutet, so erhält man auf diesem Wege sicher neue Relationen. Diese fügen wir dem System (1) hinzu, und denken uns das entstehende Gleichungensystem auf eine Form gebracht, in der es den Festsetzungen des Art. 40 genügt. Auf das so erhaltene Relationensystem

$$(11) \qquad F_1 = 0, \ldots F_r = 0, F_{r+1} = 0, \ldots F_{r+r'} = 0$$

wenden wir dieselbe Schlufsweise von neuem an, d. h. wir setzen alle $2\varrho + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten von $(B_{r+r'})$ gleich null, und fügen die erhaltenen Relationen dem System (11) bei, u. s. w. Auf diesem Wege erhalten wir nach einer endlichen Anzahl von Schritten notwendig entweder

1) ein mehr als $m + 1 + \varrho$-gliedriges Relationensystem zwischen den Variabeln z, x_i, p_i, und das gegebene System (1) besitzt dann überhaupt keine Integral-$M_{m-\varrho}$;

oder 2) ein $m + 1 + \varrho$-gliedriges Gleichungensystem (10), vermöge dessen in der zugehörigen Matrix $(B_{m+\varrho+1})$ alle $2\varrho + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten verschwinden, das also eine $m - \varrho$-fach ausgedehnte Elementmannigfaltigkeit darstellt; diese ist dann die einzige gemeinsame Integral-$M_{m-\varrho}$ der gegebenen Gleichungen (1);

oder 3) ein weniger als $m + \varrho + 1$-gliedriges Gleichungensystem (11), vermöge dessen der Rang von $(B_{r+r'})$ nicht gröfser als 2ϱ ist. Die gegebenen Gleichungen besitzen dann unbegrenzt viele Integral-$M_{m-\varrho}$, die nach der Vorschrift des Art. 426 gefunden werden.

Durch diesen Ansatz, der das Verfahren des Art. 351 als Spezialfall ($\varrho = 0$) enthält, ist das in Rede stehende Problem vollkommen erledigt.

Wir bemerken noch, dafs sich den Resultaten dieses § zwei ganz analoge Theorien an die Seite stellen lassen; die eine bezieht sich auf die Annahme, dafs die Gleichungen (1) von z nicht abhängen, die andere auf den Fall, dafs die Gleichungen (1) aufserdem noch hinsichtlich der p_i homogen sind.

Kapitel XV.

Übersicht über die historische Entwickelung der Theorie des Pfaff'schen Problems.[1])

430. **J. F. Pfaff; C. F. Gauss.** Über den historischen Ausgangspunkt der Theorie des Pfaff'schen Problems wurde bereits in der Einleitung berichtet. Es soll hier auf den Inhalt der Pfaff'schen Abhandlung [I] mit kurzen Worten eingegangen werden.

Das wesentlichste Ergebnis dieser Abhandlung besteht in dem Satze, dafs jeder Pfaff'schen Gleichung in 2ν oder $2\nu - 1$ Variabeln durch ν Relationen zwischen diesen Variabeln genügt werden kann. Den Beweis dieses Satzes führt *Pfaff* mittels seines Reduktionsverfahrens (Kap. IV, § 1), und zwar durch vollständige Induktion, nachdem er zuvor die Spezialfälle $\nu = 2, 3, 4, 5$ eingehend behandelt hat. Damit erhält er gleichzeitig eine Integrationstheorie der partiellen Differen-

1) Die in [ ] bezw. in ( ) beigefügten Citate beziehen sich auf das Litteraturverzeichnis am Schlusse dieses Kapitels, resp. auf die Kapitel und Artikel dieser Vorlesungen.

tialgleichungen erster Ordnung mit einer Unbekannten und beliebig vielen Independenten, auf Grund einer Überlegung, die schon in der Einleitung dargelegt wurde.

Pfaff giebt unter der Annahme eines bedingungslosen Differentialausdrucks mit gerader Variabelnzahl auch das allgemeine Bildungsgesetz des bei der „geraden Reduktion" (Art. 108) zu benutzenden Hülfssystems gewöhnlicher Differentialgleichungen, m. a. W. die Definition der Pfaff'schen Aggregate (Art. 18), natürlich ohne Heranziehung symbolischer Bezeichnungen. Auf den Fall *bedingter* Differentialausdrücke geht *Pfaff* nicht näher ein, sondern bemerkt in dieser Hinsicht nur, daſs eine Pfaff'sche Gleichung mit $2\nu - 1$ Variabeln durch Einführung neuer Veränderlicher nur dann auf eine Gleichung mit weniger als $2\nu - 1$ Variabeln reduzirt werden kann, wenn ihre Koeffizienten eine gewisse Bedingungsgleichung erfüllen (wenn nämlich die zugehörige Determinante (B) des Art. 96 verschwindet; vgl. auch Art. 116).

Gauss [I] betont in seinem Referat über die Pfaff'sche Arbeit die unmittelbar aus *Pfaff's* Analyse folgende Thatsache, daſs jeder Pfaff'sche *Ausdruck* in 2ν oder $2\nu - 1$ Veränderlichen auf eine Form mit nur ν Differentialelementen gebracht werden kann; er erläutert insbesondere die „ungerade Pfaff'sche Reduktion" (Art. 109), und bemerkt zum Schluſs [l. c. p. 1037], daſs die Annahme eines „bedingten" Pfaff'schen Ausdrucks der Anwendung von Pfaff's Reduktionsverfahren keinerlei Schwierigkeit entgegenstellt.

Die Pfaff'sche Abhandlung ist nach zwei Richtungen hin grundlegend geworden. Fürs erste macht sie zum ersten Male lineare totale Differentialgleichungen und -Ausdrücke zum Gegenstand der Untersuchung, während noch von *L. Euler* [I, Bd. 3, p. 7 f.] eine nicht exakte lineare totale Differentialgleichung als absurd bezeichnet worden war, und *G. Monge* [II, p. 535] demgegenüber nur ganz kurz hervorgehoben hatte, daſs eine derartige Gleichung, falls sie n Variabeln enthält, immer durch gewisse $n - 1$, eventuell auch durch weniger Relationen zwischen den n Variabeln erfüllt werden könne.

Zweitens aber lehrt die Pfaff'sche Arbeit die Zurückführung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit beliebig vielen Independenten auf gewöhnliche Differentialgleichungssysteme, ein Problem, das *J. L. Lagrange* [I, III] nur erst für den Fall zweier Independenten erledigt hatte. Als Ansatz von weittragender Bedeutung erwies sich dabei insbesondere die Auffassung der Integrale einer partiellen Differentialgleichung als der Integraläquivalente einer gewissen Pfaff'schen Gleichung, ein Gedanke, den später *Lie* (Art. 436) in seiner vollen Allgemeinheit wieder aufgegriffen hat.

431. **A. Cauchy; C. G. J. Jacobi.** Im Jahre 1819 zeigte *A. Cauchy* [I], dafs die Integration einer partiellen Differentialgleichung I. O. mit m Independenten auf diejenige eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückkommt (Art. 342); dieses System ist mit dem ersten nach Pfaff's Methode zu integrirenden Hülfssystem identisch.

Demgegenüber begnügte sich *Jacobi* [II] noch im Jahre 1827 mit einer blofsen Herleitung dieses ersten Hülfssystems (vgl. Art. 343, Schlufs), nach einer Methode, die keineswegs unmittelbar erkennen läfst, dafs die Integration desselben die der partiellen Differentialgleichung I. O. nach sich zieht.[1]) Erst nachdem *W. R. Hamilton* [I] die Integration der Differentialgleichungen der Dynamik auf die Ermittelung eines vollständigen Integrals einer einzigen partiellen Differentialgleichung I. O. zurückgeführt hatte, erkannte *Jacobi* [III] im Jahre 1839 durch Umkehrung des Hamilton'schen Gedankengangs, dafs der Pfaff'sche Ausdruck in $2m$ Variabeln, auf den sich $dz - p_1 dx_1 - . - p_m dx_m$ vermöge der gegebenen Differentialgleichung reduzirt, durch Einführung der Hauptintegrale des ersten Pfaff'schen Hülfssystems sogleich eine Form mit der Minimalzahl von Differentialelementen annimmt[2]); wir wissen (Art. 342), dafs dieses Resultat mit dem Cauchy'schen vollkommen äquivalent ist.[3])

Von dem Reduktionsverfahren, das *Pfaff* für beliebige bedingungslose Differentialausdrücke mit gerader Variabelnzahl aufgestellt hatte, gibt *Jacobi* [II] eine vereinfachte Darstellung unter Gebrauch des Symbols $(1, 2, .. 2\nu)$ für das Pfaff'sche Aggregat $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung (Art. 18), und überträgt [in III] auf diesen allgemeineren Fall nicht nur seine Methode der Hauptintegrale, sondern auch das Hamilton'sche Theorem, wonach ein vollständiges Integral einer gewissen partiellen Differentialgleichung I. O. die allgemeinen Integralgleichungen des zugehörigen kanonischen Systems (Kap. XIII, § 5) ohne weiteres aufzustellen erlaubt.

Diese Übertragung liefert den Satz: „Ist ein bedingungsloser

1) Die betr. Ergänzung der Jacobi'schen Methode gibt L. Boltzmann [I].

2) Die für die Dynamik besonders wichtige Herstellung eines vollständigen Integrals geschieht bei *Jacobi* durch Eliminationen, die nicht in allen Fällen ausführbar sind (Art. 312); dieser Umstand veranlafste zahlreiche Untersuchungen, die eine Ergänzung des Jacobi'schen Verfahrens bezwecken [z. B. Mayer II, Bertrand III, Darboux III, Farkas I]. Die naheliegende Ausdehnung der ersten Methode Jacobi's auf Involutionssysteme partieller Diffgl. I. O. (vgl. Art. 363 f.) geben Morera [II] und Saltikow [I, II]; die Verallgemeinerung der Cauchy'schen Methode für Involutionssysteme (Art. 367) rührt von Lie [V] her.

3) vgl. hiezu die Bemerkungen von Cauchy [II p 239 und p. Comptes Rendus 14 p. 881].

Pfaff'scher Ausdruck Δ in 2ν Variabeln auf die Form $F_1 df_1 + \cdots + F_\nu df_\nu$ gebracht, so bilden die f_ι und die Verhältnisse der F_ι zusammen $2\nu - 1$ unabhängige Lösungen des Pfaff'schen Hülfssystems, oder, was dasselbe besagt, der zu Δ gehörigen partiellen Differentialgleichung V (Kap. V, § 1)."

In der Arbeit V, § 20, worin *Jacobi* auf jenes Hülfssystem die Theorie seines Multiplicators (Art. 56) anwendet, findet sich ein Ansatz [Werke Bd. 4, p. 424], der dem Wesen der Sache nach auf die in Kap. IV § 3 angegebene Reduction eines bedingungslosen Δ mit ungerader Variabelnzahl hinauskommt, und für den Fall dreier Variabeln vollständig durchgeführt wird; wir haben aus diesem Grunde die genannte Reduktion als „Jacobi'sche" bezeichnet. In dem von *Jacobi* betrachteten Spezialfall $n = \varkappa = 2\lambda - 1$ hängt diese Reduktion ab von der Integration der zu Δ gehörigen Differentialgleichung V (Kap. V), von der Jacobi zeigt, daſs sie den Multiplicator 1 besitzt (Art. 133).

Die Resultate, zu denen *Jacobi* in dem folgenden § 21 der citirten Arbeit (Werke Bd. 4 p. 426—439) gelangt, lassen sich unter Gebrauch unserer bisherigen Bezeichnungsweise kurz so zusammenfassen: Kann ein Pfaff'scher Ausdruck $\Delta \equiv a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$ in n Variabeln auf eine Form $F_1 df_1 + \cdots F_m df_m$ gebracht werden, worin $n \geqq 2m$ ist, so verschwinden alle $2m+1$-reihigen Determinanten der zu Δ gehörigen Matrix (A) (Art. 96); verschwinden nun nicht alle $2m$-reihigen Determinanten dieser Matrix, so bilden die totalen Differentialgleichungen

$$(1) \qquad a_i dt = \sum_k a_{ik} dx_k \qquad \left(i = 1, .. n;\ a_{ik} \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right)$$

in den $m+1$ Variabeln $t, x_1 .. x_n$ ein $2m$-gliedriges unbeschränkt integrabeles System, das also $2m$ Integrale, insbesondere $2m - 1$ von t unabhängige Integrale besitzt; diese Integrale sind die f_ι und die Verhältnisse der F_i (die Gleichungen (1) verwandeln sich nach Elimination von dt in das zu V adjungirte System totaler Differentialgleichungen; vgl. Art. 140).

Die Schluſsworte dieses § der Multiplicatorarbeit (Werke Bd. 4 p. 438 u. f.) lassen vermuten, daſs *Jacobi* schon damals (1845) für beliebige Pfaff'sche Ausdrücke dasjenige Reduktionsverfahren besaſs, welches die Aufsuchung je eines Integrals successiver vollständiger Systeme verlangt (Kap. VI und IX). Dies ist um so wahrscheinlicher, als er schon seit 1836[1]) im Besitze seiner „zweiten Methode" war (Kap. XIII), also desjenigen Spezialfalls der allgemeinen Theorie, welcher

1) Vgl. den Brief an *Encke* vom 29. Nov. 1836, Journ. f. Math. Bd. 17, p. 68 = Werke, Bd. 4. p. 41, bes. p. 52ff.

sich auf das zu einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung gehörige Pfaff'sche Problem bezieht; wir wissen überdies, wie man von diesem Spezialfall ausgehend zu der analogen Reduktionsmethode für beliebige Pfaff'sche Ausdrücke gelangen kann.[1]) Jacobi's zweite Methode wurde erst nach seinem Tode ausführlich publizirt [VI, IX, X]; unterdessen hatten *W. F. Donkin* [I], *J. Liouville* [I] und *É. Bour* [I, II] die Hauptsätze dieser Theorie unabhängig von Jacobi aufgefunden.

432. **L. Natani.** Die Übertragung des Jacobi'schen Grundgedankens auf beliebige Pfaff'sche Ausdrücke blieb *L. Natani* und *A. Clebsch* vorbehalten. Wir geben zunächst eine Übersicht über die Hauptresultate der *Natani*'schen Abhandlung [I].

Der erste Teil derselben [p. 301—306] enthält eine bemerkenswerte Ausdehnung der Theorie der Hauptintegrale auf unbeschränkt integrable Systeme totaler Differentialgleichungen (es ist dies dieselbe Methode, die in Art. 84 dieses Buchs dargelegt wurde), sowie den Satz des Art. 75; die Variabeln, die wir damals $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots x_{p+q}$ genannt haben, und von denen angenommen wurde, dafs sie sich aus dem gegebenen unbeschränkt integrabeln System vollständig eliminiren lassen, bezeichnet *Natani* als „Indices" dieses Systems.

Es folgt [p. 306—312] eine Darstellung des Pfaff'schen Reduktionsverfahrens für ein bedingungsloses $\varDelta$ mit $n = 2\nu$ Variabeln. Auf p. 312ff. behandelt Natani den Fall eines bedingungslosen $\varDelta$ mit $2\nu + 1$ Variabeln in der Weise, dafs er eines der $\nu + 1$ Differentialelemente in der zu suchenden $\nu + 1$-gliedrigen reduzirten Form willkürlich $(= d\varphi)$ annimmt, den Ausdruck $\varDelta$ vermöge der Relation $\varphi =$ const. auf einen Ausdruck $\varDelta'$ in 2ν Variabeln reduzirt, und auf diesen die Pfaff'sche Methode anwendet. Statt des Pfaff'schen Hülfssystems H', das zu $\varDelta'$ gehört, betrachtet aber *Natani* dasjenige System H gewöhnlicher Differentialgleichungen in $x_1 \ldots x_{2\nu+1}$, welches die Lösungen von H' und aufserdem noch φ zu Integralen hat.[2])

Bei der Erörterung der Bedingungen dafür, dafs ein Ausdruck $\varDelta$ mit n Variabeln sich auf die Form $F_1 df_1 + \cdots + F_m df_m \left(m \leqq \frac{1}{2} n\right)$ reduziren lasse, geht *Natani* nicht über das von Jacobi geleistete hinaus; wie dieser zeigt er, dafs dazu das Verschwinden aller $2m + 1$-reihigen Determinanten der Matrix (A) (Art. 96) notwendig ist, und behauptet ohne genügende Begründung, dafs diese Bedingung auch hin-

1) Vgl. weiter unten Nr. 433 und Kap. XI, § 3 dieses Buches.

2) Die zu H adjungirte lineare partielle Differentialgleichung wird erhalten, indem man die Determinante (B_2) des Art. 211 gleich null setzt, und φ für f_1, f für f_2 substituirt, ist also in der Bezeichnungsweise von Kap. IX, § 2 mit der Gleichung $[\varphi f] = 0$ identisch.

reiche; dafs ferner die f_i und die Verhältnisse der F_i die unabhängigen Lösungen desjenigen Systems S totaler Differentialgleichungen seien, das aus den Relationen (1) der vor. Nr. durch Elimination von dt hervorgeht, und dafs somit S unter den gemachten Annahmen ein $2m - 1$-gliedriges unbeschränkt integrables System darstellt. Wie man sieht, führt *Natani* hier stillschweigend die Annahme ein, dafs nicht alle $2m$-reihigen Determinanten von (A) verschwinden, dafs also $\varDelta$ die Klasse $2m$ besitzt, eine Annahme, die auch weiterhin festgehalten wird. Das vorhin genannte System S ist jetzt in unserer Terminologie das adjungirte des zu $\varDelta$ gehörigen vollständigen Systems V (Kap. V, § 1).

Für die Reduktion des Pfaff'schen Ausdrucks auf eine Form mit der Minimalzahl von Differentialelementen gibt jetzt *Natani* zwei Methoden. Einmal führt er [p. 318] die $2m - 1$ Hauptintegrale von S als neue Variable in $\varDelta$ ein, wodurch dieses in einen bedingungslosen Ausdruck mit $2m$ Variabeln übergeht (Art. 135), der nach Pfaff's Methode weiter behandelt wird. Zweitens aber [p. 319ff.] entwickelt er, in Ausführung des Jacobi'schen Gedankens, geradezu die „explicite" Methode von Kap. IX, freilich immer unter der stillschweigenden Voraussetzung eines Pfaff'schen Ausdrucks gerader Klasse, und ausführlicher nur für den Fall eines bedingungslosen $\varDelta$ mit gerader Variabelnzahl; auch ist zu betonen, dafs *Natani* die successiven Systeme $V_1, V_2 ..$ des Kap IX zwar wirklich aufstellt, aber ihre Vollständigkeit ebenso wenig nachweist, wie diejenige des Systems V.

Die Anwendung dieser Theorie auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung [p. 325] führt den genannten Autor zu einer Ableitung beider Jacobi'scher Methoden, und zu einer Übertragung der zweiten dieser Methoden auf den Fall, dafs die gegebene partielle Differentialgleichung die Unbekannte z explicite enthält, d. h. zu einer Verallgemeinerung der Lagrange'schen Methode (Art. 368).

433. **A. Clebsch.** In der Abhandlung [II][1]) stellt sich *Clebsch* die Aufgabe, Jacobi's zweite Methode auf beliebige Pfaff'sche Ausdrücke zu übertragen. Die Grundlage für seine Untersuchungen bildet die ohne Beweis als richtig angenommene Thatsache: Ist λ die Minimal zahl von Differentialelementen, auf die ein Pfaff'scher Ausdruck $\varDelta$ mit n Variabeln reduzirt werden kann, und

$$(2) \qquad F_1 df_1 + \cdots + F_\lambda df_\lambda$$

eine solche reduzirte Form, so sind die Funktionen F_i, f_i entweder I) von einander unabhängig, oder II) durch *eine* Relation verknüpft. Im

1) Die Note [I] enthält eine Voranzeige zu [II].

letzteren Fall nimmt *Clebsch* (wiederum ohne eigentlichen Beweis) an, dafs obige Form durch eine einfachere

$$(3) \qquad df_\lambda + F_1 df_1 + \cdots + F_{\lambda-1} df_{\lambda-1}$$

ersetzt werden könne, worin die $2\lambda - 1$ Funktionen f, F nunmehr unabhängig sind. Im übrigen ist der Gedankengang demjenigen analog, der in Art. 296 dieses Buchs auseinandergesetzt wurde. *Clebsch* betrachtet die allgemeinste Normalform

$$\Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_\lambda d\varphi_\lambda \text{ bezw. } d\varphi_\lambda + \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_{\lambda-1} d\varphi_{\lambda-1}$$

von $\varDelta$; er zeigt (freilich nicht mit genügender Stringenz), dafs für φ_1 im Falle I) eine beliebige Funktion der Gröfsen:

$$(4) \qquad \frac{F_2}{F_1} \cdots \frac{F_\lambda}{F_1}, f_1, f_2, \cdots f_\lambda,$$

im Falle II) eine solche der Gröfsen

$$(5) \qquad F_1, \cdots F_{\lambda-1}, f_1, \cdots f_{\lambda-1}$$

gewählt werden könne, reduzirt $\varDelta$ vermöge der Relation $\varphi_1 = \text{const.}$ auf einen Ausdruck $\varDelta^{(1)}$ mit $n-1$ Variabeln, der sich als Summe von $\lambda - 1$ Termen darstellen läfst, ebenso $\varDelta^{(1)}$ vermöge einer Relation $\varphi_2^{(1)} = \text{const.}$ u. s. w., wie in Kap. XI, § 3 auseinandergesetzt wurde.

Die wichtigste Leistung von *Clebsch* ist nun *die Darlegung des Zusammenhangs zwischen den F, f einer Normalform einerseits, und den Funktionen a_i, a_{ik} andererseits* (Kap. V, § 1 u. 2). Aus diesem Zusammenhang hätte er vor allem die notwendigen Bedingungen für das Eintreten der Fälle I) und II) ablesen können; doch sind die darauf bezüglichen Aufstellungen von *Clebsch* weder vollständig noch überhaupt richtig.

Dagegen erhält *Clebsch* auf diesem Wege für die oben genannte Funktion φ_1, die bisher nur als arbiträre Funktion der Gröfsen (4) bezw. (5) definirt war, ein System linearer homogener partieller Differentialgleichungen, deren Koeffizienten nur von den a_i, a_{ik} abhängen, m. a. W. das vollständige System V und damit seine erste Reduktionsmethode (Kap. VI, § 1). Im Falle II) gibt *Clebsch* [p. 224] noch eine zweite Methode an, indem er φ_1 einer arbiträren Funktion der $2\lambda - 1$ Gröfsen F, f in der Normalform (3) gleichsetzt, demnach als beliebige Lösung des zu $\varDelta$ gehörigen vollständigen Systems W definirt (Kap. V, § 2), und $\varDelta$ vermöge $\varphi_1 = \text{const.}$ auf einen Ausdruck mit $n-1$ Variabeln reduzirt, dessen Normalform $\lambda - 1$ Differentialelemente enthält (Art. 161).

Die weiteren Entwickelungen von *Clebsch* beziehen sich ausschliefslich auf den Fall eines bedingungslosen $\varDelta$ mit $n = 2\nu$ Varia beln. Für diesen Fall wird die Serie der partiellen Differentialgleichungen V, $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ .. (vgl. Kap. VI, § 2) aufgestellt [p. 228—232], sodann durch eine äufserst beschwerliche Rechnung [p. 232—242] der Übergang von der impliciten zu der expliciten Reduktionsmethode gewonnen. Es werden die Klammersymbole $(f)_0$ (bei Clebsch: (f)) und und (φf) (bei Clebsch: $[\varphi f]$) definirt, und die Formen angegeben, in die sie übergehen, wenn man die F, f als neue Independente einführt (Kap. X, § 3). Auch zeigt *Clebsch*, dafs für jede andere Normalform $\Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_\nu d\varphi_\nu$ die Bedingungen $(\varphi_i)_0 \equiv (\varphi_i \varphi_k) \equiv 0$ erfüllt sind; er stellt schliefslich die Identitäten (39) p. 369 und (43) p. 370 dieses Buches auf, und zeigt, wie man mit ihrer Hülfe aus 2 bezw. 3 bekannten Lösungen der Gleichung $(f)_0 = 0$ neue ableiten kann (Art. 272).

Die Abhandlung [III] von *Clebsch* ergänzt die in [II] für ein bedingungsloses $\varDelta$ mit 2ν Variabeln gewonnenen Resultate. Es wird zunächst die Normalform der Klammersymbole $(f)_0$ und (φf) durch die in Kap. X, § 3 angegebene Rechnung direkt abgeleitet, und hieraus sofort gefolgert, dafs die Herstellung einer Normalform von $\varDelta$ auf die Ermittelung je einer Lösung der successiven vollständigen Systeme

(6) $\quad (f) = 0,\ (f_1 f) = 0, \ldots (f_k f) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots \nu - 1)$

hinauskommt. Auch gibt *Clebsch* [p. 151—154] einen direkten, sehr eleganten, auf der Kompositionstheorie der Determinanten beruhenden Beweis des Satzes, dafs zum Bestehen der Identität

$$\varDelta \equiv F_1 df_1 + \cdots + F_\nu df_\nu$$

das Erfülltsein der Bedingungen $(f_i)_0 \equiv 0$ $(f_i f_k) \equiv 0$ nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist.

Der übrige Teil der Abhandlung [III] enthält verschiedene Sätze über die Anwendung der Jacobi'schen Multiplikatortheorie auf das erste Hülfssystem, über die Ableitung neuer Lösungen des vollst. Systems (6), falls einige Lösungen bereits bekannt sind, und über die Verwertung des Jacobi'schen Integrationsverfahrens (Art. 67) für vollständige Systeme der Form (6).

M. Hamburger [I] vergleicht die Resultate von *Clebsch* und *Natani*, und weist insbesondere darauf hin, dafs die Hauptergebnisse von *Clebsch* bereits durch die *Natani*'sche Abhandlung antizipirt sind; ferner ergänzt er diese letztere durch wirkliche Aufstellung der successiven vollständigen Systeme V_ν und W_ν für ein bedingtes $\varDelta$, und zwar auch in der Determinantenform, die ungefähr gleichzeitig von *G. Frobenius* [I] angegeben wurde (vgl. die übernächste Nr.).

434. **H. Grassmann.** Den wichtigsten Fortschritt hat die Theorie

des Pfaff'schen Problems *H. Grassmann* [I] zu verdanken. Dieser Fortschritt besteht in dem strengen Nachweis des Satzes, dafs jede Pfaff'sche Gleichung, für welche der Rang der zugehörigen Matrix (B) (Art. 96) gleich 2λ ist, auf eine reduzirte Form mit λ und nicht weniger Differentialelementen gebracht werden kann. Diesen Nachweis erbringt *Grassmann* durch die in Kap. IV, § 2 auseinandergesetzte Übertragung von Pfaff's Reduktionsmethode auf *bedingte* Differentialausdrücke.

Bezüglich der Einzelnheiten der *Grassmann*'schen Untersuchung verweisen wir auf die vortreffliche Note *Engel's* (im Anhang zu Grassmann's Werken I, 2ter Teil p. 482—495). Es sei hier nur bemerkt, dafs *Grassmann* im Wesentlichen nur Pfaff'sche *Gleichungen* betrachtet, und demgemäfs die Unterscheidung der Fälle $\varkappa = 2\lambda$ und $\varkappa = 2\lambda - 1$ nicht besonders betont, obwohl er die Theorie der drei fundamentalen Matrices (A) (B) (C) des Art. 96 vollständig beherrscht. In Wirklichkeit lassen sich aber aus seiner Darlegung alle in Art. 114—119 dieses Buches entwickelten Sätze, insbesondere auch das von uns so genannte „Grassmann'sche Theorem" (Art. 118) ohne weiteres ablesen.

Leider blieben die Grassmann'schen Untersuchungen, wohl hauptsächlich wegen der schwer zugänglichen Bezeichnungsweise, bis in die jüngste Zeit vollkommen unbeachtet.

435. **G. Frobenius.** Das Fundamentaltheorem der Theorie des Pfaff'schen Problems, dem *Grassmann*, wie wir gesehen haben, bereits aufserordentlich nahe gekommen war, ward erst im Jahre 1876 ungefähr gleichzeitig von *G. Frobenius* [I] und *S. Lie* [XI], und zwar auf ganz verschiedenen Wegen nachgewiesen.

Bezüglich der Abhandlung von *Frobenius* können wir uns ganz kurz fassen, da wir die von dem Äquivalenzproblem ausgehende algebraische Überlegung, durch die *Frobenius* zu seiner Reduktionsmethode gelangt, in Kap. IX, § 3, die Reduktionsmethode selbst in § 1 desselben Kapitels ausführlich dargelegt haben. Die successiven vollständigen Systeme V_r und W_r werden von Frobenius lediglich in Determinantenform, ohne Benutzung der Pfaff'schen Aggregate und der Klammersymbole von Kap. IX § 2 aufgestellt; sie waren, wie wir wissen, im Wesentlichen bereits von Clebsch und insbesondere von Natani angegeben worden. Der Schwerpunkt der Frobenius'schen Deduktion liegt demgegenüber in dem *direkten Nachweis der Vollständigkeit jener Systeme*, ein Beweis, der, wie wir aus Kap. IX § 1 wissen, denjenigen des Fundamentaltheorems nach sich zieht. Es sei noch hervorgehoben, dafs *Frobenius* zuerst die Invarianz der Zahl $\varkappa$ und überhaupt das Äquivalenzproblem (Kap. III) ausdrücklich formulirt hat.

In der Abhandlung [II] entwickelt Frobenius die Sätze, die wir in Kap. III, § 2 sowie in Art. 235 wiedergegeben haben.

436. **S. Lie.** *Lie's* Beweis des Fundamentaltheorems [XI] stimmt der Hauptsache nach mit demjenigen überein, den wir in Art. 295 angegeben haben; er beruht auf zwei Hülfssätzen (Art. 294), die *Lie* der *Clebsch*'schen Theorie des Pfaff'schen Problems entnimmt. Es mufs aber betont werden, dafs diese beiden Sätze von *Clebsch* in Wirklichkeit nicht bewiesen wurden, aber allerdings sehr leicht aus *Lie's* Theorie der Berührungstransformationen gefolgert werden können (Art. 288 und 292).

Die Herstellung der Normalform erfolgt bei *Lie* nach der Methode, die wir in Kap. VI, § 4 auseinandergesetzt haben; sie beruht, wie wir l. c. gesehen haben, darauf, dafs der Pfaff'sche Ausdruck $\varDelta$ mit der Klasse $\varkappa$ durch eine einfache Substitution auf einen bedingungslosen Ausdruck $\overline{\varDelta}$ mit $\varkappa$ Variabeln reduzirt wird, aus dessen Normalform die von $\varDelta$ durch Differentiationen und Eliminationen (bei ungeradem $\varkappa$ noch durch eine Quadratur) hergestellt werden kann; dafs ferner $\overline{\varDelta}$ nach der ersten Methode von *Clebsch* reduzirt wird, und auf den hierdurch entstehenden Pfaff'schen Ausdruck mit $\varkappa - 1$ Variabeln und der Klasse $\varkappa - 2$ obige Substitutionsmethode neuerdings angewendet wird, u. s. w.

In einer früheren Abhandlung [X] hatte Lie das soeben geschilderte Verfahren auf den Fall eines bedingungslosen $\varDelta$ mit gerader Variabelnzahl angewendet.

Die von *Lie* um dieselbe Zeit[1]) geschaffenen Begriffe: Flächenelement, Elementverein, Berührungstransformation (Kap. VII, VIII und XI) stehen mit dem Pfaff'schen Problem in allerengstem Zusammenhang: denn erstens ist die Theorie der Berührungstransformationen selbst ein Spezialfall der Theorie des Pfaff'schen Problems (Kap. XI, § 1, 2), und umgekehrt gestattet eine direkte Begründung der ersteren auch die letztere vollständig aufzubauen (Kap. XI, § 3); zweitens liefern jene Begriffe die Erledigung der von *Clebsch* nur gestreiften Frage nach dem allgemeinsten Integraläquivalent einer beliebigen Pfaff'schen Gleichung (Kap. VII) und nach dem Übergang von einer speziellen Normalform zu einer beliebigen andern, sowie die Lösung des Äquivalenzproblems zweier Pfaff'scher Ausdrücke (Kap. VIII); drittens ermöglichen sie es, die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster

1) Seit 1870 in verschiedenen (bes. norwegischen) Abhandlungen; vgl. die zusammenfassenden Darstellungen VI, VII, VIII und besonders II und IV, sowie *A. Mayer*, IX, X; G. Darboux I, II.

Ordnung von den Beschränkungen der älteren Methoden zu befreien, und im Sinne des ursprünglichen Pfaff'schen Ansatzes der allgemeinen Theorie des Pfaff'schen Problems als Spezialfall einzuordnen (Kap. XII, XIII).

437. **G. Darboux; F. Engel.** Wir haben zum Schlusse noch einer Untersuchungsrichtung zu gedenken, die in den letzten Jahrzehnten für unsere Theorie von Wichtigkeit geworden ist, wir meinen die Theorie der mit einem Pfaff'schen Ausdruck, bezw. einer Pfaff'schen Gleichung *invariant verknüpften Gebilde.* Das wichtigste dieser Gebilde, die *bilineare Kovariante,* wurde von *Frobenius* [I] in den Mittelpunkt der Theorie des Pfaff'schen Problems gestellt (Kap. IX, § 3); durch konsequente Durchführung dieser Auffassungsweise gelangt *Darboux* [II] zu einer eleganten und übersichtlichen Darstellung unserer Theorie, die wir ihren Hauptzügen nach in Kap. X, § 2 wiederzugeben versucht haben. Doch macht *Darboux* keinen Gebrauch von dem Begriff *der mit einem Pfaff'schen Ausdruck invariant verknüpften Schaaren infinitesimaler Transformationen.* Dieser Begriff wurde schon im J. 1873 von *Lie* [in der Abh. IX p. 156] gelegentlich gestreift; welcher Nutzen aus ihm für die Darstellung und Lösung des Pfaff'schen Problems gezogen werden kann, hat *F. Engel* [III] gezeigt (vgl. auch Lie XII).

Litteraturverzeichnis.

Bäcklund, A. V., I. Über Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Ann. 11, p. 412—433 (1877); vgl. Kap. XIV, § 5.

Bertrand, J, I. Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique, Journ. de Mathém. sér. 1, Bd. 17 p. 393 (1852).

— II. Comptes Rendus [1]) 45, p. 617 (1857) (Bertrand's „Einwand" gegen Cauchy's Methode, vgl. Art. 343).

— III. Sur la première méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Comptes Rendus [1]) 82, p. 641 (1876).

— IV. Note sur l'intégration des équations différentielles totales, Comptes Rendus 83, p. 1191 (1876).

Binet, J., I. Note sur l'usage du calcul des variations etc., Comptes Rendus 14, p. 654 (1842).

— II. Sur la transformation de Pfaff etc. Comptes Rendus 15, p. 74 (1842); eine Darstellung der Pfaff'schen Methode, die im Wesentlichen auf den Ansatz des Art 258 hinaus kommt.

Boltzmann, L., I. Zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Wiener Berichte 72, 2te Abt. p 471 (1875) (vgl. Art. 343 und p. 601 Anm. [1])).

Bonnet, O., I. Sur un theorème de Jacobi relatif à l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre, Comptes rendus 45, p. 581 (1857); (geometrische Deutung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung; vgl. Art. 331 und Lie IV, p. 518).

Boole, G., I. A treatise on differential equations, London, Macmillan & Co. 1859; dazu Supplementary Volume 1865.

— II. On simultaneous differential equations of the first order etc. Lond. Philos. Transactions 1862 p. 437; vgl. Kap II, § 4, besonders Art. 74.

— III. On the differential equations of dynamics, Lond. Philos. Trans. 1863 p. 485.

Bouquet, M., I. Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles totales du premier ordre, Darboux Bulletin des sciences math. et astr. sér. 1, Bd. 3 p. 265 (1872); vgl. Art. 83.

Bour, É., I. Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique analytique, Journ. de mathém. sér. 1, Bd. 20, p. 185—202 (1855); vgl. Kap. XIII, § 2.

— II. Unter demselben Titel in den Mémoires présentés par divers savants à l'Acad. des Sc. 14, p. 792 (1856).

— III. Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre, Journ. de l'École Polyt. Bd. 22, Cah. 39, p. 148 (1862).

Brioschi, F., I. Sulla variazione delle costanti arbitrarie nei problemi della Dinamica, Tortolini, Ann. di scienze mat. Bd. 4, p. 298 (1853).

— II. Intorno ad un teorema di Meccanica, ebenda p. 395.

1) i. e. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris).

Brioschi, F., III. Sopra una nuova proprietà degli integrali di un problema di dinamica, ebenda Bd. 6, p. 426, 430 (1855).

Cartan, É., I. Sur certaines expressions différentielles et le Problème de Pfaff, Ann. Ec. Norm. 1899 p. 239—332.

Cauchy, A., I. Note sur l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre à un nombre quelconque de variables, Bulletin de la soc. philomathique de France 1819 p. 10.

— II. Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique, Bd. II, Paris 1841 p. 238—272.

— III. Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Comptes Rendus 14, p. 740 (1842) = Oeuvres sér. 1, Bd. 6, p. 423; vgl. auch Comptes Rendus 14, p. 769, 881, 952, 1020, 1026 = Oeuvres, sér. 1, Bd. 6, p. 431, 444, 459, 461, 467.

— IV. Mémoire sur l'emploi du calcul des limites dans l'intégration des équations aux dérivées partielles, Comptes Rendus 15, p. 44 (1842) = Oeuvres, sér 1, Bd. 7, p. 17.

— V. Mémoire sur l'application du calcul des limites à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles, Comptes Rendus 15, p. 85 (1842) = Oeuvres, sér. 1, Bd. 7, p. 33; vgl. auch Comptes R. 15, p. 141, 188 = Oeuvres, sér. 1, Bd. 7, p. 62.

Cayley, A., I. Collected Mathematical Papers, Cambridge 1889—98.

— II. Sur les déterminants gauches, Journal für Math. 38, p. 93 (1848) = Papers 1, p. 410.

— III. Démonstration d'un theorème de Jacobi par rapport au problème de Pfaff, Journal für Math. 57, p. 273 (1860) = Papers 4, p. 359.

— IV. A memoir on differential equations, Quarterly Journ. of Math. 14, p. 292—339 (1877) = Papers 10, p. 93—133.

— V. On the theory of partial differential equations, Math. Annalen 11, p. 194—198 (1877) = Papers 10, p. 134—138.

— VI. Report on the Recent Progress of Theoretical Dynamics, Report of the 27th meeting of the British Association, p. 1—42; London 1858.

— VII. On Pfaff-invariants, Quarterly Journal of Math. 26, p. 195 (1893) = Papers 13, p. 405

Clebsch, A., I. Über Jacobi's Methode, die partielle Differentialgleichung erster Ordnung zu integriren, und ihre Ausdehnung auf das Pfaff'sche Problem, Journal für Math. 59, p. 190—192 (1861); (Voranzeige zu II und III).

— II. Über das Pfaff'sche Problem, Journal für Math. Bd. 60, p. 193—251 (1862).

— III. Über das Pfaff'sche Problem, Journal für Math. Bd. 61, p. 146—179 (1863).

— IV. Über die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen, Journal für Math. 65, p. 257 (1865).

Collet, J., I. Intégration des équations simultanées aux derivées partielles du premier ordre etc., Annales de l'École Norm. 1870 p. 1—57.

— II. Du facteur intégrant etc. ebenda p. 59—88 (vgl. Art. 94).

— III. Conditions d'intégrabilité des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, Annales de l'École Normale 1876 p. 49—82.

— IV. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles etc. Comptes Rendus 91, p. 974 (1880).

Darboux, G., I. Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Mémoires prés. par divers savants à l'Acad. des Sc. Bd. 27, 1883.

— II. Sur le problème de Pfaff, Bulletin des sciences math. et astr. sér. 2, Bd. 6, p. 14—36, 49—68 (1882).

Darboux, G., III. Sur la première méthode de Jacobi etc. Comptes Rendus 79, p. 1488 (1874); 80, p. 160 (1875); vgl. auch Bull. des sc. math. et astr. sér. 1, Bd. 8, p 249—255.
— IV. Sur le problème de Pfaff, Comptes Rendus 94, p. 835 (1882); vgl. Art 437.
Deahna, F., Über die Bedingungen der Integrabilität linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen einer beliebigen Anzahl veränderlicher Gröſsen, Journ. für Math. 20, p. 340—349 (1840); vgl. Kap. II, § 3.
Delassus, É., I. Leçons sur la theorie analytique des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1897.
Donkin, W. F., I. On a class of differential equations, including those which occur in Dynamical Problems, London, Philos. Transactions 1854 p. 71.
Du Bois-Reymond, P., I. Über die Integration linearer totaler Differentialgleichungen, denen durch ein Integral Genüge geschieht, Journal für Math. 70, p. 299—313 (1869).
— II. Note über die Integration linearer totaler Differentialgleichungen, Math Annalen 12, p. 123—131 (1877).
— III. Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln. Erstes (einziges) Heft, Leipzig 1864.
Engel, F., I, II. Zur Invariantentheorie der Systeme von Pfaff'schen Gleichungen, Berichte der kgl. sächs. Ges. d Wiss. zu Leipzig 1889 p 157; 1890 p. 192.
— III. Das Pfaff'sche Problem, ebenda 1896 p. 413.
— IV. Die infinitesimalen Transformationen einer Pfaff'schen Gleichung, ebenda 1899 p. 296.[1])
Euler, L., I. Institutiones calculi integralis, Petrop. 1768—1770, 3 Bände; 2. Aufl 1792—1794, 4 Bände; deutsch v Salomon, Wien 1828—1830, 4 Bände.
Farkas, J., I. Généralisation du theorème de Jacobi sur les équations de Hamilton, Comptes Rendus 98, p 352 (1884).
Forsyth, A. R., I. A treatise on Differential Equations, second ed. London 1889, deutsch von H. Maser u. d. Titel: Lehrbuch der Differentialgleichungen, Braunschweig 1889.
— II. Theory of Differential Equations, part. I: Exact equations and Pfaff's problem, Cambridge 1890, deutsch von H. Maser, Leipzig 1893.
Frisiani, I. Sull' integrazione delle equazioni differenziali ordinarie di primo ordine e lineari fra un numero qualunque di variabili, im Anhang zu den Effemeridi Astronomiche di Milano für das Jahr 1848.[2])
Frobenius, G., I. Über das Pfaff'sche Problem, Journ. für Math. 82, p. 230—315 (1877).
— II. Über homogene totale Differentialgleichungen, Journ. für Math. 86, p. 1—19 (1879).
— III. Ebenda p. 54 (zu Kap. I, § 4).
Gauss, C. F., I. Bericht über die Abhandlung von Pfaff, Götting. gelehrte Anzeigen 1815 p. 1025—1038 = Werke 3 p. 231—241.
Gilbert, Ph., I Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur la methode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Annales de la Soc. scient. de Bruxelles 1881, Bd. 5, 2me partie, p. 1—16.
— II. Sur une propriété de la fonction de Poisson, Comptes Rendus 91, p. 541—544, 613—616 (1880).
Goursat, É., I. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1891, deutsch v. H. Maser, Leipzig 1893.

1) Diese Arbeit konnte bei der Redaktion von Kap. X, § 1 nicht mehr benutzt werden.

2) Diese Arbeit war dem Verf. unzugänglich; vgl. die Inhaltsangabe bei Forsyth II, § 47 Anm.

Graindorge, J, I. Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres, Paris 1872 = Mémoires de la Soc. royale des sciences de Liége sér. 2, Bd. 5.

Grassmann, H., I. Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862 = Gesammelte Werke, Bd. 1, Teil 2, p. 345—379; vgl. hierzu die Erläuterungen F. Engel's, ebenda p. 482—495.

Hamburger, M., I. Über das Pfaff'sche Problem, Grunert's Archiv für Math. 60, p. 185—214 (1877).

Hamilton, W. R, I. On a general method in Dynamics, London Philos. Transactions 1834 p. 247—308; 1835 p. 95—144.

Imschenetzky, V. G., I. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, trad. par Hoüel, Paris u. Greifswald 1869 = Grunert's Archiv f. Math. 50, p. 278, 369 (1869).

Jacobi, C. G. J., I. Gesammelte Werke, Band 4 und 5, Berlin 1886 und 1890.

— II. Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Journ. für Math. 2, p. 317—329 (1827) = Werke 4, p. 1—15.

— III. Über die Pfaff'sche Methode, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren, Journ. f. Math. 2, p. 347 357 (1827) = Werke 4, p. 17—29.

— IV. Über die Reduktion der Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen irgend einer Anzahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, Journ. f. Math. 17, p. 97—162 (1837) = Werke 4, p. 57—127.

— V. Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis, Journ. f. Math. 23, p. 1—104 (1841) = Werke 4, p. 147—255.

— VI Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi, Journ. f. Math. 27, p. 199—268; 29, p. 213—279, 333—376 (1845) = Werke 4, p. 317—509.

— VII. Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi, Journ. f Math. 60, p. 1—181 = Werke 5, p. 1—189.

— VIII. Über diejenigen Probleme der Mechanik, in welchen eine Kräftefunktion existirt, und über die Theorie der Störungen, Werke 5, p. 217—395.

— IX. Über die vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, Werke 5, p. 397—438.

— X. Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen 4 Variabeln, Werke 5, p. 439—464.

— XI. Vorlesungen über Dynamik, herausg. von A. Clebsch, Berlin 1866 = Werke, Supplementband, Berlin 1884.

König, J., I. Über die Integration der Hamilton'schen Systeme und der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Annalen 23, p. 504—520 (1884) (Jacobi's zweite Methode in etwas anderer Darstellung).

Korkin, A., I. Sur les équations simultanées etc. Comptes Rendus 68, p. 1460 (1869).

Lagrange, J. L., I. Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre, Abhandlungen der Berl. Akademie 1772 p. 35 = Oeuvres 3, p. 549—577.

— II. Sur les intégrales particulières des équations différentielles, ebenda 1774 p. 239 = Oeuvres 4, p. 5—108.

— III. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, ebenda 1779 p. 152 = Oeuvres 4, p. 624—634.

— IV. Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires, ebenda 1785 p. 174 = Oeuvres 5, p. 543—562.

Laurent, H., I. Sur un theorème de Poisson, Journal de Mathém. sér 2, Bd. 17, p. 422 (1872) (Verallgemeinerung des Poisson'schen Theorems, vgl Goursat I, Note 2).

— II. Mémoire sur les équations aux dér. part. du premier ordre, Journ. de Mathém. sér. 3, Bd. 5, p. 249—284 (1879).

— III. Sur les conditions d'intégrabilité d'une expression différentielle. Nouv. Annales d. M. sér. 3, Bd. 6, p. 19—24.

Lie, S., I, II, III. Theorie der Transformationsgruppen, her. unter Mitw. von Fr. Engel; Leipzig 1888—1893, 3 Bde.

— IV. Geometrie der Berührungstransformationen, herausg. unter Mitw von G. Scheffers, 1. Bd., Leipzig 1896.

— V. Integrationsmethode partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, Göttinger Nachrichten 1872, p. 321—326.

— VI Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen, Mathem. Annalen 8, p. 215—303 (1875).

— VII Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Annalen 9, p. 245—296 (1876).

— VIII. Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Annalen 11, p. 464—557 (1877).

— IX. Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen, Archiv for Math. og Naturv. 2, p. 129—156 (1877).

— X. Neue Integrationsmethode eines $2n$-gliedrigen Pfaff'schen Problems: Verhandlungen der Ges. der Wiss. zu Christiania 1873 p. 320.

— XI. Theorie des Pfaff'schen Problems, erste (einzige) Abhandlung, Arch. for Math. og Natuv. 2, p. 338—379 (1876).

— XII. Einige Bemerkungen über Pfaff'sche Ausdrücke und Gleichungen, Berichte der kgl sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig 1896 p. 405—412.

Liouville, J., I. Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique, présentée au Bureau des longitudes le 29 juin 1853, Journ. de Mathém. sér 1, Bd. 20, p. 137—138 (1855).

Mansion, P., I. Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Mémoire couronné par l'Académie de Belgique, Bd. 25, Paris 1875, deutsch von H. Maser u. d. Titel: Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Berlin 1892.

— II. Sur la méthode de Cauchy pour l'intégration d'une équation aux dér. part. du premier ordre, Comptes Rendus 81, p. 790—793 (1875).

Mayer, A., I. Über unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen, und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen, Math. Annalen 5, p. 448—470 (1872).

— II. Zur simultanen Integration linearer partieller Differentialgleichungen, Gött. Nachr. 1872 p. 315.

— III. Zur Theorie der vollständigen Lösungen und der Transformation der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Gött. Nachr. 1872, p. 405—420.

— IV. Über die Jacobi-Hamilton'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Ann. 3, p. 435 (1871).

— V. Die Lie'sche Integrationsmethode der part. Diffgl. I. O., Gött. Nachr. 1872, p. 467; Math. Ann. 6, p. 162—191 (1873).

— VI. Zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Gött. Nachr. 1873 p. 299.

— VII. Über die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit derselben unbekannten Funktion, Math. Ann. 4, p. 80 (1872).

Mayer, A., VIII. Direkte Ableitung des Lie'schen Fundamentaltheorems durch die Methode von Cauchy, Math. Ann. 6, p. 192—196 (1873).

— IX. Über die Lie'schen Berührungstransformationen, Gött Nachr. 1874 p. 317—331.

— X. Direkte Begründung der Theorie der Berührungstransformationen, Math. Ann. 8, p 304 (1875).

— XI. Über eine Erweiterung der Lie'schen Integrationsmethode, Math. Ann. 8, p. 313 (1875).

— XII. Über den Multiplikator eines Jacobi'schen Systems, Math. Ann. 12, p. 132—142 (1877).

— XIII. Zur Pfaff'schen Lösung des Pfaff'schen Problems, Math. Ann. 17, p. 523 (1880).

Méray, Ch., I. Extension de la méthode de Jacobi etc., Ann. de l'Éc Norm. 1890 p. 217—232.

— II. Leçons nouvelles sur l'analyse infinitesimale, Bd 1, Paris 1894.

Monge, G., I. Application de l'Analyse à la Géométrie, 5te Aufl., Paris 1850 (bes p. 421).

— II. Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles; Histoire de l'Académie des Sciences 1784, bes. p. 168—185.

Morera, G., I. Sul problema di Pfaff, Mem. dell' Acc. Reale delle scienze di Torino 18, p. 521—533 (1882—83).

— II. Il metodo di Pfaff per l'integrazione etc. R. Istituto Lomb., Rendiconti, ser. 2, Bd. 16, p. 637, 691 (1883).

Natani, L., I. Über totale und partielle Differentialgleichungen, Journ. für Math. 58, p. 301—328 (1860).

— II. Die höhere Analysis in 4 Abhandlungen; 3te Abh. Berlin 1866.

Padova, E., I. Sulla integrazione delle equazioni a derivate parziali del primo ordine; Collectanea Matematica, Mailand 1881 p. 105—116.

Pfaff, J. F, I. Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcunque variabiles, complete integrandi. Abhandl. d. kgl Ak. d. Wiss. zu Berlin 1814—15, p. 76—136.

Raabe, J. L., I. Über die Integration der Differentialgleichungen von der Form: $dz = H\,dx + K\,dy + L\,dp + M\,dq + \cdots$, Journ. f. Math. 14, p. 123—168 (1835).

Russian, C., I. Sur les formes canoniques d'une expression différentielle $X_1 dx_1 + \cdots + X_p dx_p$, Math. Ann. 50, p. 247—260 (1898).

Saltikow, N., I. Journ. de Mathém, sér. 5, Bd. 3, p. 423 (1897).

— II. Comptes Rendus 128 p. 166, 225, 274, 1550 (1899).
(Ausdehnung der ersten Jacobi'schen Methode auf Involutionssysteme, dasselbe wie Morera II).

Schläfli, L., I. Annali di matem. pura ed appl. ser. 2, Bd. 2, p. 89—96 (schwierigeres Beispiel zu Pfaff's Reduktionsmethode).

Schur, F., I. Über vollständige Systeme von homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen, Journ. für Math. 108 p. 313 (1891).

— II. Über die Zurückführung eines vollständigen Systems auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen, Berichte der k. sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig, 1892, p. 177—183.

— III. Über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, ebenda 1894, p. 38—48.

Sylvester, J. J., I. Philos. Mag. 1851, p. 279 (zu Kap. II, § 4).

Tanner, H. W. L., I. On certain Functions allied to Pfaffians; Quarterly Journ. of Math. 16, p. 34 (1879).

— II. On the transformation of a linear differential expression, ebenda p. 45 u. 58.

Vivanti, G., I. Sulle trasformazioni infinitesime che lasciano invariata un' equazione pfaffiana; Rendic. Circolo Mat. di Palermo 12, p. 1—20 (1898).
Weber, E. v., I. Note unter demselben Titel, ebenda p. 133—140.
— II. Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen, Berichte der kgl. sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, 1898, p. 207—229.
Weber, H., I Über singuläre Auflösungen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, Journ. für Math. 66, p. 193–236 (1866)
Weiler, A., Zeitschr. f. Math. u. Phys. 8, (1863), 20, (1875), 39, (1894), vgl Clebsch, Journ. für Math. 65, p 262 ff.; A. Mayer, Math. Annalen 9, p. 347–370
Zantschewsky, J., I. Le problème de Pfaff, Annales de l'Éc. Norm. 1896, p. 267–294.

Wort- und Sachregister.

Anm. Die arabischen Ziffern beziehen sich, wo nicht anders bemerkt, auf die Artikelnummern
Abkürzungen: Btrf. = Berührungstransformation; D. = Differentialgleichung; Mann. = Mannigfaltigkeit; p. = partiell; Pf. A. = Pfaff'scher Ausdruck; Pf. Gl. = Pfaff'sche Gleichung.

Berichtigungen.

Seite 44, Zeile 16, 17 von oben lies: „das die n Ungleichungen" statt „das *eine* der Ungleichungen"

Seite 70, Zeile 4 von unten lies: ωD statt: $\omega \varrho D$.
„ 89, „ 2 von oben „ $B_2 \chi_2$ statt: $B_2 \chi_3$.
„ 114, „ 1 von unten „ 373, 374 statt: 367, 369.
„ 141, „ 2 von unten „ Art. 124 statt: 123.
„ 190. „ 6 von oben „ Art. 262 statt: 259.
„ 264, „ 2 von unten „ $\Omega(z, x_1 \ldots x_m, z', x_1' \ldots x_m')$.
„ 271, „ 13 von unten „ Art. 293 statt: 290.
„ 271, „ 3 von unten „ $-dU + P_1 dX_1 + \cdots + P_m dX_m$.
„ 365, „ 13 von unten „ die allgemeinste infinitesimale homogene Berührungstransformation.

Seite 395, Zeile 14 von unten lies: $dU(xp) + \Sigma P_i(xp) dX_i(xp)$.
„ 466, „ 7 von oben „ Art. 431 statt: 426.

Date Due

Demco 293-5			